

Wellen und Quantenphysik

1. Eigenschaften von Wellen

2. Interferenz und Beugung

3. Relativitätstheorie

4. Welle-Teilchen Dualismus

5. Atome

6. Elektronische Eigenschaften von Festkörpern

Lorentz Transf.

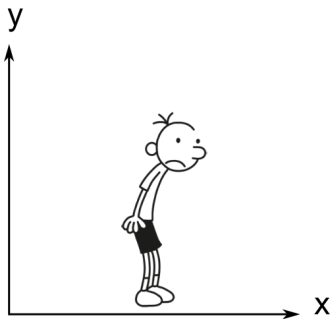
Relativitätstheorie

- Michelson Morley Experiment
- Lorentz Transformation
- Die Einsteinschen Postulate
- Zeitdilatation und Längenkontraktion
- Das Experiment von Hall und Rossi
- Zwillingsparadoxon
- „sichtbare Effekte“ der Lorentz Transformation
- Der invariante Abstand
- Relativistische Invarianten
- Doppler-Effekt
- Relativistische Mechanik

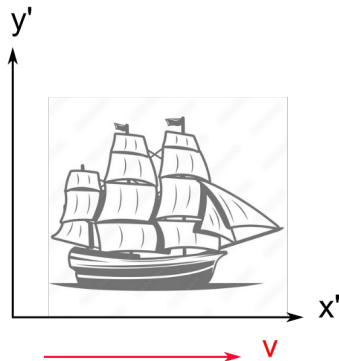
Lorentz Transformation 1

Bezugssysteme:

Bezugssystem S



Bezugssystem S'



Lorentz Transformation 1

Kommentar

Die Skizze zeigt zwei Bezugssysteme

Ein Beobachter im Bezugssystem S betrachtet z.B. ein Schiff, das sich entfernt.

Dem Schiff werde ein Bezugssystem S' zugeordnet, das sich mit dem Schiff bewegt.

Lorentz Transformation 2

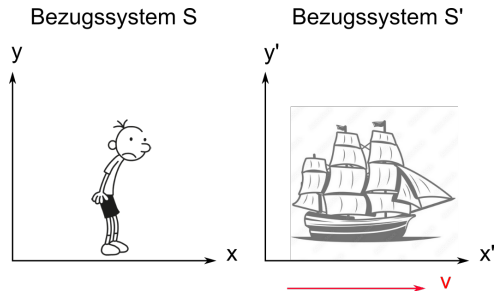
Galilei Transformation:

$$x = x' + vt'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$



In der klassischen Physik ist die Zeit eine universelle Größe und ist folglich in beiden Bezugssystemen gleich: $t = t'$

Lorentz Transformation 2

Kommentar

Bestimmt die Geschwindigkeit $\vec{v}$ die x-Koordinatenachse, und werden die Koordinaten im Bezugssystem S' mit x' , y' , z' bezeichnet, dann ergeben die Formel auf der linken Seite die Koordinaten im Bezugssystem S des Beobachters.

Damit nimmt man an, dass zur Zeit $t = t' = 0$ der Ursprung von Koordinatensystem S mit dem Ursprung von Koordinatensystem S' übereinstimmt.

Diese Transformation wird Galilei Transformation genannt.

Die Galilei Transformation bewährt sich in der klassischen Mechanik.

Wirkt z.B. eine Kraft auf eine Masse, so ergibt sich in beiden Bezugssystemen der gleiche Wert für die Beschleunigung. Die Newtonsche Bewegungsgleichung ändert sich nicht, wenn das Bezugssystem gewechselt wird.

Lorentz Transformation 3

Lorentz Transformation: Bei einer elektromagnetische Welle ändert sich die Lichtgeschwindigkeit nicht, wenn das Bezugssystem gewechselt wird.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

und

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2}$$

Die Wellenfunktion ψ steht für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ im Bezugssystem S, ψ' entsprechend für $\vec{E}'$ und $\vec{B}'$ im Bezugssystem S'

$c \cdot t$ und x müssen bei der Koordinatentransformation gleich behandelt werden

Lorentz Transformation 3

Kommentar 1

Wird die Galilei Transformation auf die Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik angewendet, dann treten aufgrund der Relativgeschwindigkeit beim Wechsel des Bezugssystems Zusatzterme auf und die Maxwell-Gleichungen nehmen eine andere Gestalt an.

Mathematisch stellt sich die Frage, wie eine Transformation beschaffen sein muss, welche die Maxwell-Gleichungen nicht verändert, so dass die Wellengleichungen für die elektromagnetischen Felder in allen Bezugssystemen gelten und die Lichtgeschwindigkeit eine Naturkonstante ist.

Dieses Problem wurde 1895 von Hendrik Lorentz gelöst.

Lorentz Transformation 3

Kommentar 2

Die Lösung von Lorentz sieht man am einfachsten ein, wenn die Maxwell-Gleichung im Vakuum betrachtet werden, wo es keine elektrischen Ladungen und Ströme gibt.

In diesem Fall entsprechen die Maxwell-Gleichungen den Wellengleichungen der freien elektromagnetischen Wellen.

Die Wellengleichungen für das elektrische und magnetische Feld sind äquivalent zu den ursprünglichen Maxwell-Gleichungen.

Bewegen sich zwei Bezugssysteme relativ zueinander, dann darf sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit, d.h. die Lichtgeschwindigkeit c nicht ändern.

Lorentz Transformation 3

Kommentar 3

Die beiden Wellenfunktionen ψ bzw. ψ' stehen für das elektrische und magnetische Feld der elektromagnetischen Welle.

Die beiden Wellengleichungen beschreiben eine ebene elektromagnetische Welle, die sich entlang der x-Achse ausbreitet.

Da die Wellengleichung sich beim Übergang von einem Bezugssystem in das andere nicht ändern darf, muss die Koordinate x und das Produkt ct mathematisch gleich behandelt werden.

Das hat eine entscheidende Konsequenz: So wie die Koordinaten des Ortes sich beim Wechsel des Bezugssystems ändern, ändert sich nun auch die Zeit.

Lorentz Transformation 3

Kommentar 4

Die Uhren der beiden Bezugssystemen laufen nicht länger synchron.

Beim Übergang von einem Bezugssystem in das andere ändern sich aber nicht nur die Koordinaten, sondern auch das elektrische und das magnetische Feld.

In den Wellengleichungen ist das durch die beiden Wellenfunktionen ψ und ψ' angedeutet.

Befindet sich z.B. im Bezugssystem S' entlang der x-Achse eine ruhende Aneinanderreihung von elektrischen Ladungen, dann gibt es im Bezugssystem S' ein elektrisches Feld aber kein magnetisches Feld.

Bewegt sich das Bezugssystem S' gegenüber dem Bezugssystem S mit der Geschwindigkeit v , dann fließt im Bezugssystem S ein Strom und es gibt zusätzlich ein magnetisches Feld aufgrund des elektrischen Stroms.

Lorentz Transformation 3

Kommentar 5

Es zeigt sich so, dass beim Wechsel des Bezugssystems nicht nur die Koordinaten sondern auch die elektromagnetischen Felder transformiert werden müssen.

Glücklicherweise wird die Transformation der elektromagnetischen Feld in dieser Vorlesung nicht benötigt, weshalb diese Komplikation im folgenden unterschlagen werden kann.

Die Transformation der Koordinaten genügt.

Lorentz Transformation 4

Ansatz:

$$x = x' + vt' \quad \rightarrow \quad x = \gamma \left(x' + \frac{v}{c} ct' \right)$$

$$y = y' \quad \rightarrow \quad y = y'$$

$$z = z' \quad \rightarrow \quad z = z'$$

$$t = t' \quad \rightarrow \quad ct = \gamma \left(ct' + \frac{v}{c} x' \right)$$

Damit die Wellengleichung die Form nicht ändert, wird ein Faktor γ benötigt

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Lorentz Transformation 4

Kommentar 1

Die Lorentz Transformation der Koordinaten ergibt sich aus der Galilei Transformation.

Die Galilei Transformation wird so erweitert, dass die Koordinaten $c \cdot t$ und x gleich behandelt werden.

Dazu erweitert man für die Koordinate x den Term $v \cdot t$ mit der Lichtgeschwindigkeit und berücksichtigt, dass nun die Zeiten in den beiden Bezugssystemen S und S' nicht mehr gleich sein können.

Zur Koordinate x' gesellt sich die Zeit t' .

Die Transformationsgleichung für die Zeit schreibt sich analog zur Transformationsgleichung für die Koordinate x und zum Produkt $c \cdot t'$ gesellt sich nun der Term $(v/c) \cdot x'$.

Lorentz Transformation 4

Kommentar 2

Werden diese Transformationsgleichungen auf die Wellengleichung angewendet, dann findet man, dass die Gleichung für die Koordinate x und die Gleichung für die Koordinate ct zusätzlich mit dem rot umrandeten Faktor γ multipliziert werden muss.

Mit diesen Transformationsgleichungen ändert sich die Wellengleichung nicht, wenn das Bezugssystem gewechselt wird.

Lorentz Transformation 5

Lorentz Transformation:

$$x = \gamma(x' + \frac{v}{c}ct')$$

$$y = y' \quad \text{und} \quad z = z'$$

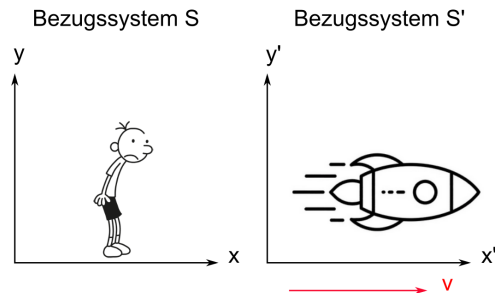
$$ct = \gamma(ct' + \frac{v}{c}x')$$

oder schlicht

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$y = y' \quad \text{und} \quad z = z'$$

$$t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x')$$



Die Zeit ist keine universelle Größe mehr und folglich in beiden Bezugssystemen verschieden: $t \neq t'$

Lorentz Transformation 5

Kommentar

Die rot umrandeten Formeln fassen die Lorentztransformation zusammen.

Einsteinsche Postulate

Relativitätstheorie

- Michelson Morley Experiment
- Lorentz Transformation
- **Die Einsteinschen Postulate**
- Zeitdilatation und Längenkontraktion
- Das Experiment von Hall und Rossi
- Zwillingsparadoxon
- „sichtbare Effekte“ der Lorentz Transformation
- Der invariante Abstand
- Relativistische Invarianten
- Doppler-Effekt
- Relativistische Mechanik

Die Einsteinschen Postulate

1. Die Naturgesetze sind in allen Inertialsystemen gleich.
2. Ein Beobachter misst unabhängig von seiner Geschwindigkeit für die Lichtgeschwindigkeit immer den Wert $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$.
3. Es gibt keinen absoluten Zustand der Ruhe.

Die Einsteinschen Postulate

Kommentar 1

Albert Einstein erkannte, dass mit der Lorentz Transformation alle Probleme obsolet wurden, die sich aus der Annahme eines Äthers als Trägermedium für elektromagnetische Wellen ergaben.

Er schloss daraus, dass die Lorentz Transformation die richtige Transformation zwischen zwei Bezugssystemen sein muss und die Galilei Transformation nur eine Näherung sein kann, die bei kleinen Relativgeschwindigkeiten anzuwenden ist.

Die Konsequenz seiner Überlegungen war, dass die Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik korrekt sein müssen, während die Newtonsche Mechanik lediglich eine Näherung ist.

Seine Überlegungen fasste Einstein in drei Postulaten zusammen:

1. Die Naturgesetze sind in allen Inertialsystemen gleich.

Die Einsteinschen Postulate

Kommentar 2

2. Die Lichtgeschwindigkeit hat einen festen Wert, der unabhängig von der Geschwindigkeit des Beobachters ist.

3. Und es gibt keinen Zustand der absoluten Ruhe.

Inertialsysteme wurden von Newton eingeführt. In einem Inertialsystem verharrt ein ruhender Körper immer im Zustand der Ruhe und ein Körper, der sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ gleichförmig geradegangs bewegt, bewegt sich immer mit dieser Geschwindigkeit gleichförmig geradegangs weiter.

Die Vorstellung eines Inertialsystems ist natürlich eine mathematische Abstraktion.

Die rotierende Erde ist kein Inertialsystem, da Kräfte wirken, die auf die Rotation zurückzuführen sind (Zentrifugal- und Coriolis-Kraft).

Die Einsteinschen Postulate

Kommentar 3

Die spezielle Relativitätstheorie bezieht sich explizit auf Inertialsysteme.

Sie ist deshalb so erfolgreich, da es lokal für begrenzte Zeiten immer möglich ist, sich den Ideal eines Inertialsystems anzunähern.

Mit der Feststellung, dass die Lichtgeschwindigkeit eine Naturkonstante ist, stellt Einstein fest, dass die Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik korrekt sind. Nicht die Maxwellsche Elektrodynamik sondern die Newtonsche Mechanik ist eine Näherung.

Tatsächlich gibt es kein Experiment, dass eine Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit des Beobachters nachweisen konnte.

Die Einsteinschen Postulate

Kommentar 4

Alle Experimente, die ein solches Ergebnis ergaben, haben sich stets als fehlerhaft erwiesen.

Das letzte Postulat schließt explizit den Äther aus.

Der Äther, in dem sich alle Himmelskörper reibungslos bewegen sollen, war ein solches Bezugssystem absoluter Ruhe.

Da die Lichtgeschwindigkeit der einzige freie Parameter der Maxwellsche Elektrodynamik ist, wurde bis zur Veröffentlichung der speziellen Relativitätstheorie angenommen, dass die Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik nur im Bezugssystem des Äthers exakt sind.

Das dritte Postulat besagt damit, dass die Maxwell-Gleichungen in allen Inertialsystemen exakt sind.

Die Einsteinschen Postulate

Kommentar 5

Die Einsteinschen Überlegungen haben sich bewährt und alle experimentellen Test bestanden.

Deshalb werden in den folgenden Abschnitten die Konsequenzen der Lorentz Transformation genauer betrachtet.

Das eigentliche Anliegen der Relativitätstheorie ist eine neuen Mechanik, die nicht nur für kleine Relativgeschwindigkeiten gültig ist.

Da die relativistische Mechanik kompliziert ist, sollen nur einige wichtige Aspekte, die immer wieder benötigt werden, zum Abschluss des Kapitels behandelt werden.

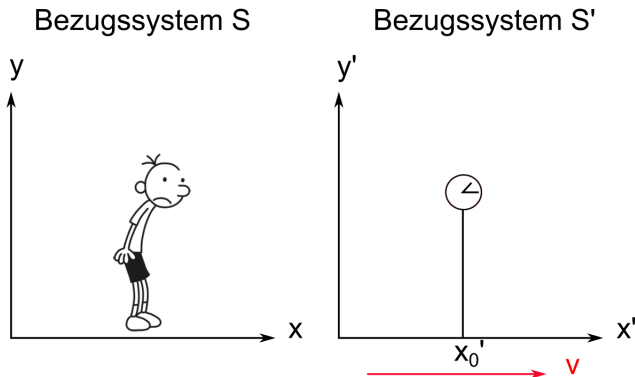
Zeitdilatation

Relativitätstheorie

- Michelson Morley Experiment
- Die Einsteinschen Postulate
- Lorentz Transformation
- **Zeitdilatation und Längenkontraktion**
- Das Experiment von Hall und Rossi
- Zwillingsparadoxon
- „sichtbare Effekte“ der Lorentz Transformation
- Der invariante Abstand
- Relativistische Invarianten
- Doppler-Effekt
- Relativistische Mechanik

Zeitdilatation und Längenkontraktion 1

Zeitdilatation:



Mit $t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x_0')$ gilt für Zeitintervalle: $\Delta t = \gamma \Delta t'$

Zeitdilatation und Längenkontraktion 1

Kommentar 1

Mit der Lorentz Transformation ist die Zeit keine absolute Größe mehr, die grundsätzlich für den ganzen Kosmos definiert werden kann.

Aufgrund der Lorentz Transformation muss man zwischen der Eigenzeit einer ruhenden Uhr und der Zeit einer bewegten Uhr unterscheiden.

Möchte man z.B. die Lebensdauer eines Elementarteilchens angeben, dann macht nur die Angabe der Eigenzeit einen Sinn.

Zeitdilatation und Längenkontraktion 1

Kommentar 2

Die Skizze zeigt einen Beobachter im Bezugssystem S, der auf eine Uhr schaut, die sich mit dem Bezugssystem S' entfernt.

Diese Skizze hat ein grundsätzliches Problem.

Der Kontakt zwischen dem Beobachter und der bewegten Uhr kann nur mittels elektromagnetischer Wellen, z.B. mit Lichtwellen hergestellt werden.

Dieser Aspekt wird im folgenden komplett unterschlagen und erst im Abschnitt „Sichtbare Effekte“ der Lorentz Transformation besprochen.

Nun soll allein die Wirkung der Lorentz Transformation betrachtet werden.

Zeitdilatation und Längenkontraktion 1

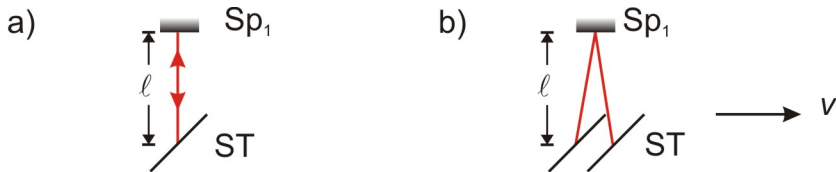
Kommentar 3

Mit der angegebenen Gleichung der Lorentz Transformation findet man die rot umrandete Formel.

Das Zeitintervall $\Delta t'$ der bewegten Uhr wird für den Beobachter im ruhenden Bezugssystem um den Faktor γ vergrößert.

Zeitdilatation und Längenkontraktion 2

Zeitdilatation und Michelson Interferometer



a) Das Interferometer ruht relativ zum Beobachter
Laufzeit für einen Lichtpuls

$$t_0 = \frac{2\ell}{c}$$

Zeitdilatation und Längenkontraktion 2

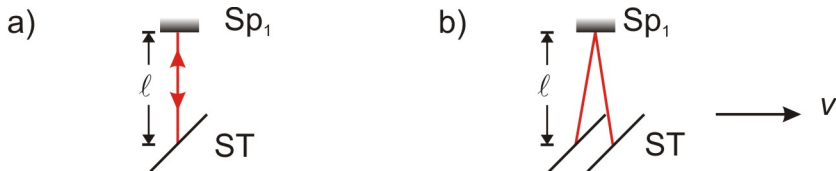
Kommentar

Eine anschauliche Interpretation ergibt sich mit Hilfe des Michelson Interferometers.

Die Laufzeit des Lichts vom Strahlteiler zum Spiegel 1 und zurück definiert für das ruhende Interferometer die Eigenzeit.

Das entsprechende Zeitintervall gibt die rot umrandete Formel an.

Zeitdilatation und Längenkontraktion 3



b) Das Interferometer bewegt sich relativ zum Beobachter
 Laufzeit für einen Lichtpuls

$$t(v) = \frac{2\ell}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = t_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$t(v)$: Zeit der bewegten Uhr

→ Zeitdilatation

Zeitdilatation und Längenkontraktion 3

Kommentar

Bewegt sich das Interferometer vom Beobachter weg, dann muss das Licht den längeren Weg aufgrund der Strahlneigung zurücklegen.

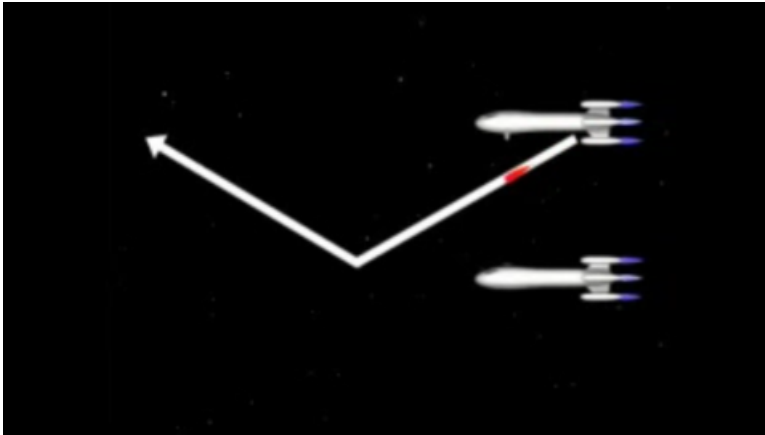
Die rot umrandete Formel gibt die Laufzeit, die für das Michelson Interferometer berechnet worden ist.

Sie entspricht der Formel für die Zeitdilatation, die aus der Lorentz-Transformation folgt.

Bewegte Uhren laufen langsamer.

Das folgende Video veranschaulicht den Effekt der Zeitdilatation.

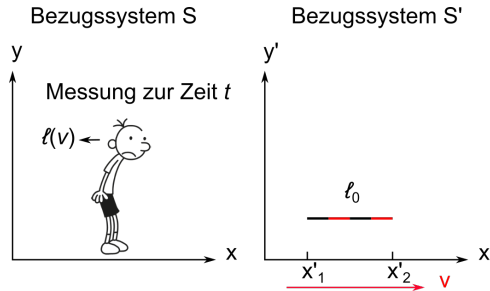
Zeitdilatation und Längenkontraktion 4



(TimeDilationTwoSpaceships.mp4)

Zeitdilatation und Längenkontraktion 5

Längenkontraktion:



$$\ell(v) = \ell_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Zeitdilatation und Längenkontraktion 5

Kommentar 1

Die Skizze zeigt einen Beobachter im Bezugssystem S, der auf einen Maßstab schaut, der sich mit der Geschwindigkeit v entfernt.

In seinem Ruhesystem S' hat der Maßstab die Länge $\ell_0 = x'_2 - x'_1$.

Soll die Länge des bewegten Maßstabs $\ell(v) = x_2 - x_1$ mit der Lorentz Transformation berechnet werden, dann müssen die Koordinaten x_1 und x_2 zur gleichen Zeit verwendet werden und es ergibt sich die rot umrandete Formel.

Rechnung:

$$x = \gamma(x' + vt') \quad \text{und} \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

mit

$$\gamma t' = t - \gamma \frac{v}{c^2} x'$$

Zeitdilatation und Längenkontraktion 5

Kommentar 2

ergibt sich

$$x = \gamma x' + vt - \gamma \frac{v^2}{c^2} x' \quad \rightarrow \quad x - vt = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

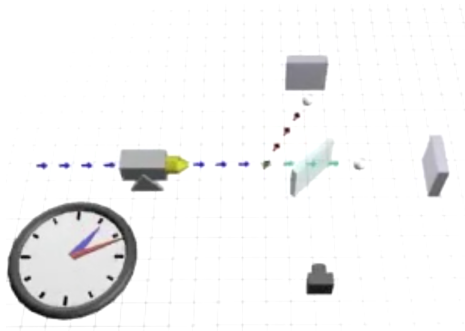
und damit

$$\ell(v) = x_2(t) - x_1(t) = (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

In der Differenz der Koordinaten hebt sich der Term $-vt$ weg, da die beiden Koordinaten zur gleichen Zeit t bestimmt werden müssen.

Zeitdilatation und Längenkontraktion 6

Michelson-Interferometer



Ist der Lichtweg für beide Arme des Interferometers ℓ , dann kommen die Lichtpulse nur gleichzeitig an, wenn der Arm in Bewegungsrichtung verkürzt ist

→ **Längenkontraktion**

Zeitdilatation und Längenkontraktion 6

Kommentar

Auch für diesen Effekt lohnt sich ein Blick auf das Michelson Interferometer.

Das Licht vom Strahlteiler zum Spiegel 2 in Vorwärtsrichtung benötigt mehr Zeit als das Licht zum Spiegel 1.

Für die Laufzeit t_2 ergab sich

$$t_2 = \frac{2\ell}{c} \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Man bringt die beiden Laufzeiten von Strahl 1 und 2 zur Übereinstimmung, wenn der Weg in Vorwärtsrichtung mit dem Faktor $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ multipliziert wird.

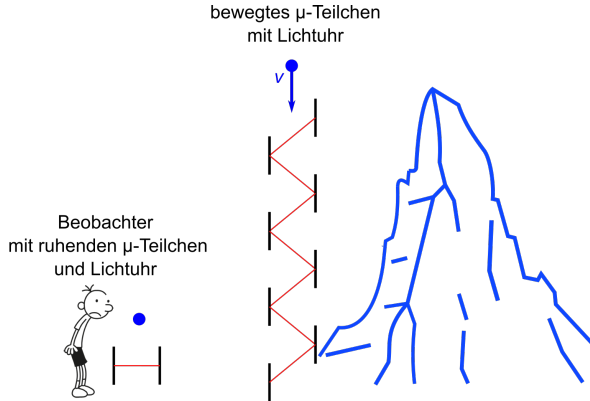
Die Länge des bewegten Maßstabs ist kleiner als die Länge des ruhenden Maßstabs.

Hall und Rossi

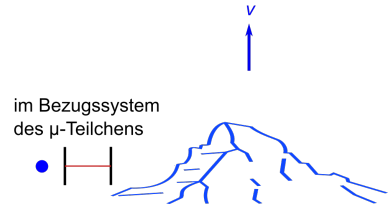
Relativitätstheorie

- Michelson Morley Experiment
- Die Einsteinschen Postulate
- Lorentztransformation
- Zeitdilatation und Längenkontraktion
- **Das Experiment von Hall und Rossi**
- Zwillingsparadoxon
- „sichtbare Effekte“ der Lorentztransformation
- Der invariante Abstand
- Relativistische Invarianten
- Doppler-Effekt
- Relativistische Mechanik

Das Experiment von Hall und Rossi



Zeitdilatation



Längenkontraktion

Das Experiment von Hall und Rossi

Kommentar 1

Die spezielle Relativitätstheorie war für die Entwicklung der Quantenphysik von entscheidender Bedeutung und wurde von Anfang an angewendet.

1927 gelang Dirac mit seiner relativistischen Wellengleichung die nahezu vollständige Erklärung des Wasserstoffspektrums.

Selbst so ein einfaches System wie das Wasserstoffatom, das aus einem Proton und einem Elektron besteht, kann ohne die spezielle Relativitätstheorie in wesentlichen Aspekten nicht verstanden werden.

Aufgrund der enormen Bedeutung der speziellen Relativitätstheorie ist es vielleicht verwunderlich, dass erst 1941 der erste direkte Nachweis der Zeitdilatation bzw. Längenkontraktion durch Hall und Rossi gelang.

Das Experiment von Hall und Rossi

Kommentar 2

Hall und Rossi untersuchen in ihrem Experiment μ -Teilchen.

Das sind Elementarteilchen, die in der kosmischen Höhenstrahlung entstehen und erst 1936 entdeckt worden sind.

Ein μ -Teilchen ist nicht stabil und zerfällt mit einer Lebensdauer von rund $2 \mu\text{s}$ in ein Elektron sehr hoher Energie.

Zur Messung der Lebensdauer wird eine Anzahl von μ -Teilchen in einem Material gestoppt

Die Elektronen, die beim Zerfall der μ -Teilchen entstehen, verlassen mit hoher Geschwindigkeit das Material.

Das Experiment von Hall und Rossi

Kommentar 3

Aus der exponentiellen Abnahme der schnellen Elektronen kann die Lebensdauer der μ -Teilchen bestimmt werden.

Das Experiment von Hall und Rossi setzt voraus, dass die Anzahl und Geschwindigkeit der μ -Teilchen gemessen werden kann.

Das Experiment besteht darin, dass die Anzahl der μ -Teilchen mit einer bestimmten Geschwindigkeit sowohl auf einem hohen Berg als auch am Fuß des Berges gemessen wird.

Zur Veranschaulichung des Experiments kann man sich vorstellen, dass mit den μ -Teilchen eine Lichtuhr verknüpft ist und die Zahl der μ -Teilchen nach jedem Lichtdurchgang zwischen den Spiegeln um einen bestimmten Prozentsatz abgenommen hat.

Das Experiment von Hall und Rossi

Kommentar 4

Nun wird auf dem Berg eine bestimmte Anzahl von μ -Teilchen mit einer bestimmten Geschwindigkeit beobachtet.

Ebenso wird die gleiche Anzahl von ruhenden μ -Teilchen am Fuß des Berges beobachtet. An der Lichtuhr der bewegten μ -Teilchen im linken Teilbild erkennt man, dass nach der Flugzeit am Fuß des Berges mehr bewegte μ -Teilchen ankommen, als ruhende μ -Teilchen überdauert haben.

Das Licht in der Uhr der ruhenden μ -Teilchen kann während der Dauer des Experiments häufiger zwischen den beiden Spiegeln pendeln als bei der bewegten Lichtuhr.

Die Lebensdauer der bewegten μ -Teilchen (d.h. die Zeitkonstante für die exponentielle Abnahme der Teilchenzahl) hat sich aufgrund der Bewegung verlängert.

Das Experiment von Hall und Rossi

Kommentar 5

Das rechte Bild zeigt den Vorgang aus der Sicht eines μ -Teilchens.

Die Lichtuhr ruht in seinem Bezugssystem und der Berg bewegt sich mit hoher Geschwindigkeit an dem μ -Teilchen nach oben vorbei.

In diesem Fall verringert sich die Höhe des Berges aufgrund der Längenkontraktion.

Wieder kann das Licht zwischen den Spiegeln der Lichtuhr der μ -Teilchen aufgrund der kleineren Wegstrecke weniger häufig hin und her reflektiert werden.

Der Grund liegt nun nicht im verlängertem Lichtweg, wie bei den bewegten μ -Teilchen, sondern in der kürzten Zeit, welche der Vorbeiflug des kontrahierten Bergs benötigt.

Das Experiment von Hall und Rossi

Kommentar 6

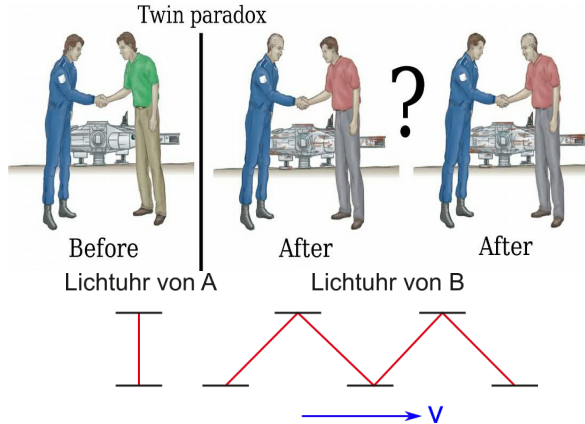
Wird die Geschwindigkeit der beobachteten μ -Teilchen im Experiment variiert, dann kann die Abhängigkeit der Zeitdilatation bzw. Längenkontraktion von der Geschwindigkeit gemessen werden.

Zwillingsparadoxon

Relativitätstheorie

- Michelson Morley Experiment
- Die Einsteinschen Postulate
- Lorentztransformation
- Zeitdilatation und Längenkontraktion
- Das Experiment von Hall und Rossi
- **Zwillingsparadoxon**
- „sichtbare Effekte“ der Lorentztransformation
- Der invariante Abstand
- Relativistische Invarianten
- Doppler-Effekt
- Relativistische Mechanik

Zwillingsparadoxon



Zwillingsparadoxon

Kommentar 1

Die obere Abbildung illustriert das Paradoxon.

Zwilling A bleibt auf der Erde und Zwilling B macht einen Trip ins All.

Aus der Sicht von A geht die Uhr von B langsamer.

Aus der Sicht von B geht die Uhr von A langsamer, so dass jeder vom anderen erwartet, dass der andere der Jüngere ist, wenn sie wieder zusammen kommen.

Der Zeitdilatationseffekt ist in der unteren Abbildung durch die Lichtuhren von Zwilling A und B illustriert.

Zwillingsparadoxon

Kommentar 2

Das Paradoxon unterstellt, dass die Situationen von A und B identisch sind.

Tatsächlich sind sie es aber nicht.

Während sich Zwilling A immer in ein und dem selben Inertialsystem befindet, muss Zwilling B notwendigerweise, wenn er zurückkommen möchte, das Inertialsystem mindestens einmal wechseln.

Während die Lichtuhr von A ununterbrochen durchlaufen kann, muss Zwilling B, die Uhr nach dem Wechsel des Inertialsystems neu starten.

Zwilling A kann zuverlässig das Altern von Zwilling B bestimmen, während Zwilling B seine Uhr jeweils neu justieren muss.

Zwillingsparadoxon

Kommentar 3

Die Zwillinge können jedoch während der gesamten Reise durch den Austausch von elektromagnetischen Wellen im Kontakt bleiben.

Vereinbaren sie, dass sie sich im Takt ihrer Uhren Signale schicken, dann können sie am Ende der Reise durch Abzählen der empfangenen Signale feststellen, wer weniger gealtert wird. Da die Lichtuhr von Zwilling B langsamer geht, wird Zwilling A weniger Signale von B empfangen, als Zwilling B von A.

Experimentell wurde der Effekt getestet, in dem eine Atomuhr mit einem Flugzeug um die Erde geflogen worden ist und die Zeit mit einer stationären Atomuhr am Boden verglichen worden ist (vgl. Hafele-Keating-Experiment 1971. Tatsächlich müssen bei dem Experiment auch Aspekte der allgemeinen Relativitätstheorie berücksichtigt werden, so dass das Experiment auch aus theoretischer Sicht nicht trivial ist.).

sichtbare Effekte

Relativitätstheorie

- Michelson Morley Experiment
- Lorentztransformation
- Die Einsteinschen Postulate
- Zeitdilatation und Längenkontraktion
- Das Experiment von Hall und Rossi
- Zwillingsparadoxon
- „sichtbare Effekte“ der Lorentztransformation
- Der invariante Abstand
- Relativistische Invarianten
- Doppler-Effekt
- Relativistische Mechanik

„sichtbare Effekte“ der Lorentztransformation

Kommentar

Dieser Abschnitt behandelt die „sichtbaren Effekte“ der Lorentztransformation.

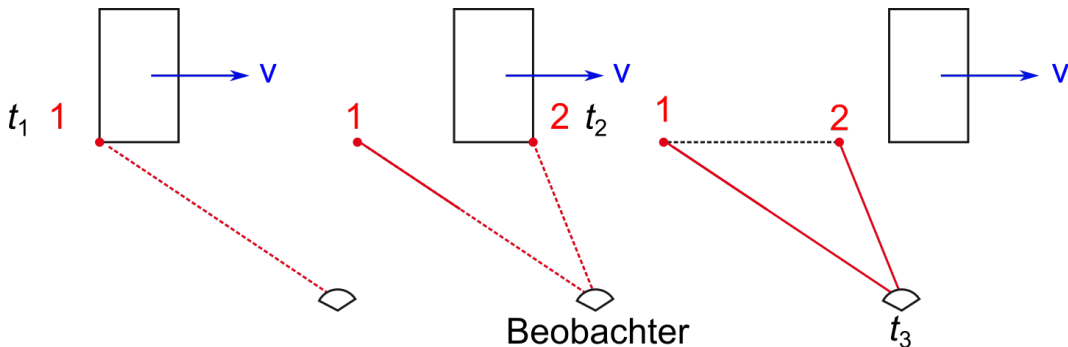
Damit meine ich geometrische Verzerrungen, die sich ergeben, wenn ein Beobachter ein schnell bewegtes Objekt mittels elektromagnetischer Wellen wahrnimmt.

Leider zeigt es sich, dass kugelförmige Objekte kugelförmig bleiben, so dass es bei Sternen oder Planeten, die sich tatsächlich mit sehr hohen Geschwindigkeiten bewegen können, keine geometrischen Verzerrungen gibt.

Allein der Doppler-Effekt, der etwas später in dieser Vorlesung besprochen wird, gibt dann Auskunft über die Geschwindigkeit.

„sichtbare Effekte“ der Lorentztransformation 1

a) Scheinbare Länge: Bewegung eines Würfels, der aufgrund der Längenkontraktion in Bewegungsrichtung für einen ruhenden Beobachter kontrahiert ist.



„sichtbare Effekte“ der Lorentztransformation 1

Kommentar 1

Die Skizze zeigt einen Würfel, der sich mit hoher Geschwindigkeit bewegt.

In Bewegungsrichtung ist der Würfel für den Beobachter aufgrund der Längenkontraktion verkürzt.

Damit der Beobachter z.B. die untere Kante wahrnehmen kann, müssen die beiden Lichtstrahlen von den Punkten 1 und 2 des Würfels gleichzeitig im Auge des Beobachters eintreffen.

Dadurch erscheint die Kante zwischen den Punkten 1 und 2 verlängert.

Befindet sich der Würfel genau dem Beobachter gegenüber, dann gibt es einen kurzen Moment, in dem er die kontrahierte Kante korrekt wahrnehmen kann.

„sichtbare Effekte“ der Lorentztransformation 1

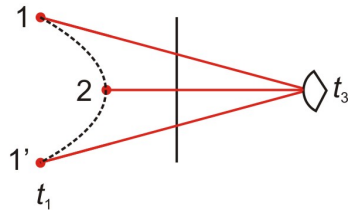
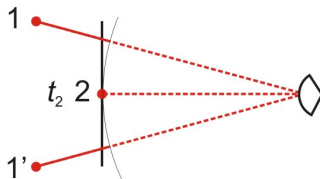
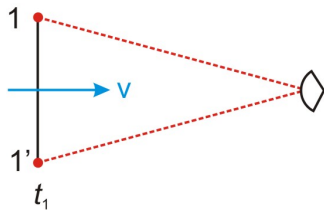
Kommentar 2

Entfernt sich der Würfel, dann muss zuerst der Lichtstrahl vom Punkt 2 und dann der vom Punkt 1 loslaufen, damit sie gemeinsam im Auge des Beobachters ankommen können.

Die Kante wird sich also scheinbar weiter verkürzen, wenn sich der Würfel entfernt.

„sichtbare Effekte“ der Lorentztransformation 2

b) Scheinbare Krümmung einer geraden Linie



„sichtbare Effekte“ der Lorentztransformation 2

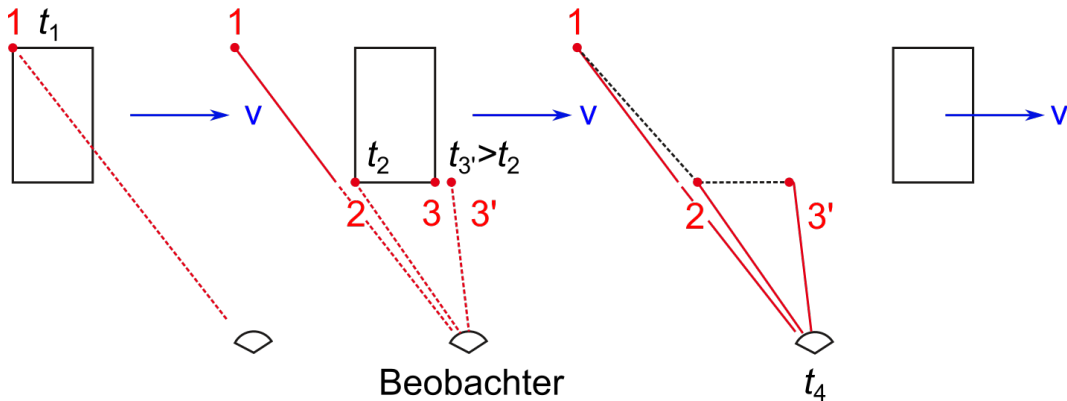
Kommentar

Bewegt sich ein gerader Stab auf einen Beobachter zu, dann müssen zuerst die Lichtstrahlen von den Endpunkten 1 und 1' abgehen und zu einem späteren Zeitpunkt ein Strahl aus der Mitte, damit sie sich gemeinsam im Auge des Beobachters treffen können.

Die Rekonstruktion ergibt ein gekrümmtes Bild des geraden Stabes.

„sichtbare Effekte“ der Lorentztransformation 3

c) Scheinbare Drehung



„sichtbare Effekte“ der Lorentztransformation 3

Kommentar 1

Die Skizze zeigt, dass aufgrund der Bewegung des Würfels auch Flächen sichtbar werden können, die üblicherweise verdeckt sind.

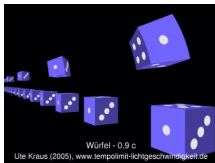
Der Strahl von Punkt 1 kann das Auge des Beobachters erreichen, wenn der Würfel sich schnell genug nach rechts bewegt und den Strahl nicht blockiert.

Neben der Dehnung der Kante zwischen den Punkten 2 und 3 erscheint der Würfel auch gekippt.

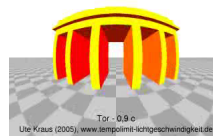
„sichtbare Effekte“ der Lorentztransformation 4



1. Video: [gitter.mp4](#)



3. Video: [wuerfelkette.mp4](#)



2. Video: [BrandenburgerTor.mp4](#)



4. Video: [tuebingen.mp4](#)
5. Video: [rundfahrttuebingen.mp4](#)

„sichtbare Effekte“ der Lorentztransformation 4

Kommentar 1

Die folgenden Animationen zeigen diese Effekte.

Das 1. Video zeigt ein Gitter, das dem Beobachter entgegen kommt.

Man erkennt die Dehnung und Krümmung der Linien des Gitters.

Das 2. Video zeigt ein Modell des Brandenburger Tors.

Es bewegt sich auf den Beobachter zu, obgleich man intuitiv den gegenteiligen Eindruck hat.

Man erkennt die Dehnung und Krümmung der Kanten und für einen kurzen Moment wird auch die eigentlich verdeckte Rückseite des Tors aufgrund der Bewegung sichtbar.

„sichtbare Effekte“ der Lorentztransformation 4

Kommentar 2

Das ist nur möglich, wenn sich das Tor schnell genug fortbewegt und dadurch den Weg der Lichtstrahlen zum Beobachter frei macht.

Das 3. Video zeigt den Effekt der scheinbaren Drehung durch den Vergleich zwischen ruhenden und bewegten Würfeln.

Der Eindruck einer Drehung entsteht, da die Strahlen, die von Würfel abgeschattet werden, nur nach und nach freigegeben werden.

Ist der Würfel weit entfernt, dann ist der Winkel, unter dem Strahlen der Seite mit den 4 Punkten den Beobachter erreichen können, sehr steil.

Die Strahlen werden durch den Würfel verdeckt.

„sichtbare Effekte“ der Lorentztransformation 4

Kommentar 3

Der Winkel, unter dem die Strahlen die Seite mit den 4 Punkten verlassen müssen, wird jedoch immer kleiner, je näher der Würfel dem Beobachter kommen.

Ab einem bestimmten Abstand werden die Strahlen der Rückseite nicht mehr verdeckt.

Stattdessen werden die Strahlen, die von der vorderen Seite mit den 3 Punkten ausgehen, verdeckt.

Da der Effekt vom Abstand der Würfels zum Beobachter abhängt, entsteht der Eindruck einer Drehung.

„sichtbare Effekte“ der Lorentztransformation 4

Kommentar 4

Das 4. und 5. Video zeigt jeweils eine relativistische Fahrt durch die Altstadt von Tübingen.

Die Änderung der Wellenlänge des Lichts aufgrund der Bewegung, d.h. den Doppler-Effekt, berücksichtigen die Animationen natürlich nicht.

Inv. Abstand

Relativitätstheorie

- Michelson Morley Experiment
- Lorentztransformation
- Die Einsteinschen Postulate
- Zeitdilatation und Längenkontraktion
- Das Experiment von Hall und Rossi
- Zwillingsparadoxon
- „sichtbare Effekte“ der Lorentztransformation
- **Der invariante Abstand**
- Relativistische Invarianten
- Doppler-Effekt
- Relativistische Mechanik

Der invariante Abstand 1

Der invariante Abstand s ist durch die folgende Gleichung definiert

$$s^2 = (ct)^2 - \vec{r}^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Mit der Lorentztransformation

$$x = \gamma(x' + \frac{v}{c}ct')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$ct = \gamma(ct' + \frac{v}{c}x')$$

ergibt sich für s^2

$$s^2 = \gamma^2(ct' + \frac{v}{c}x')^2 - \gamma^2(x' + vt')^2 - y'^2 - z'^2$$

Der invariante Abstand 1

Kommentar

Der invariante Abstand s ist eine abstrakte Größe.

Sie wird Abstand genannt, da sie die Dimension einer Länge hat.

Die erste rot umrandete Formel gibt die Definition des invarianten Abstands.

Der Abstand s wird invariant genannt, da er in allen Inertialsystemen unabhängig von deren Relativgeschwindigkeit den gleichen Zahlenwert hat.

Das kann man leicht einsehen, wenn die Lorentztransformation in die Formel für den invarianten Abstand eingesetzt wird.

Rechnet man die quadrierten Klammern aus, dann heben sich die gemischten Terme $2t'vx'$ gegenseitig auf.

Der invariante Abstand 2

Mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

ergibt sich

$$s^2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \left((ct')^2 + (v/c)^2 x'^2 - x'^2 - (vt')^2 \right) - y'^2 - z'^2$$

$$s^2 = (ct')^2 - \vec{r}'^2 = s'^2$$

Der Zahlenwert von s^2 ist unabhängig vom gewählten Inertialsystem

Der invariante Abstand 2

Kommentar

Mit dem Faktor γ^2 ergibt sich das gewünschte Ergebnis, wenn die markierten Terme zusammengefasst werden.

Der invariante Abstand ist unabhängig vom jeweiligen Inertialsystem.

Wesentlich für dieses Ergebnis ist, dass die Koordinaten ct und x gemäß der Lorentztransformation transformieren werden.

Diese Erkenntnis kann auf andere Größen übertragen werden, die Invarianten analog zum invarianten Abstand bilden können.

In den folgenden Abschnitten werden zwei wichtige Größen behandelt.

Zuerst die Frequenz und der Wellenzahlvektor und im letzten Abschnitt die Energie und der Impuls.

rel. Invarianten

Relativitätstheorie

- Michelson Morley Experiment
- Lorentztransformation
- Die Einsteinschen Postulate
- Zeitdilatation und Längenkontraktion
- Das Experiment von Hall und Rossi
- Zwillingsparadoxon
- „sichtbare Effekte“ der Lorentztransformation
- Der invariante Abstand
- Relativistische Invarianten
- Doppler-Effekt
- Relativistische Mechanik

Relativistische Invarianten 1

Für elektromagnetische Wellen gilt im Vakuum immer

$$\nu\lambda = c$$

oder

$$\omega = ck$$

oder

$$\omega^2 = c^2 \vec{k}^2$$

oder

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \vec{k}^2 = 0$$

$$(ct)^2 - \vec{r}^2 = s^2$$

Relativistischen Invarianten 1

Kommentar 1

Elektromagnetische Wellen breiten sich im Vakuum immer mit der Lichtgeschwindigkeit aus - unabhängig von der Geschwindigkeit des Beobachters.

Das ist eines der Einsteinschen Postulate.

Also gilt in allen Inertialsystemen die erste rot umrandete Formel $\nu\lambda = c$.

Mit etwas Umformung und für ebene Wellen ergibt sich die zweite rot umrandete Formel: $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \vec{k}^2 = 0$

Diese Formel hat die Gestalt des invarianten Abstands.

Relativistischen Invarianten 1

Kommentar 2

$c \cdot t$ entspricht ω/c und dem Ortsvektor $\vec{r}$ der Wellenzahlvektor der ebenen Welle $\vec{k}$.

Diese Formel kann nur dann unabhängig vom gewählten Inertialsystem sein, wenn $\frac{\omega}{c}$ sich wie $c \cdot t$ transformiert und der Wellenzahlvektor $\vec{k}$ wie der Ortsvektor $\vec{r}$.

Relativistische Invarianten 2

$\frac{\omega}{c}$ transformiert sich wie ct und $\vec{k}$ transformiert sich wie $\vec{r}$

$$x = \gamma(x' + \frac{v}{c}ct')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$ct = \gamma(ct' + \frac{v}{c}x')$$

$$k_x = \gamma(k_x' + \frac{v}{c^2}\omega')$$

$$k_y = k_y'$$

$$k_z = k_z'$$

$$\omega = \gamma(\omega' + vk_x')$$

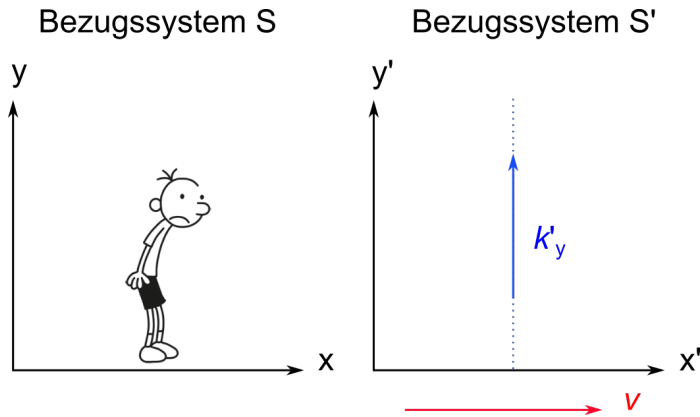
Relativistischen Invarianten 2

Kommentar

Damit kann man die Lorentztransformation für die Komponenten des Wellenzahlvektors und der Kreisfrequenz aufschreiben.

ct muss in der Transformationsgleichung durch $\frac{\omega}{c}$ ersetzt werden und der Ort x durch die x -Komponente k_x des Wellenzahlvektors, etc..

Relativistische Invarianten 3



$$k'_x = 0, \quad k'_y = \omega'/c, \quad k'_z = 0$$

Relativistischen Invarianten 3

Kommentar 1

Als Beispiel soll eine ebene Welle betrachtet werden, die sich im Bezugssystem S' entlang der y -Achse ausbreitet.

Die x - und die z -Komponente des Wellenzahlvektors sind Null

Die y -Komponente des Wellenzahlvektors ergibt sich, wenn die Kreisfrequenz durch die Lichtgeschwindigkeit geteilt wird.

Unter dem Bezugssystem S' kann man sich z.B. ein Michelson-Interferometer vorstellen, das sich relativ zum Beobachter im Bezugssystem S bewegt.

Relativistische Invarianten 4

Mit der Lorentztransformation

$$k_x = \gamma(k_x' + \frac{v}{c^2}\omega')$$

$$k_y = k_y'$$

$$k_z = k_z'$$

$$\omega = \gamma(\omega' + vk_x')$$

$$x = \gamma(x' + \frac{v}{c}ct')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$ct = \gamma(ct' + \frac{v}{c}x')$$

und $k_x' = 0$, $k_y' = \omega'/c$, $k_z' = 0$

$$k_x = \gamma \frac{v}{c^2} \omega' = \gamma \frac{v}{c} k_y'$$

$$k_y = k_y'$$

$$k_z = 0$$

$$\omega = \gamma \omega'$$

Relativistischen Invarianten 4

Kommentar

Mit der Lorentztransformation kann die Neigung des Wellenzahlvektors bezüglich der y-Achse im Bezugssystem S des Beobachters ausgerechnet werden.

Die ersten beiden folgenden Formeln geben die Transformation der x- und y-Komponente des Wellenzahlvektors.

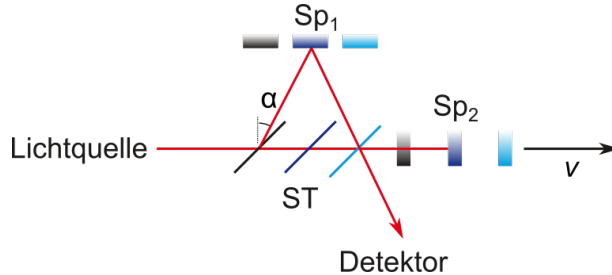
Die unterste Formel ergibt die Transformation der Frequenz.

Die Wellenfronten der ebenen Welle neigen sich aufgrund der relativen Bewegung.

Der Wellenzahlvektor hat nicht nur eine Komponente in y-Richtung, sondern es ergibt sich auch für die x-Komponente ein endlicher Wert.

Relativistische Invarianten 5

Beobachtung eines Michelson-Interferometers, das sich bewegt



Relativistischen Invarianten 5

Kommentar

Der Strahl zum Spiegel 1 neigt sich in Vorwärtsrichtung, so wie es bei der klassischen Betrachtung des Michelson-Interferometers angenommen worden ist.

Die Ursache für die Neigung ist nicht eine experimentelle Unvollkommenheit, die vorteilhaft ausgenutzt wird, sondern der Aberrationseffekt, der von James Bradley 1727 entdeckt worden ist.

Die Aberration von Licht aufgrund der Bewegung des Beobachters ergibt sich zwanglos aus der Lorentztransformation.

Relativistische Invarianten 6

Der Neigungswinkel bezüglich der y-Achse ist

$$\tan \alpha = \frac{k_x}{k_y} = \gamma \frac{v}{c} \quad \text{für} \quad v \ll c : \quad \boxed{\alpha = \frac{v}{c}}$$

Relativistischen Invarianten 6

Kommentar

Der Neigungswinkel bezüglich der y -Achse ist für kleine Geschwindigkeiten v durch das Verhältnis der Geschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit gegeben.

Das ist die Formel, mit der James Bradley die Aberration des Sternenlichts ausgewertet hat.

Revision

Revision

1

1. Der von Michelson erwartete Laufzeitunterschied zwischen den Lichtpulsen wird nicht beobachtet. Wie erklärt sich dieser Effekt mit der speziellen Relativitätstheorie von Einstein?
2. Was ist ein Inertialsystem?
3. Wie lautet die Galilei Transformation zwischen zwei Inertialsystemen, die sich relativ zueinander bewegen?
4. Erweitern Sie die Galilei Transformation zur Lorentz-Transformation. Welche Idee motiviert die Erweiterung?
5. Wie lautet die Lorentz Transformation zwischen zwei Inertialsystemen, die sich relativ zueinander bewegen?
6. Schreiben Sie die Formel für die Zeitdilatation auf und erklären Sie die Bedeutung der verwendeten Symbole.
7. Schreiben Sie die Formel für die Längenkontraktion auf und erklären Sie die Bedeutung der verwendeten Symbole.

Revision

2

8. Wie lautet die Definition des „invarianten Abstands“?
9. Wie ändert sich der invariante Abstand, wenn das Bezugssystem gewechselt wird?
10. Wieso ändert sich $\omega^2/c^2 - \vec{k}^2 = 0$ nicht, wenn das Bezugssystem gewechselt wird?
11. Schreiben Sie die Lorentz-Transformation für Frequenz und Wellenzahlvektor auf.
12. In der Animation zum Aberrationseffekt von Sternenlicht bewegt sich das Teleskop nach rechts und das Licht fällt von oben ein. Vergewissern Sie sich mit der Lorentz-Transformation, dass das Teleskop nach rechts geneigt werden muss.

Inhaltsverzeichnis

1. Vorlesung

- Eindimensionale Wellengleichung
- Reflexion und Transmission
- Stehende Wellen
- Dreidimensionale Wellen
- Schallwellen

2. Vorlesung

- Elektromagnetische Wellen
- Kohärenz
- Michelson Interferometer
- Interferenz an dünnen Schichten
- Beugung am Doppelspalt

Inhaltsverzeichnis

3. Vorlesung

- Beugung am Gitter
- Fabry-Perot Interferometer
- Beugung am Einzelspalt
- Bragg'sches Gesetz
- Laue Bedingung
- Michelson Morley Experiment