Klausurprüfung in Physik **Herbst 2023**

Maschinenbau (Klausur Wellen und Quantenphysik)

Liebe Studierende,

falls Sie ihre Klausur einsehen möchten, senden Sie mir bitte bis spätestens Freitag den 20. Oktober 2023 eine Email (Bernd.Pilawa@kit.edu) mit einer Kopie ihrer KIT-Karte. Ich sende ihnen dann einen pdf-Scan ihrer Klausur, so dass sie die Korrektur einsehen können. Auf Wunsch korrigiere ich ihre Klausur persönlich und lege dann die Endnote fest.

Mit freundlichen Grüßen,
Bernd Pilawa

1. Aufgabe (4 Punkte)

a) Schreiben Sie die Wellenfunktion einer harmonischen Welle auf und erläutern Sie die darin auftretenden Größen.

b) Zwei harmonische elektromagnetische Wellen mit der Amplitude $\vec{E}_0$ breiten sich entlang der x-Achse in gleicher Richtung mit der Frequenz $\nu_1 = 101$ MHz und $\nu_2 = 99$ MHz aus. Zu welchen Zeiten wird die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ am Ort $x = 0$ Null?

c) Die beiden Wellen breiten sich nun im Vakuum mit der Frequenz 100 MHz in entgegengesetzter Richtungen entlang der x-Achse aus. Wie variiert die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ am Ort $x = 0$ als Funktion der Zeit?

d) An welchen Orten entlang der x-Achse wird die Amplitude der elektrischen Feldstärke $\vec{E}(x)$ in Teilaufgabe c) maximal?

a) harmonische Welle

$$\psi(x,t) = \psi_0 \exp\{i(kx - \omega t)\}$$

Wellenzahl

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

λ bezeichnet die Wellenlänge und ω die Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

T bezeichnet die Periodendauer der lokalen Schwingung. Die Frequenz ist $\nu = 1/T$.

b) Überlagerung der Wellen

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \exp\{i(k_1 x - \omega_1 t)\} + \vec{E}_0 \exp\{i(k_2 x - \omega_2 t)\}$$

am Ort $x = 0$

$$\begin{aligned}
\vec{E}(x=0,t) =& \vec{E}_0 \exp\{-i\omega_1 t\} + \vec{E}_0 \exp\{-i\omega_2 t\} \\
=& \vec{E}_0 \exp\{-i(\omega_1 + \omega_2)t/2\}(\exp\{-i(\omega_1 - \omega_2)t/2\} + \exp\{+i(\omega_1 - \omega_2)t/2\}) \\
=& 2\vec{E}_0 \exp\{-i(\omega_1 + \omega_2)t/2\} \cos(\omega_1 - \omega_2)t/2).
\end{aligned}$$

Die elektrische Feldstärke verschwindet für

$$\frac{(\omega_1-\omega_2)t_n}{2}=\frac{\pi}{2}(2n-1)=\frac{2\pi(\nu_1-\nu_2)t_n}{2}\quad\rightarrow\quad t_n=\frac{2n-1}{2(\nu_1-\nu_2)}=\frac{2n-1}{4}\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s},$$

und $n=1,\,2$ etc., d.h. $t_1=0{,}25\,\mu\mathrm{s}$, $t_2=0{,}75\,\mu\mathrm{s}$, $t_3=1{,}25\,\mu\mathrm{s}$ ...

c) nun gilt $k=k_1=-k_2$ und $\omega=\omega_1=\omega_2$ und die Überlagerung der Wellen ist

$$\vec{E}(x,t)=\vec{E}_0\exp\{i(kx-\omega t)\}+\vec{E}_0\exp\{i(-kx-\omega t)\}$$

am Ort $x=0$ ist $\vec{E}(x=0,t)=2\vec{E}_0\exp\{-i\omega t\}$

d) mit

$$\begin{aligned}\vec{E}(x,t)&=\vec{E}_0\exp\{i(kx-\omega t)\}+\vec{E}_0\exp\{i(-kx-\omega t)\}\\&=\vec{E}_0\exp\{-i\omega t\}(\exp\{ikx\}+\exp\{-ikx\})\\&=2\vec{E}_0\exp\{-i\omega t\}\cos(kx)\end{aligned}$$

ist die Amplitude der elektrischen Feldstärke für

$$kx_n=n\pi\quad\text{und}\quad n=0,1,\,2\text{ etc.}$$

maximal, d.h.

$$x_n=\frac{n\lambda}{2}=n\frac{c}{2\nu}=n\frac{3\cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1}}{2\cdot 100\cdot 10^6\,\mathrm{s}^{-1}}=n\cdot 1{,}5\,\mathrm{m}$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

a) Ein Röntgenstrahl hat die Wellenlänge $\lambda = 5{,}5 \cdot 10^{-12}$ m. Welche Energie haben die Photonen des Röntgenstrahls?

b) Der Röntgenstrahl trifft senkrecht auf einen Doppelspalt. Der Abstand der Spalte beträgt von Mitte zu Mitte $d = 2$ µm. Unter welchen Winkeln zum zentralen Hauptmaximum werden die Maxima der Intensität beobachtet?

c) Die gebeugten Röntgenstrahlen werden auf einem Fluoreszenzschirm aufgefangen, der in einem Abstand von $\ell = 50$ cm nach dem Doppelspalt senkrecht zum Strahl aufgestellt ist. Welchen Abstand haben die Interferenzmaxima auf dem Schirm?

d) Skizzieren Sie die Intensität am Schirm als Funktion des Gangunterschieds $\Delta s = d \sin\alpha$, wenn die Spalte eine Breite von $b = 0{,}5$ µm haben.

Hinweis: Verwenden Sie die Näherung kleiner Winkel, d.h. $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$.

a) Energie der Photonen

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}\; 3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{ms}^{-1}}{5{,}5 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}} = 2{,}26 \cdot 10^{5}\,\mathrm{eV} = 226\,\mathrm{keV}$$

b) Bedingung für die Maxima der Intensität beim Doppelspalt

$$n\lambda = d \sin\alpha_n \quad \rightarrow \quad \sin\alpha_n \approx \alpha_n = n \cdot \frac{5{,}5 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}}{2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}} = n \cdot 2{,}75 \cdot 10^{-6}$$

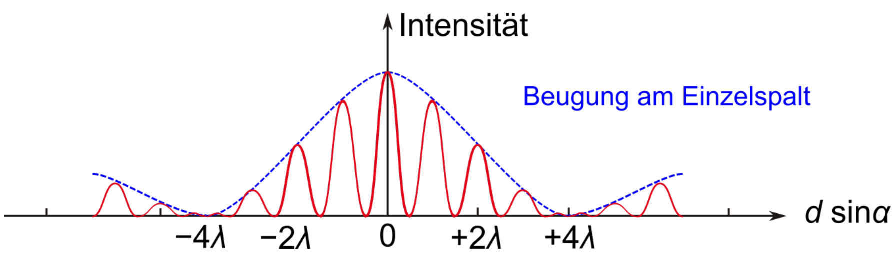
c) Lage der Maxima am Schirm Δ_n

$$\tan\alpha_n \approx \alpha_n = \frac{\Delta_n}{\ell}$$

Abstand der Maxima $\delta = \Delta_{n+1} - \Delta_n$ am Schirm ist

$$\delta = \Delta_{n+1} - \Delta_n = \ell(\alpha_{n+1} - \alpha_n) = 0{,}5\,\mathrm{m} \cdot 2{,}75 \cdot 10^{-6} = 1{,}375\,\mathrm{µm}.$$

d) Mit $d = 4 \cdot b$ fällt jedes vierte Maximum beim Doppelspalt auf ein Minimum des Einzelspalts



3. Aufgabe (4 Punkte)

a) Wie lautet die Gleichung der de Broglie-Wellenlänge?
b) Ein Elektronenstrahl soll eine Wellenlänge von $\lambda = 10^{-11}$ m haben. Mit welcher Spannung müssen die Elektronen hierzu aus der Ruhe beschleunigt werden? Berechnen Sie dazu den Impuls der Elektronen und begründen Sie, ob die Beschleunigungsspannung mit den Formeln der klassischen Mechanik berechnet werden darf.
c) Schreiben Sie den relativistischen Energie-Impuls-Zusammenhang für ein Teilchen auf, das sich kräftefrei bewegt, und geben Sie die Gleichung für die kinetische Energie eines relativistischen Teilchens an.
d) Mit welcher Spannung müssen Elektronen aus der Ruhe beschleunigt werden, wenn der Elektronenstrahl eine Wellenlänge von $\lambda = 10^{-17}$ m haben soll?

a) Die de Broglie-Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Dabei bezeichnet p den Impuls der Teilchen.

b) Bei einer Wellenlänge von $\lambda = 10^{-11}$ m ist der Impuls

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\text{eVs}}{10^{-11}\,\text{m}} = 4{,}14 \cdot 10^{-4}\,\text{eVsm}^{-1}$$

Die kinetische Energie ist gemäß der Newtonschen Mechanik

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{p^2c^2}{2m_0c^2}$$

Im Nenner steht nun die Ruhemasse bzw. Ruheenergie des Elektrons und es ergibt sich

$$E_{\text{kin}} = \frac{(4{,}14 \cdot 10^{-4}\,\text{eVsm}^{-1}\,3 \cdot 10^8\,\text{ms}^{-1})^2}{2 \cdot 511 \cdot 10^3\,\text{eV}} = 15{,}1\,\text{keV} << m_0c^2$$

Da die kinetische Energie sehr viel kleiner als die Ruheenergie des Elektrons ist, kann klassisch gerechnet werden und die Beschleunigungsspannung ist

$$eU = E_{\text{kin}} \quad \rightarrow \quad U = \frac{E_{\text{kin}}}{e} = 15{,}1\,\text{kV}$$

c) Der relativistische Energie-Impuls-Zusammenhang für ein Teilchen auf das keine Kräfte wirken ist

$$E^2 - c^2p^2 = m_0^2c^4$$

Die kinetische Energie des Teilchens ist

$$E_{\text{kin}} = E - m_0c^2$$

d) Bei einer Wellenlänge von $\lambda = 10^{-17}$ m ist der Impuls

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}}{10^{-17}\,\mathrm{m}} = 414\,\mathrm{eVsm}^{-1}$$

und

$$cp = 414\,\mathrm{eVsm}^{-1}\,3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{ms}^{-1} = 1242 \cdot 10^{8}\,\mathrm{eV} >> 511\,\mathrm{keV}$$

d.h. die Ruheenergie des Elektrons kann vernachlässigt werden, so dass gilt

$$E_{\mathrm{kin}} = E = cp$$

Die Beschleunigungsspannung ist dann

$$U = \frac{E}{e} = \frac{cp}{e} = 124\,\mathrm{GV}$$

4. Aufgabe (4 Punkte)

a) Nennen Sie die drei Bohrschen Postulate.
b) Berechnen Sie den Radius r_n der n-ten Bohrschen Bahn und die Geschwindigkeit v_n eines Elektrons auf dieser Bahn. Setzen Sie Zahlen in die Formeln ein und berechnen Sie die Zahlenwerte von r_n und v_n.
c) Berechnen Sie die Gesamtenergie eines Elektrons auf der n-ten Bohrschen Bahn.

a) Die drei Bohrschen Postulate sind
   1. Die Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen um den Atomkern
   2. Der Bahndrehimpuls der Elektronen ist gemäß der Formel $L = \hbar n$ quantisiert
   3. Nur beim Übergang von der n-ten zur m-ten Bohrschen Bahn wird ein Photon der Energie $|E_n - E_m|$ emittiert bzw. absorbiert
b) Aus dem Kräftegleichgewicht von Coulomb-Kraft und Zentrifugalkraft folgt mit dem 2. Postulat (d.h. $m_0 vr = \hbar n$) der Radius der Bohrschen Bahn

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = \frac{m_0 v^2}{r} \quad \rightarrow \quad r = 4\pi\varepsilon_0 \frac{m_0 v^2 r^2}{e^2} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{m_0^2 v^2 r^2}{m_0 e^2}$$

also

$$\begin{aligned} r_n =& 4\pi\,\varepsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_0 e^2} n^2 \\ =& 4\pi\, 8{,}86 \cdot 10^{-12} \mathrm{As/Vm} \frac{(0{,}66 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs})^2}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\, e^2} n^2 \\ =& 5{,}33 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}\, n^2 \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit ist mit $L_n = n\hbar = r_n \cdot m_0 v_n$

$$v_n = \frac{\hbar n}{m_0 r_n} = \frac{\hbar c^2}{m_0 c^2 r_n} n = \frac{0{,}66 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}\,(3 \cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1})^2}{511 \cdot 10^3\,\mathrm{eV}\, 5{,}33 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}} \frac{1}{n} = 2{,}1 \cdot 10^6\,\mathrm{ms}^{-1} \frac{1}{n}$$

c) Die Gesamtenergie ist

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$$

Die potentielle Energie eines Elektrons im Feld der Elementarladung des Protons ist

$$E_{\text{pot}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

Aus dem Kräftegleichgewicht von Coulomb-Kraft und Zentrifugalkraft folgt

$$2E_{\text{kin}} = -E_{\text{pot}}$$

d.h.

$$E = \frac{1}{2} E_{\text{pot}}$$

und

$$
\begin{aligned}
E_n &= -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} \\
&= -\frac{1}{8\pi\, 8{,}86\cdot 10^{-12}\,\mathrm{AsV^{-1}m^{-1}}}\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}\cdot e}{5{,}33\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}}\frac{1}{n^2} \\
&= -13{,}5\,\mathrm{eV}\frac{1}{n^2}
\end{aligned}
$$

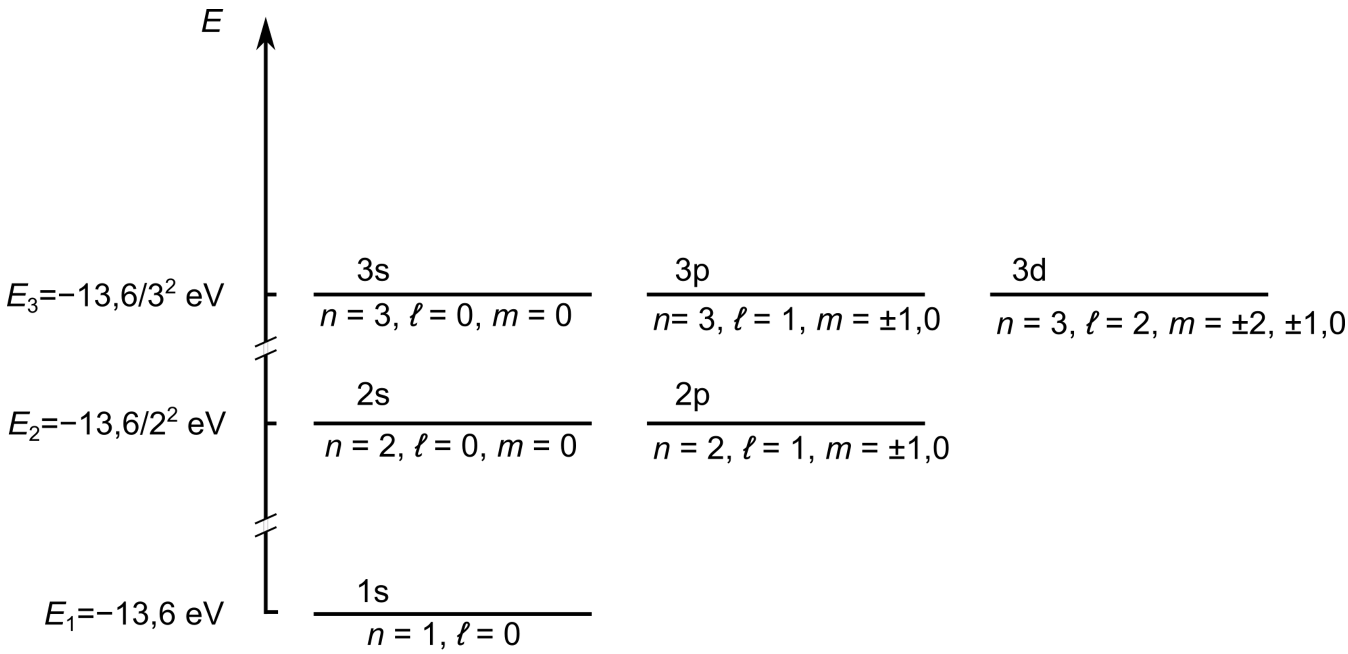
5. Aufgabe (4 Punkte)

a) Skizzieren Sie das Energieniveauschema des Wasserstoffatoms für die Hauptquantenzahlen $n = 1, 2$ und 3, das sich mit der Schrödingergleichung ergibt, wenn keine relativistischen Effekte berücksichtigt werden. Geben Sie für jedes Energieniveau die Energie, die Hauptquantenzahl n und die Drehimpulsquantenzahlen ℓ und m an. Geben Sie jeweils auch die spektroskopische Notation für jedes Energieniveau an.

b) Die Kernladungszahl von Natrium ist $Z = 11$. Schreiben Sie für das neutrale Natriumatom die Elektronenkonfiguration im Grundzustand auf.

c) Die Natrium D-Linie hat eine Wellenlänge von rund 589 nm und kann dem Übergang vom 1. angeregten Zustand in den Grundzustand zugeordnet werden. Begründen Sie, weshalb die Natrium D-Linie in zwei Komponenten aufgespalten ist und schreiben Sie die Übergänge mit der spektroskopischen Notation der atomaren Energieniveaus auf.

a) Energieniveauschema des Wasserstoffatoms ohne relativistische Effekte



b) Die Elektronenkonfiguation im Grundzustand ist $[1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^1]$.

c) Das angeregte Energieniveau ist 3p und spaltet aufgrund der Spin-Bahnkopplung in ein Niveau mit dem Gesamtdrehimpuls $j = 1/2$ und ein Niveau mit dem Gesamtdrehimpuls $j = 3/2$.
Die Übergänge sind

$$3p_{3/2} \rightarrow 3s_{1/2}$$
$$3p_{1/2} \rightarrow 3s_{1/2}$$

6. Aufgabe (4 Punkte)

a) Schreiben Sie die Gleichung für den Bahndrehimpuls in der Newtonschen Mechanik und den Bahndrehimpulsoperator der Quantenphysik auf.
b) Wie lauten die Eigenwertgleichungen für den Bahndrehimpuls? Geben Sie die Wertebereiche der Bahndrehimpulsquantenzahlen an.
c) Begründen Sie, weshalb es in der Quantenphysik nur für eine Komponente des Drehimpulsoperators eine Eigenwertgleichung gibt.
d) Schreiben Sie den Spinoperator des Elektrons auf und geben Sie die Quantenzahlen an, die den Spin des Elektrons beschreiben.

a) Der Drehimpuls $\vec{L}$ in der Newtonschen Mechanik ist

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Dabei bezeichnet $\vec{r}$ den Ortsvektor des Teilchens und $\vec{p}$ seinen Impuls. Der Drehimpulsoperator ergibt sich, wenn der Impuls durch den Impulsoperator, d.h. $\vec{p} \to -\mathrm{i}\hbar\nabla$ ersetzt wird.

$$\hat{\vec{L}} = -\mathrm{i}\hbar\vec{r} \times \nabla$$

b) Die Eigenwertgleichungen für den Bahndrehimpuls sind

$$\begin{aligned}\hat{\vec{L}}^2 y_{\ell,m} &= \ell(\ell+1)\hbar^2 y_{\ell,m}\\ \hat{\vec{L}}_z y_{\ell,m} &= m\hbar y_{\ell,m}\end{aligned}$$

Die Wertebereiche für die Quantenzahlen sind $\ell = 0,\ 1,\ 2, ...$ und $m = 0,\ \pm1,\ \pm2, ...$ mit $|m| \leq \ell$.

c) Aufgrund der Unschärferelation $\Delta L_z \Delta\varphi \geq \hbar/2$ ist der Winkel φ unbestimmt, wenn der z-Komponente von L ein fester Wert zugeordnet wird. φ bestimmt die Komponenten L_x und L_y, d.h. die Projektion von $\vec{L}$ auf die x- bzw. y-Achse. Kann φ nicht festgelegt werden, dann können auch die L_x und L_y-Komponenten nicht mehr bestimmt werden.

d) Der Spinoperator des Elektrons ist

$$\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{pmatrix}$$

$\sigma_{x,y,z}$ bezeichnen die Paulimatrizen zur Vollständigkeit, aber nicht gefordert

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Die Quantenzahlen des Elektronenspins sind $s = 1/2$ und $m_s = \pm 1/2$.

7. Aufgabe (4 Punkte)

a) Sowohl der Bahndrehimpuls als auch der Spin ist mit einem magnetischen Moment verbunden. Schreiben Sie Gleichungen für die magnetischen Momente von Bahndrehimpuls $\vec{\mu}_L$ und Spin $\vec{\mu}_S$ auf.

b) Spin und Bahndrehimpuls addieren sich zum Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$. Die magnetischen Momente addieren sich zum gesamten magnetischen Moment $\vec{\mu} = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S$. Das effektive magnetische Moment ergibt sich aus der Projektion von $\vec{\mu}$ auf die Richtung von $\vec{J}$, d.h. $\mu_{\text{eff}} = \vec{\mu} \cdot \vec{J}/|\vec{J}|$. Berechnen Sie μ_{eff}.

c) Drücken Sie das effektive magnetische Moment $\vec{\mu}_{\text{eff}} = \mu_{\text{eff}}\vec{J}/|\vec{J}|$ durch die Eigenwerte von $\vec{J}^2$, $\vec{L}^2$ und $\vec{S}^2$ aus.

a) Das magnetische Moment des Bahndrehimpulses

$$\vec{\mu}_L = -\mu_{\text{B}}\frac{\vec{L}}{\hbar}$$

Das magnetische Moment des Elektronenspins

$$\vec{\mu}_S = -g\mu_{\text{B}}\frac{\vec{S}}{\hbar}$$

mit $g = 2$ in sehr guter Näherung

b) Die Projektion des magnetischen Moments auf die Richtung von $\vec{J}$ ist

$$\mu_{\text{eff}} = \vec{\mu} \cdot \vec{J}/|\vec{J}| = -\frac{\mu_{\text{B}}}{\hbar}\frac{(\vec{L} + 2\vec{S})(\vec{L} + \vec{S})}{|\vec{J}|} = -\frac{\mu_{\text{B}}}{\hbar}\frac{(\vec{L}^2 + 3\vec{S}\vec{L} + 2\vec{S}^2)}{|\vec{J}|}$$

c) Für das effektive magnetische Moment ergibt sich

$$\vec{\mu}_{\text{eff}} = \mu_{\text{eff}}\frac{\vec{J}}{|\vec{J}|} = -\frac{\mu_{\text{B}}}{\hbar}\frac{(\vec{L}^2 + 3\vec{S}\vec{L} + 2\vec{S}^2)}{|\vec{J}|}\frac{\vec{J}}{|\vec{J}|} = -\mu_{\text{B}}\frac{(\vec{L}^2 + 3\vec{S}\vec{L} + 2\vec{S}^2)}{\vec{J}^2}\frac{\vec{J}}{\hbar}$$

mit

$$\vec{J}^2 = (\vec{L} + \vec{S})^2 = \vec{L}^2 + 2\vec{S}\vec{L} + \vec{S}^2 \quad \rightarrow \quad \vec{S}\vec{L} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2)$$

$$\vec{\mu}_{\text{eff}} = -\mu_{\text{B}}\frac{(\vec{L}^2 + 3\vec{S}\vec{L} + 2\vec{S}^2)}{\vec{J}^2}\frac{\vec{J}}{\hbar} = -\mu_{\text{B}}\frac{(\frac{3}{2}\vec{J}^2 - \frac{1}{2}\vec{L}^2 + \frac{1}{2}\vec{S}^2)}{\vec{J}^2}\frac{\vec{J}}{\hbar}$$

mit den Eigenwerten von $\vec{J}^2$: $\hbar^2 J(J+1)$, $\vec{L}^2$: $\hbar^2 L(L+1)$ und $\vec{S}^2$: $\hbar^2 S(S+1)$ ergibt sich

$$\vec{\mu}_{\text{eff}} = -\mu_{\text{B}}\frac{(3J(J+1) - L(L+1) + S(S+1))}{2J(J+1)}\frac{\vec{J}}{\hbar}$$

8. Aufgabe (4 Punkte)

Elektronen befinden sich in einem unendlich tiefen würfelförmigen Potentialtopf. Die potentielle Energie innerhalb des Würfels ist Null und außerhalb unendlich groß. Innerhalb des Würfels bilden sich stehende Elektronenwellen aus, die mit den Wellenfunktionen $\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 \sin(k_\mathrm{x} x) \sin(k_\mathrm{y} y) \sin(k_\mathrm{z} z) \exp(-\mathrm{i}Et/\hbar)$ beschrieben werden.

a) Welche Zahlenwerte können die Wellenzahlen k_x, k_y und k_z annehmen, wenn die Kantenlänge des Potentialtopfes $L = 1$ mm beträgt?

b) Berechnen Sie die Energie der Elektronenwellen, wenn in der Schrödingergleichung nur die kinetische Energie der Elektronen berücksichtigt werden muss.

c) Was besagt das Pauli-Prinzip?

d) Welche größte Energie können die Elektronen im Grundzustand haben, wenn sich $N = 10^{20}$ Elektronen im Potentialtopf befinden?

a) Da die Wellenfunktionen auf den Würfelflächen den Wert Null haben, muß für die Wellenzahlen gelten

$$k_\mathrm{x} L = n_\mathrm{x}\pi, \quad k_\mathrm{y} L = n_\mathrm{y}\pi, \quad \text{und} \quad k_\mathrm{z} L = n_\mathrm{z}\pi$$

$n_\mathrm{x}, n_\mathrm{y}$ und n_z sind natürlich Zahlen, d.h. 1, 2, 3, etc.

$$\begin{pmatrix} k_\mathrm{x} \\ k_\mathrm{y} \\ k_\mathrm{z} \end{pmatrix} = \frac{\pi}{L} \begin{pmatrix} n_\mathrm{x} \\ n_\mathrm{y} \\ n_\mathrm{x} \end{pmatrix} = 1000\,\pi \begin{pmatrix} n_\mathrm{x} \\ n_\mathrm{y} \\ n_\mathrm{x} \end{pmatrix} \ \mathrm{m}^{-1}$$

b) Die Energie der Elektronenwellen ergibt sich mit der Schrödingergleichung

$$\begin{aligned} E_{n_\mathrm{x},n_\mathrm{y},n_\mathrm{z}} \psi_{n_\mathrm{x},n_\mathrm{y},n_\mathrm{z}}(\vec{r}, t) &= -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_0} \psi_{n_\mathrm{x},n_\mathrm{y},n_\mathrm{z}}(\vec{r}, t) \\ &= -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_0} \psi_0 \sin(k_\mathrm{x} x) \sin(k_\mathrm{y} y) \sin(k_\mathrm{z} z) \exp(-\mathrm{i}Et/\hbar) \\ &= \frac{\hbar^2 (k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{y}^2 + k_\mathrm{z}^2)}{2m_0} \psi_{n_\mathrm{x},n_\mathrm{y},n_\mathrm{z}}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} E_{n_\mathrm{x},n_\mathrm{y},n_\mathrm{z}} &= \frac{\hbar^2\, \pi^2\, 10^6\,\mathrm{m}^{-2}}{2m_0} (n_\mathrm{x}^2 + n_\mathrm{y}^2 + n_\mathrm{z}^2) = \frac{h^2\, 10^6\,\mathrm{m}^{-2}\, c^2}{8 m_0 c^2} (n_\mathrm{x}^2 + n_\mathrm{y}^2 + n_\mathrm{z}^2) \\ &= \frac{(4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs})^2\, 10^6\,\mathrm{m}^{-2} (3 \cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1})^2}{8 \cdot 511 \cdot 10^3\,\mathrm{eV}} (n_\mathrm{x}^2 + n_\mathrm{y}^2 + n_\mathrm{z}^2) \\ &= 3{,}8 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{eV} (n_\mathrm{x}^2 + n_\mathrm{y}^2 + n_\mathrm{z}^2) \end{aligned}$$

c) Das Pauli Prinzips besagt, dass zwei Elektronen in einem Quantensystem nicht in allen Quantenzahlen übereinstimmen können.

d) Im Wellenzahlraum können im 1. Oktanten (d.h. positive k-Werte) k-Zustände bis zu einer höchsten Energie besetzt werden. Gemäß dem Pauli-Prinzip kann jeder k-Zustand mit 2 Elektronen besetzt werden. Der Betrag der größten besetzten k-Zustände wird Fermi-Wellenzahl k_F genannt. Das Volumen eines k-Zustands ist für die stehenden Wellen $(\pi/L)^3$. Mit dem Volumen einer Kugel im Wellenzahlraum $4\pi k^3/3$ ergibt sich

$$N = 2\frac{4\pi k_\mathrm{F}^3/3}{8(\pi/L)^3} \quad \rightarrow \quad k_\mathrm{F}^3 = 3\pi^2 \frac{N}{L^3} = 3\pi^2\, 10^{20} \cdot 10^9\,\mathrm{m}^{-3}$$

also

$$k_\mathrm{F} = 1{,}44 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}^{-1}$$

Die größte Energie, d.h. Fermi-Energie ist damit

$$\begin{aligned} E_\mathrm{F} = \frac{\hbar^2 k_\mathrm{F}^2\, c^2}{2m_0c^2} &= \frac{(0{,}66 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs})^2\,(1{,}44 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}^{-1})^2 \cdot (3 \cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1})^2}{2 \cdot 511 \cdot 10^3\,\mathrm{eV}} \\ &= 7{,}95\,\mathrm{eV} \end{aligned}$$