Dieses Dokument enthält im ersten Teil die Fragen zu den Vorlesungen und verweist auf die entsprechenden Klausuraufgaben. Der zweite Teil enthält die Klausuren mit den Lösungsvorschlägen.

Ich hoffe, dass diese Zusammenstellung bei der Vorbereitung der Klausur hilfreich ist.

Bitte melden Sie sich rechtzeitig zur Klausur an und verpassen Sie die „Deadline" nicht. Beachten Sie, dass ich Sie nach der gesetzten Frist nicht mehr zur Klausur zulassen kann.

Fragen zur 1. Vorlesung:

1. Schreiben Sie die Wellenfunktion für eine allgemeine eindimensionale Welle auf.
2. Schreiben Sie die Wellengleichung für eine eindimensionale Welle auf.
3. Schreiben Sie die Wellenfunktion für eine eindimensional harmonische Welle auf.
4. Schreiben Sie die Formeln für die Wellenzahl und Kreisfrequenz auf.
5. Schreiben Sie die Formel für die Geschwindigkeit einer Seilwelle auf.
6. Schreiben Sie die Formeln für den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten der Amplitude auf.
7. Geben sie den Reflexionskoeffizienten bei einer idealen Reflexion für den Fall an, dass das Seil am Ende fest an einer Wand befestigt ist bzw. am Ende frei schwingen kann.
8. Was ist eine stehende Welle und wann entstehen sie?
9. In welchen Abständen treten die Knoten (Stellen mit Amplitude Null) vom Punkt der Reflexion auf?
10. Wie lautet die Formel für die Geschwindigkeit einer Schallwelle?
11. Eine Schallwelle läuft ein Rohr entlang, das am Ende geschlossen ist. Welchen Wert hat im Idealfall der Reflexionskoeffizient für den Schalldruck bzw. für die Auslenkung?
12. Schreiben Sie die Phase einer ebenen Welle auf.
13. Wie ist der Wellenzahlvektor bezüglich der Ebenen konstanter Phase orientiert?
14. Wie ändert sich die Phase, wenn man in Richtung des Wellenzahlvektors um eine Wellenlänge λ voranschreitet?

Klausuraufgaben

- Herbst 2018: Aufgabe 1) und 2) (Seite: 156 und 158)
- Herbst 2019: Aufgabe 1) (Seite: 125)
- Herbst 2020: Aufgabe 1) (Seite: 95)
- Frühjahr 2019: Aufgabe 1) und 2) (Seite: 140 und 142)
- Frühjahr 2020: Aufgabe 1) (Seite: 111)
- Frühjahr 2021: Aufgabe 1) (Seite: 83)
- Frühjahr 2022: Aufgabe 1) (Seite: 56)

Fragen zur 2. Vorlesung:

1. Schreiben Sie die Wellengleichungen einer dreidimensionalen elektromagnetischen Welle auf.
2. Geben Sie näherungsweise den Wert der Lichtgeschwindigkeit an.
3. In welchem Frequenzbereich kann das menschliche Auge elektromagnetische Wellen wahrnehmen?
4. Was ist die Kohärenzlänge?
5. Wann nennt man Licht kohärent?
6. Skizzieren Sie ein Michelson-Interferometer und schreiben Sie die Bedingung für konstruktive Interferenz auf.
7. Schreiben Sie die Interferenzbedingung für konstruktive Interferenz bei einem dünnen Film in Luft und senkrechtem Lichteinfall auf.
8. Wie lautet der Reflexionskoeffizient für das elektrischen Feld bei senkrechtem Lichteinfall auf eine dielektrische Grenzfläche?
9. Was ist die Fraunhofersche Beobachtungsart?
10. Wie lautet die Interferenzbedingung für konstruktive Interferenz bei einem Doppelspalt?
11. Skizzieren Sie den Verlauf der Intensität nach einem Doppelspalt als Funktion des Gangunterschieds der Strahlen.

Klausuraufgaben

- Herbst 2018: Aufgabe 3c) (Seite: 160)
- Herbst 2019: Aufgabe 2) und 3) (Seite: 126 und 128)
- Herbst 2020: Aufgabe 2) (Seite: 97)
- Herbst 2021: Aufgabe 1) und 2) (Seite: 71 und 73)
- Frühjahr 2019: Aufgabe 3) (Seite: 143)
- Frühjahr 2021: Aufgabe 2a)-c) (Seite: 84)

Fragen zur 3. Vorlesung:

1. Wie lautet die Bedingung für destruktive Interferenz bei einem Gitter mit N Spalten?
2. Wie lautet die Interferenzbedingung für die Hauptmaxima bei einem Gitter mit N Spalten?
3. Skizzieren Sie den Verlauf der Intensität nach einem Gitter mit 5 Spalten als Funktion des Gangunterschieds benachbarter Teilstrahlen.
4. Weshalb hängt das Auflösungsvermögen von der Beugungsordnung ab?
5. Wie groß ist das maximale spektrale Auflösungsvermögen $\lambda/\Delta\lambda$ bei einem Gitter mit N Spalten in der 2. Ordnung?
6. Skizzieren Sie ein Fabry-Perot Interferometer.
7. Von was hängt das Auflösungsvermögen des Fabry-Perot Interferometers ab?
8. Skizzieren Sie das Interferenzmuster nach einem Fabry-Perot Interferometer, wenn es mit einer monochromatischen Lichtwelle beleuchtet wird.
9. Skizzieren Sie die Intensität nach einem Einzelspalt als Funktion des Gangunterschieds der Randstrahlen.
10. Skizzieren Sie die Intensität nach einem Gitter mit 4 Spalten als Funktion des Gangunterschieds benachbarter Strahlen, wenn die Spaltöffnungen ein Viertel des Spaltabstands betragen.
11. Wie lautet die Braggsche Bedingung für konstruktive Interferenz bei der Beugung von Röntgenstrahlen?
12. Wie lautet die Laue-Bedingung für konstruktive Interferenz bei der Beugung von Röntgenstrahlen?
13. Zeigen Sie anhand einer Skizze den Zusammenhang der Braggschen Bedingung und der Laue-Bedingung auf.
14. Durch welche Bedingung definiert Laue das reziproke Gitter?
15. Schreiben Sie die Formeln auf, mit denen die Basisvektoren des reziproken Gitters aus den Vektoren der primitiven Elementarzelle $\vec{a}_{i=1,2,3}$ berechnet werden.
16. Schreiben Sie die Formeln auf, mit denen die Vektoren der primitiven Elementarzelle aus den Basisvektoren des reziproken Gitters berechnet werden.
    (Hinweis: $\vec{b}_1(\vec{b}_2 \times \vec{b}_3) = (2\pi)^3/V_{\text{EZ}}$)
17. Skizzieren Sie ein Michelson-Interferometer.
18. Welche Zeit benötigt ein Lichtpuls vom Strahlteiler zum vorderen Spiegel und zurück, wenn sich das Interferometer in Strahlrichtung bewegt?

19. Welche Zeit benötigt ein Lichtpuls vom Strahlteiler zum oberen Spiegel?

Klausuraufgaben

- Herbst 2018: Aufgabe 3) (Seite: 160)
- Herbst 2019: Aufgabe 4c) (Seite: 129)
- Herbst 2020: Aufgabe 3) (Seite: 99)
- Frühjahr 2020: Aufgabe 2) und 3) (Seite: 113 und 115)
- Frühjahr 2021: Aufgabe 2) (Seite: 84)
- Frühjahr 2022: Aufgabe 2) (Seite: 57)

Fragen zur 4. Vorlesung:

1. Der von Michelson erwartete Laufzeitunterschied zwischen den Lichtpulsen wird nicht beobachtet. Wie erklärt sich dieser Effekt mit der speziellen Relativitätstheorie von Einstein?

2. Was ist ein Inertialsystem?

3. Wie lautet die Galilei-Transformation zwischen zwei Bezugssystemen?

4. Erweitern Sie die Galilei-Transformation zur Lorentz-Transformation. Welche Idee motiviert die Erweiterung?

5. Wie lautet die Lorentz Transformation zwischen zwei Inertialsystemen, die sich relativ zueinander bewegen?

6. Schreiben Sie die Formel für die Zeitdilatation auf und erklären Sie die Bedeutung der verwendeten Symbole.

7. Schreiben Sie die Formel für die Längenkontraktion auf und erklären Sie die Bedeutung der verwendeten Symbole.

8. Wie lautet die Definition des „invarianten Abstands“?

9. Wie ändert sich der invariante Abstand, wenn das Bezugssystem gewechselt wird?

10. Wieso ändert sich $\omega^2/c^2 - \vec{k}^{\,2} = 0$ nicht, wenn das Bezugssystem gewechselt wird?

11. Schreiben Sie die Lorentz-Transformation für Frequenz und Wellenzahlvektor auf.

12. In der Animation zum Aberrationseffekt von Sternenlicht bewegt sich das Teleskop nach rechts und das Licht fällt von oben ein. Vergewissern Sie sich mit der Lorentz-Transformation, dass das Teleskop nach rechts geneigt werden muss.

Klausuraufgaben

- Herbst 2018: Aufgabe 4) (Seite: 162)
- Frühjahr 2019: Aufgabe 4) (Seite: 145)

Fragen zur 5. Vorlesung:

1. Scheiben Sie für die Frequenz die Formel für den longitudinalen Doppler-Effekt auf.
2. Schreiben Sie für den Fall $v << c$ die Formel für den Doppler-Effekt der Frequenz auf, wenn sich die Quelle mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ unter einem Winkel θ relativ zur Beobachtungsrichtung bewegt.
3. Schreiben Sie die Formel für die Ruheenergie eines Teilchens auf.
4. Schreiben Sie die Formel für die Energie eine relativistischen Teilchens auf, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt.
5. Scheiben Sie die Formel für den Impuls eines relativistischen Teilchens auf.
6. Schreiben Sie den Zusammenhang von Energie und Impuls für ein relativistisches Teilchen auf.
7. Wie lautet das Plancksche Gesetz für die Quantisierung der Energie einer elektromagnetischen Welle?
8. Was ist Schwarzkörperstrahlung und wie ist ein Schwarzerkörper definiert?
9. Wie kommt man auf den Namen Schwarzerkörper bzw. Schwarzkörperstrahlung?
10. Wie lautet das Wiensche Verschiebungsgesetz?
11. Wie lautet das Stefan-Boltzmann Gesetz?

Klausuraufgaben

- Herbst 2020: Aufgabe 4) und 5) (Seite: 101 und 102)
- Frühjahr 2020: Aufgabe 4) (Seite: 116)
- Frühjahr 2021: Aufgabe 4) und 6) (Seite: 86 und 88)
- Frühjahr 2022: Aufgabe 3) (Seite: 59)

Fragen zur 6. Vorlesung:

1. Schreiben Sie die Formel für die Energiedichte einer elektromagnetischen Welle in Rahmen der Maxwellschen Theorie auf.
2. Schreiben Sie die Formel für die Energiedichte im Teilchenbild der elektromagnetischen Welle auf.
3. Was bezeichnen die Einsteinkoeffizienten A_{21}, B_{21} und B_{12}?
4. Wieso gilt $B_{21} = B_{12}$ und was folgt daraus?
5. Für was steht das Akronym Laser?
6. Unter welcher Bedingung kommt es zur Verstärkung von Licht durch stimulierte Emission?
7. Erläutern Sie das Vierniveauschema zur Erzeugung von Laser-Licht.
8. Welche Aufgabe haben bei einem He-Ne-Laser die Helium-Atome?
9. Was sind Brewster-Fenster und welche Funktion haben sie beim He-Ne-Laser?

Klausuraufgaben

- Frühjahr 2019: Aufgabe 6) (Seite: 148)
- Frühjahr 2021: Aufgabe 3) (Seite: 85)

Fragen zur 7. Vorlesung:

1. Wie hängt beim photoelektrischen Effekt die kinetische Energie des Photoelektrons mit der Frequenz der Lichtwelle zusammen.
2. Was versteht man unter dem Compton-Effekt?
3. Wie hängt die Wellenlänge des gestreuten Photons mit der Wellenlänge des einfallenden Photons zusammen?
4. Wie hängt die Energie des gestreuten Photons mit der Energie des einfallenden Photons zusammen?
5. Wie berechnet sich die Compton-Wellenlänge?
6. Skizzieren Sie das Compton-Spektrum eines Gammastrahlers.
7. Bei welcher Energie liegt die Compton-Kante?
8. Wie lautet die Formel für die de Broglie-Wellenlänge für ein Elektron, das mit der Spannung U beschleunigt wird?
9. Wie groß ist die de Broglie-Wellenlänge, wenn das Elektron mit einer Spannung von 10 kV beschleunigt wird?
10. Welcher Winkel ergibt sich dann zwischen dem einfallenden Elektronenstrahl und dem gebeugten Elektronenstrahl 1. Ordnung, wenn der Netzebenenabstand 0,123 nm bzw. 0,213 nm beträgt?

Klausuraufgaben

- Herbst 2018: Aufgabe 5) und 6) (Seite: 163 und164)
- Herbst 2019: Aufgabe 4) und 5) (Seite: 129 und131)
- Herbst 2020: Aufgabe 3) (Seite: 99)
- Herbst 2021: Aufgabe 3) (Seite: 74)
- Frühjahr 2019: Aufgabe 5) und 6) (Seite: 147 und 148)
- Frühjahr 2020: Aufgabe 3) (Seite: 115)
- Frühjahr 2021: Aufgabe 3) und 4) (Seite: 85 und 86)

Fragen zur 8. Vorlesung:

1. Wie lautet die Unschärferelation für den Impuls, die Energie und den Drehimpuls?
2. Wieso kann die Bahn eines Elektrons, das an einen Atomkern gebunden ist, nicht in einer Bahnebene verlaufen?
3. Welche Wellenlänge haben Elektronen mit der kinetischen Energie 500 MeV?
4. Welche Wellenlänge haben Elektronen mit der kinetischen Energie 10 keV?
5. Berechnen Sie die Wellenlänge von jeweils zwei Übergängen der Lyman-, der Balmer- und der Paschen-Serie.
6. Was sind die Annahmen des Bohrschen Atommodells?
7. Wie lautet die Quantisierungsbedingung für den Bahndrehimpuls im Bohrschen Atommodell?
8. Welchen Radius haben die Elektronenbahnen im Bohrschen Atommodell?
9. Welche Energie haben die Elektronen auf diesen Bahnen?

Klausuraufgaben

- Herbst 2018: Aufgabe 7a) (Seite: 165)
- Herbst 2021: Aufgabe 6) (Seite: 78)
- Frühjahr 2020: Aufgabe 6) (Seite: 118)
- Frühjahr 2021: Aufgabe 5a,b) (Seite: 87)

Fragen zur 9. Vorlesung:

1. Was ist die Ursache für die charakteristischen Linien im Spektrum einer Röntgenröhre.
2. Skizzieren Sie den Aufbau einer Röntgenröhre.
3. Was ist der Grund für die charakteristische Röntgenstrahlung?
4. Was ist eine K_α-Linie?
5. Wie hat Moseley das Bohrsche Atommodell erweitert?
6. Wieso können Elemente durch ihre Röntgenspektren identifiziert werden?
7. Schreiben Sie die Schrödingergleichung auf.
8. Wie lautet die Hamiltonfunktion für ein klassisches Teilchen mit potentieller Energie?
9. Wie lautet der Differentialoperator für den Impuls in der Schrödingertheorie?
10. Wie lautet der Hamiltonoperator für ein klassisches Teilchen mit potentieller Energie?
11. Wie lautet die Schrödingergleichung für ein klassisches Teilchen mit potentieller Energie?
12. Wie lautet die zeitunabhängige Schrödingergleichung für ein klassisches Teilchen mit potentieller Energie?
13. Wie lautet der Lösungsansatz für die Schrödingergleichung, wenn der Hamiltonoperator die Zeit nicht explizit enthält?
14. Wie lautet die Unschärferelation für den Drehimpuls?
15. Weshalb kann in der Quantenphysik nur einer Drehimpulskomponente ein fester Wert zugewiesen werden?
16. Wie lautet der Differentialoperator für die z-Komponente des Drehimpulses?
17. Wie lautet die Eigenwertgleichung für die z-Komponente des Drehimpulses?
18. Schreiben sie die Eigenwerte und die Eigenfunktionen für die z-Komponente des Drehimpulses auf.
19. Wie lautet die Eigenwertgleichung für das Quadrat des Drehimpulses?
20. Schreiben Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen für das Quadrat des Drehimpulses auf?
21. Welche Eigenwerte hat die z-Komponente des Drehimpulses für die Drehimpulsquantenzahl ℓ?

22. Welche Länge hat der Drehimpulsvektor?
23. Skizzieren Sie den Drehimpulsvektor für die Drehimpulsquantenzahl $\ell = 1$.
24. Skizzieren Sie ein s-Orbital.
25. Skizzieren Sie ein p_z-Orbital.
26. Wie hängt ein p_x und p_y-Orbital mit der Kugelflächenfunktion $Y_{1,\pm 1}$ zusammen?
27. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Ortsvektor in die Richtung θ, φ zeigt, wenn sich das Teilchen in einem p_z-Orbital befindet.
28. Schreiben Sie die Rotationsenergie für ein zweiatomiges Molekül mit dem Trägheitsmoment I auf.
29. Wie lautet die zeitunabhängige Schrödingergleichung für die Rotation eines zweiatomigen Moleküls?
30. Welche Werte ergeben sich für die quantisierte Energie?
31. Skizzieren Sie das Rotationsspektrum eines Moleküls und geben Sie den energetischen Abstand der Spektrallinien an.

Klausuraufgaben

- Herbst 2019: Aufgabe 6) (Seite: 132)
- Herbst 2020: Aufgabe 7) (ohne Teilaufgabe d)) (Seite: 106)
- Herbst 2021: Aufgabe 6) (Seite: 78)
- Frühjahr 2020: Aufgabe 6) und Aufgabe 7) (Seite: 118 und 119)
- Frühjahr 2021: Aufgabe 5) (Seite: 87)

Fragen zur 10. Vorlesung:

1. Das Elektron des Wasserstoffatoms befindet sich in einem Quantenzustand mit der Hauptquantenzahl n. Welche anderen Quantenzahlen charakterisieren den Quantenzustand des Elektrons?

2. Welche Werte haben diese Quantenzahlen?

3. Skizzieren Sie die radialen Wellenfunktionen $R_{n,\ell}$ für ein Elektron mit der Hauptquantenzahl $n = 4$.

4. Skizzieren Sie die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte $r^2 R_{n,\ell}^2$ für ein Elektron mit der Hauptquantenzahl $n = 4$.

5. Begründen Sie den Verlauf dieser Funktionen.

6. Wie hängt das magnetische Moment der Elektronenbahn mit dem Drehimpuls zusammen?

7. Schreiben Sie die Formel für das Bohrsche Magneton auf.

8. Wie ändert sich die Energie eines Elektrons, wenn sich das Atom in einem magnetischen Feld befindet?

9. Skizzieren Sie die Aufspaltung der Energieniveaus eines f-Elektrons in einem magnetischen Feld.

10. Schreiben Sie den Zeeman-Operator auf.

Klausuraufgaben

- Herbst 2018: Aufgabe 7a+b) (Seite: 165)
- Herbst 2020: Aufgabe 7) ohne d) (Seite: 106)
- Herbst 2021: Aufgabe 6d) (Seite: 78)
- Frühjahr 2019: Aufgabe 7) (Seite: 150)
- Frühjahr 2020: Aufgabe 7) (Seite: 119)
- Frühjahr 2021: Aufgabe 7a+b) (Seite: 90)
- Frühjahr 2022: Aufgabe 4) (Seite: 61)

Fragen zur 11. Vorlesung:

1. Skizzieren Sie das Stern-Gerlach Experiment.
2. Was sollte mit dem Stern-Gerlach Experiment beobachtet werden?
3. Schreiben Sie die Eigenwertgleichungen für den Spin des Elektrons mit Hilfe der Dirac Notation auf.
4. Skizzieren Sie den Vektor für den Spin des Elektrons.
5. Wie lang ist der Vektors des Elektronenspins?
6. Wie hängt das magnetische Moment des Elektrons mit seinem Spin zusammen?
7. Wie kommt es zur „Spin-Bahn-Kopplung“?
8. Schreiben Sie den Hamiltonoperator der Spin-Bahn-Kopplung auf.
9. Wie lautet die Formel für das Drehmoment, das auf ein magnetisches Moment im Magnetfeld wirkt?
10. Was ist eine Präzessionsbewegung?
11. Weshalb addieren sich die Drehmomente der Elektronen eines Atoms zu einem Gesamtdrehimpuls?
12. Die Drehimpulse ℓ_1 und ℓ_2 zweier Elektronen werden zum Gesamtdrehimpuls L gekoppelt. Welche Zahlenwerte kann die Quantenzahl von $\hat{\vec{L}}^2$ haben?
13. Wie lautet der Hamiltonoperator der Spin-Bahn-Kopplung?
14. Schreiben Sie seine Energieeigenwerte auf.
15. Berechnen Sie die Differenz benachbarter Energieniveaus, die aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung aufgespalten sind (Landé-Regel)
16. Berechnen Sie aus den Wellenlängen der Natrium D-Linien die Feinstrukturkonstante ξ des 3p-Orbitals ($\lambda_{\mathrm{D}_1} = 589{,}5924$ nm und $\lambda_{\mathrm{D}_2} = 588{,}9951$ nm).

Klausuraufgaben

- Herbst 2018: Aufgabe 7) (Seite: 165)
- Herbst 2019: Aufgabe 7) (Seite: 134)
- Herbst 2020: Aufgabe 6) und 7) (Seite: 104 und 119)
- Herbst 2021: Aufgabe 7a) (Seite: 79)
- Frühjahr 2022: Aufgabe 5) (Seite: 62)

Fragen zur 12. Vorlesung:

1. Die Elektronen eines Atoms bewegen sich durch eine kugelförmige Ladungsverteilung, die von den übrigen Elektronen des Atoms hervorgerufen wird. Was folgt daraus für die Orbitale der Elektronen?

2. Was besagt das Pauli-Prinzip?

3. Mit wievielen Elektronen kann ein s-, p-, d- und f-Orbital jeweils besetzt werden?

4. Skizzieren Sie ein Energieniveauschema, wie es für die Besetzung der Orbitale aus dem Periodensystem der Elemente abgeleitet werden kann.

5. Worauf beruht die Austauschwechselwirkung?

6. Weshalb führt die Austausch bei Atomorbitalen dazu, dass sich die Spins der Elektronen bevorzugt parallel zueinander einstellen?

7. Weshalb führt die Austauschwechselwirkung bei Molekülorbitalen dazu, dass sich die Spins der Elektronen antiparallel ausrichten?

8. Beim Neon-Atom ist das 2p-Orbital vollständig mit Elektronen besetzt. Wird eines dieser Elektronen in ein s-Orbital angeregt, dann ergeben sich für die Elektronenkonfiguration [$2p^5$,ns^1] vier Quantenzustände. Schreiben Sie für die vier Quantenzustände, die Quantenzahlen für den Gesamtspin, Gesamtbahndrehimpuls und den Gesamtdrehimpuls auf. Hinweis: Das fehlende Elektron in der 2p-Konfiguration wird Elektronenloch genannt. Die $2p^5$ Konfiguration verhält sich wie ein Elektron mit positiver Ladung.

9. Schreiben Sie die vier Quantenzustände in der üblichen Notation für atomare Orbitale auf.

10. Wieviele Quantenzustände ergeben sich, wenn beim Neon ein 2p-Elektron in ein p-Orbital höherer Energie angeregt wird?

11. Worin besteht der Energiegewinn, wenn zwei Atome eine kovalente Bindung eingehen?

12. Worin besteht der Energiegewinn, wenn Atome ein Metall bilden?

13. Wie lautet die Formel für die elektrische Leitfähigkeit?

14. Wie kommt man zu dieser Formel?

Klausuraufgaben

- Herbst 2018: Aufgabe 8a) (Seite: 167)
- Herbst 2021: Aufgabe 7) (Seite: 79)

- Frühjahr 2019: Aufgabe 8a) (Seite: 152)
- Frühjahr 2020: Aufgabe 8a) (Seite: 121)
- Frühjahr 2021: Aufgabe 7) (Seite: 90)
- Frühjahr 2022: Aufgabe 6) (Seite: 64)

Fragen zur 13. Vorlesung:

1. Wie lautet die Schrödingergleichung für die Leitungselektronen im Sommerfeld-Modell?
2. Welche Energie haben Leitungselektronen im Sommerfeld-Modell?
3. Wieso variiert die Wellenzahlvektoren in einem Festkörper mit dem Volumen V nicht kontinuierlich?
4. Welches Volumen beansprucht jeder Wellenzahlvektor?
5. Weshalb kann eine ebene Welle die Aufenthaltswahrscheinlichkeit von maximal zwei Elektronen beschreiben?
6. Was versteht man unter der Fermi-Kugel?
7. Was versteht man unter der Fermi-Energie?
8. Was beschreibt die Fermi-Verteilungsfunktion?
9. Skizzieren Sie die Fermi-Verteilungsfunktion bei der Temperatur $T = 0$.
10. Welchen Radius hat die Fermi-Kugel?
11. Wie ist die Zustandsdichte der Leitungselektronen definiert?
12. Eine Welle mit dem Wellenzahlvektor $\vec{k}$ wird k-Zustand genannt. Wieviele k-Zustände befinden sich in einer Kugelschale mit dem Radius k und der Dicke dk?
13. Wie hängt die Wärmekapazität der Leitungselektronen von der Temperatur ab?
14. Weshalb hängt die Wärmekapazität der Leitungselektronen von der Zustandsdichte der Leitungselektronen bei der Fermi-Energie ab?

Klausuraufgaben

- Herbst 2018: Aufgabe 8) (Seite: 167)
- Herbst 2019: Aufgabe 8) (Seite: 136)
- Herbst 2020: Aufgabe 8) (Seite: 107)
- Herbst 2021: Aufgabe 8) (Seite: 80)
- Frühjahr 2019: Aufgabe 8) (Seite: 152)
- Frühjahr 2020: Aufgabe 8) (Seite: 121)
- Frühjahr 2021: Aufgabe 8) (Seite: 91)
- Frühjahr 2022: Aufgabe 7) und 8) (Seite: 65 und 67)

1. Aufgabe (4 Punkte)

Flachwasserwellen breiten sich mit der Phasengeschwindigkeit $v = \sqrt{g \cdot h}$ aus. $g = 9{,}81\,\mathrm{ms}^{-2}$ bezeichnet die Erdbeschleunigung und h die Wassertiefe.

a) Geben Sie die Wellenfunktion einer harmonischen Welle an, die sich mit der Wellenlänge $\lambda = 100$ km im Meer ausbreitet. Die Wassertiefe betrage 10 km. Berechnen Sie dazu die Wellenzahl und die Kreisfrequenz der Welle.
b) Am Meeresboden gebe es eine lange, gerade Bruchkante, an der sich die Wassertiefe auf 5 km verringert. Die Wellenfronten treffen unter einem Winkel von 30° auf die Bruchkante. Welchen Winkel zur Bruchkante haben die Wellenfronten im flacheren Wasser?

2. Aufgabe (4 Punkte)

a) Elektronen werden mit der Spannung U_0 =100 V beschleunigt. Welche Wellenlänge hat der Elektronenstrahl?
b) Der Elektronenstrahl trifft auf eine sehr dünne polykristalline Probe. Begründen Sie, weshalb die Intensität der Elektronen nach der Probe ringförmig um die Richtung des ursprünglichen Elektronenstrahls beobachtet wird.
c) Die Probe besteht auf aus α-Polonium, das in einem einfach kubischen Gitter mit der Gitterkonstante $a = 335 \cdot 10^{-12}$ m kristallisiert. Berechnen Sie die Vektoren des reziproken Gitters.
d) Unter welchem Winkel bezüglich des einfallenden Elektronenstrahls können die Elektronen beobachtet werden, die an den (1,1,0)-Ebenen gebeugt werden?

3. Aufgabe (4 Punkte)

a) Welche Energie wird benötigt, um ein Elektron auf 90 % der Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen?
b) Welchen Impuls hat das Elektron, nachdem es auf 90 % der Lichtgeschwindigkeit beschleunigt worden ist?
c) Ein Beobachter bewegt sich mit 50 % der Lichtgeschwindigkeit senkrecht zur Bewegungsrichtung des Elektrons.
   i) Welchen Impuls hat das Elektron senkrecht zur Bewegung des Beobachters?
   ii) Welche Energie hat das Elektron im Bezugssystem des Beobachters?

4. Aufgabe (4 Punkte)

a) Ideale thermische Strahlung wird oft als Schwarzkörperstrahlung bezeichnet. Was zeichnet eine ideale thermische Strahlungsquelle aus?
b) Skizzieren Sie das Strahlungsspektrum eines idealen thermischen Strahlers als Funktion der Wellenlänge.
c) Wie beeinflusst die Temperatur der Strahlungsquelle das Strahlungsspektrum?
d) ^{210}Po zerfällt durch einen α-Zerfall in Blei und wirkt als Wärmequelle mit einer thermischen Leistung von $P_{\text{Zerfall}}/m = 141\,\text{W/kg}$. Welche Gleichgewichtstemperatur stellt sich auf der Oberfläche einer Poloniumkugel (Radius 1 cm) ein, die sich in einer Umgebung bei Raumtemperatur $T_0 = 300$ K befindet und nur durch Wärmestrahlung gekühlt wird? $\rho = 9{,}2 \cdot 10^3\,\text{kgm}^{-3}$ ist die Dichte von Polonium.

5. Aufgabe (4 Punkte)

a) Wie wird der Bahndrehimpuls in der Newtonschen Mechanik definiert und wie unterscheidet sich der Bahndrehimpuls der klassischen Physik vom Bahndrehimpuls in der Quantenphysik?
b) Schreiben Sie den Bahndrehimpulsoperator der Quantenphysik auf und geben Sie die Eigenwertgleichungen für den Bahndrehimpuls an.
c) Welche Zahlenwerte können die Eigenwerte des Bahndrehimpulses haben?
d) Eine Masse m kann sich im Abstand r um einen festen Raumpunkt drehen. Schreiben Sie die Schrödingergleichung der Masse m auf und geben Sie die Energieeigenwerte dieser Masse an.

6. Aufgabe (4 Punkte)

Das Elektron hat einen Eigendrehimpuls: den Spin.

a) Wie lautet der Spinoperator des Elektrons?
b) Da die Eigenfunktionen des Spinoperators keine Wellenfunktionen sind, führte Dirac eine verallgemeinerte Schreibweise der Quantenzustände ein. Erläutern Sie die Dirac-Notation der Quantenzustände und schreiben Sie damit die Eigenwertgleichungen des Spins auf.
c) Welche Zahlenwerte können die Eigenwerte des Elektronenspins haben?
d) Der Spin des Elektrons ist mit einem magnetischen Moment verknüpft. Berechnen Sie die Änderung der Energie des Elektrons, wenn ein Magnetfeld der Stärke $B_0 = 1\,\text{T}$ angelegt wird.

7. Aufgabe (4 Punkte)

Das Valenzelektron von Natrium ist ein 3s Elektron.

a) Die gelbe Natriumlinie entspricht den Übergang 3s $\leftrightarrow$ 3p. Begründen Sie, weshalb die gelbe Natriumlinie in zwei Komponenten aufgespalten ist und schreiben Sie die Übergänge auf, die den beiden Komponenten entsprechen.
b) Welche der beiden Komponenten hat die kleiner Energie?
c) Erkären Sie, weshalb in einem Magnetfeld die eine der beiden Komponenten in vier und die andere in sechs Spektrallinien aufgespalten ist. Geben Sie die Übergänge an, die diesen Spektrallinien entsprechen.

8. Aufgabe (4 Punkte)

a) Erläutern Sie die Sommerfeld-Theorie der Metalle.
b) Leiten Sie die Fermi-Wellenzahl k_F im Sommerfeld-Modell her.
c) Wie ist die Fermi-Energie E_F definiert?
d) Berechnen Sie die Zustandsdichte $D(E)$ der Elektronen im Sommerfeld-Modell.

Bitte verwenden Sie für die Konstanten die folgenden Werte:

Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s
Plancksche Konstante:	$h = 4{,}14 \cdot 10^{-15}$ eVs $= 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Ws^2
Stefan-Boltzmann Konstante:	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Wm^{-2}K^{-4}
Bohrsches Magneton:	$\mu_\mathrm{B} = 9{,}274 \cdot 10^{-24}$ Am^2
Elementarladung:	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As
Ruhemasse des Elektrons:	$m_\mathrm{e} = 511$ keV$/c^2 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg

1. Aufgabe (4 Punkte)

Flachwasserwellen breiten sich mit der Phasengeschwindigkeit $v = \sqrt{g \cdot h}$ aus. $g = 9{,}81\,\mathrm{ms}^{-2}$ bezeichnet die Erdbeschleunigung und h die Wassertiefe.

a) Geben Sie die Wellenfunktion einer harmonischen Welle an, die sich mit der Wellenlänge $\lambda = 100$ km im Meer ausbreitet. Die Wassertiefe betrage 10 km. Berechnen Sie dazu die Wellenzahl und die Kreisfrequenz der Welle.

b) Am Meeresboden gebe es eine lange, gerade Bruchkante, an der sich die Wassertiefe auf 5 km verringert. Die Wellenfronten treffen unter einem Winkel von 30° auf die Bruchkante. Welchen Winkel zur Bruchkante haben die Wellenfronten im flacheren Wasser?

a) harmonische Welle

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_0)$$

mit dem Wellenzahlvektor $\vec{k}$ und der Wellenzahl

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{100 \cdot 10^3\,\mathrm{m}} = 6{,}28 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^{-1}$$

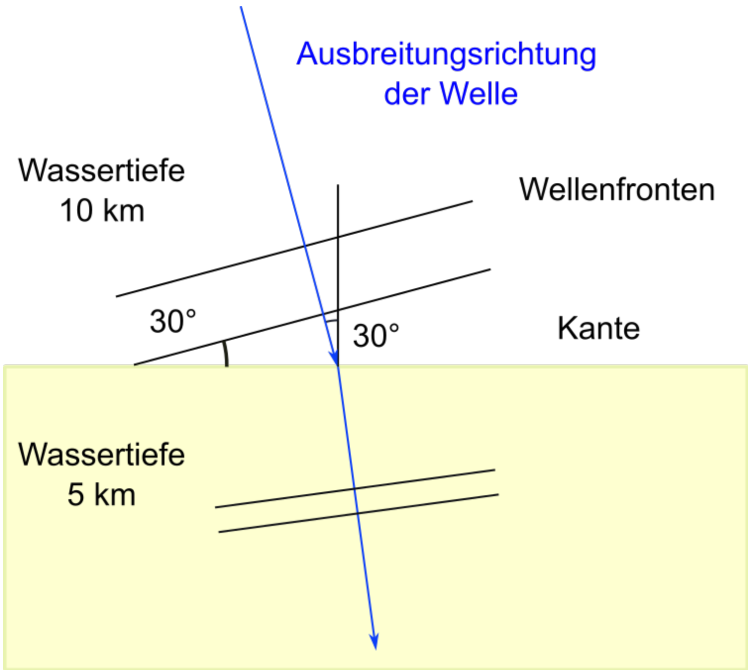
Periodendauer

$$\lambda = v \cdot T \quad \rightarrow \quad T = \frac{\lambda}{v} = \frac{100 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}{\sqrt{9{,}81 \cdot 10^4}\mathrm{ms}^{-1}} = 319\,\mathrm{s}$$

und Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{319\,\mathrm{s}} = 0{,}02\,\mathrm{s}^{-1}$$

b) Phasengeschwindigkeit bei 10 km Wassertiefe: v_1 Phasengeschwindigkeit bei 5 km Wassertiefe: $v_2 = v_1/\sqrt{2}$



Brechungsgesetz:

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$$

mit $v_1 = v_0/n_1$ und $v_2 = v_0/n_2$ lautet das Brechungsgesetz

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}$$

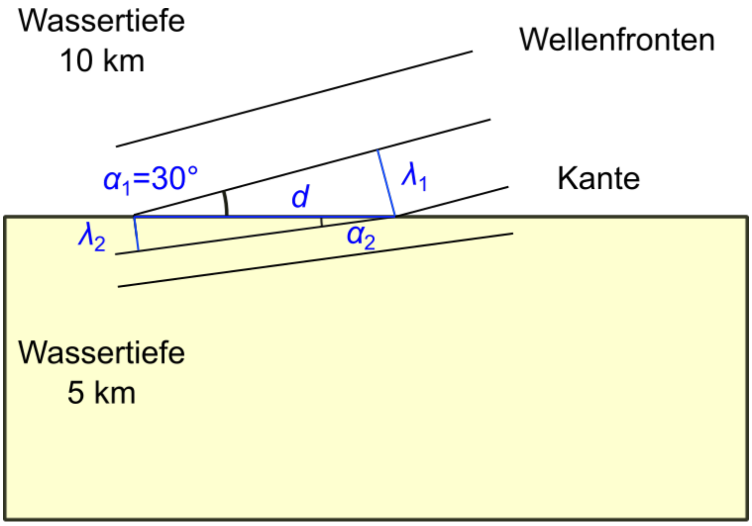
und

$$\sin\alpha_2 = \frac{v_2}{v_1}\sin\alpha_1 = \frac{\sin\alpha_1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071 \cdot 0{,}5 \rightarrow \alpha_2 = 20{,}7^0$$

Alternativ kann mit den Wellenlängen gerechnet werden:
Wellenlänge in 10 km tiefen Wasser: $\lambda_1 = 100$ km
Wellenlänge in 5 km tiefen Wasser

$$\lambda_2 = v_2 \cdot T = \sqrt{9{,}81 \cdot 5 \cdot 10^3}\,\mathrm{ms}^{-1} \cdot 319\,\mathrm{s} = 70{,}65\,\mathrm{km} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{2}}$$

mit der Skizze



ist

$$\sin\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{d} \quad \text{und} \quad \sin\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{d}$$

und es ergibt sich das Brechungsgesetz in der Form (vgl. Vorlesung 2)

$$\frac{\sin\alpha_1}{\lambda_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\lambda_2} \quad \rightarrow \quad \sin\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sin\alpha_1 = \frac{\sin\alpha_1}{\sqrt{2}}$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

a) Elektronen werden mit der Spannung U_0 =100 V beschleunigt. Welche Wellenlänge hat der Elektronenstrahl?
b) Der Elektronenstrahl trifft auf eine sehr dünne polykristalline Probe. Begründen Sie, weshalb die Intensität der Elektronen nach der Probe ringförmig um die Richtung des ursprünglichen Elektronenstrahls beobachtet wird.
c) Die Probe besteht auf aus α-Polonium, das in einem einfach kubischen Gitter mit der Gitterkonstante $a = 335 \cdot 10^{-12}$ m kristallisiert. Berechnen Sie die Vektoren des reziproken Gitters.
d) Unter welchem Winkel bezüglich des einfallenden Elektronenstrahls können die Elektronen beobachtet werden, die an den (1,1,0)-Ebenen gebeugt werden?

a) $E_{\text{kin}} = eU_0 = 100\,\text{eV} << m_e c^2 = 500\,\text{keV}$ und es darf klassisch gerechnet werden

$$E_{\text{kin}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} \quad \rightarrow \quad k = \frac{\sqrt{2m_e E_{\text{kin}}}}{\hbar} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU_0}}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU_0}} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\text{eVs}\, 3 \cdot 10^8\,\text{ms}^{-1}}{\sqrt{2 \cdot 500 \cdot 10^3\,\text{eV}\, 10^2\,\text{eV}}} = 124 \cdot 10^{-12}\,\text{m}$$

b) Die Intensitätsmaxima aufgrund der Beugung der Elektronenwelle am Kristallgitter vereinigen sich aufgrund der gleichmäßigen Verteilung der Kristallrichtungen in der polykristallinen Probe zu Ringen um die Strahlachse.

c) Die Basisvektoren des reziproken Gitters werden mit der Formel

$$\vec{b_1} = \frac{2\pi}{a^3}(\vec{a_2} \times \vec{a_3})$$

berechnet. Dabei werden die Indizes zyklisch permutiert. Die Basisvektoren sind somit für ein einfach kubisches Gitter

$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a}\vec{e}_x = \frac{2\pi}{335 \cdot 10^{-12}\,\text{m}}\vec{e}_x = 1{,}88 \cdot 10^{-10}\,\text{m}^{-1}\vec{e}_x, \quad \vec{b}_2 = \frac{2\pi}{a}\vec{e}_y, \quad \vec{b}_3 = \frac{2\pi}{a}\vec{e}_z.$$

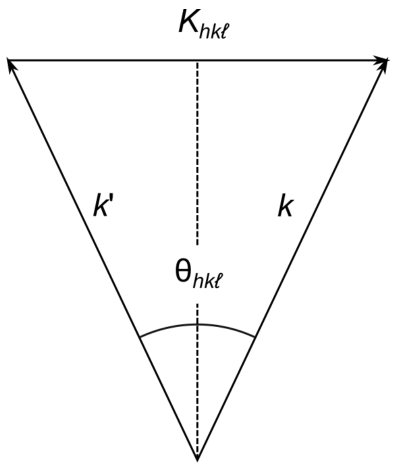
Dabei bezeichnen $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ Einheitsvektoren entlang der Kanten der kubischen Elementarzelle.

Die Vektoren des reziproken Gitters sind

$$\vec{K}_{h,k,\ell} = h \cdot \vec{b}_1 + k \cdot \vec{b}_2 + \ell \cdot \vec{b}_3$$

h, k und ℓ sind die Millerschen Indizes, die ganzzahlige Werte annehmen können.

d) Mit der Laue-Bedingung für konstruktive Interferenz $\vec{k} - \vec{k}' = \vec{K}_{h,k,\ell}$ ergibt sich für die Winkel die Formel



$$\begin{aligned}
\sin\theta_{h,k,\ell}/2 &= \frac{|\vec{K}_{h,k,\ell}|}{2k} \\
&= \frac{2\pi}{a}\frac{\sqrt{h^2+k^2+\ell^2}}{2k} \\
&= \frac{\lambda}{2a}\sqrt{h^2+k^2+\ell^2} \\
&= \frac{124}{2\cdot 335}\sqrt{h^2+k^2+\ell^2} = 0{,}185\sqrt{h^2+k^2+\ell^2}
\end{aligned}$$

Beugung an der ($h = 1$, $k = 1$, $\ell = 0$)- Ebene

$$\sin\theta_{1,1,0}/2 = 0{,}185\sqrt{2} = 0{,}262 \quad \rightarrow \quad \theta_{1,1,0} = 30{,}4°$$

3. Aufgabe (4 Punkte)

a) Welche Energie wird benötigt, um ein Elektron auf 90 % der Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen?
b) Welchen Impuls hat das Elektron, nachdem es auf 90 % der Lichtgeschwindigkeit beschleunigt worden ist?
c) Ein Beobachter bewegt sich mit 50 % der Lichtgeschwindigkeit senkrecht zur Bewegungsrichtung des Elektrons.
   i) Welchen Impuls hat das Elektron senkrecht zur Bewegung des Beobachters?
   ii) Welche Energie hat das Elektron im Bezugssystem des Beobachters?

a)

$$E = mc^2 = \frac{m_\mathrm{e} c^2}{\sqrt{1-0{,}9^2}} = 2{,}29\, m_\mathrm{e} c^2$$

Die Energie zur Beschleunigung ist

$$E_\mathrm{beschl.} = E - m_\mathrm{e} c^2 = 1{,}29\, m_\mathrm{e} c^2 = 1{,}29 \cdot 500\,\mathrm{keV} = 645\,\mathrm{keV}$$

b) Impuls des Elektrons

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_\mathrm{e}\vec{v}}{\sqrt{1-0{,}9^2}} \quad \rightarrow \quad p = 2{,}29 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\,0{,}9 \cdot 3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{ms}^{-1}$$
$$= 56{,}3 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{kgms}^{-1} = 1053\,\mathrm{keV}/c$$

c) Lorentztransformation für die Koordinaten (Invariante: $(ct)^2 + \vec{r}^2 = s^2$)

$$x' = \gamma(\mathrm{x} - \frac{v_\mathrm{Beo.}}{c} ct), \quad y' = \mathrm{y}, \quad z' = \mathrm{z}, \quad ct' = \gamma(ct - \frac{v_\mathrm{Beo.}}{c}\mathrm{x})$$

Lorentztransformation für die Impulskomponenten (Invariante: $(\frac{E}{c})^2 + \vec{p}^{\,2} = m_\mathrm{e}^2$)

$$p'_\mathrm{x} = \gamma(p_\mathrm{x} - \frac{v_\mathrm{Beo.}}{c^2}E), \quad p'_\mathrm{y} = p_\mathrm{y}, \quad p'_\mathrm{z} = p_\mathrm{z}, \quad \frac{E'}{c} = \gamma(\frac{E}{c} - \frac{v_\mathrm{Beo.}}{c} p_\mathrm{x})$$

und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v_\mathrm{Beo.}}{c})^2}}$.

i) Der Impuls senkrecht zur Bewegung des Beobachters ändert sich nicht

$$p'_\mathrm{y} = p_\mathrm{y} \quad \text{und} \quad p'_\mathrm{z} = p_\mathrm{z} \quad \rightarrow \quad p_\perp = 56{,}3 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{kgms}^{-1}$$

ii) Die Energie des Elektrons im Bezugssystem des Beobachters ist mit $p_x = 0$

$$E' = \gamma E = \frac{E}{\sqrt{1 - v_{\mathrm{Beo.}^2}/c^2}} = \frac{E}{\sqrt{1 - 0{,}5^2}} = 1{,}15 \cdot E = 1{,}15 \cdot 2{,}29\, m_e c^2$$

$$E' = 2{,}63 \cdot m_e c^2 = 2{,}63 \cdot 500\,\mathrm{keV} = 1{,}3\,\mathrm{MeV}$$

Alternativ kann auch die Geschwindigkeit des Elektrons im Bezugssystem des Beobachters berechnet werden:
Mit der Lorentz-Transformation

$$x' = \gamma(x - v_{\mathrm{Beo.}} \cdot t), \quad t' = \gamma(t - v_{\mathrm{Beo.}} \cdot x/c^2), \quad y' = y, \quad z' = z$$

mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2_{\mathrm{Beo.}}/c^2}$ und der Geschwindigkeit des Beobachters $v_{\mathrm{Beo.}} = 0{,}5\,c$ sowie der Geschwindigkeit des Elektrons im Ruhesystem $v_x = 0$ $v_y = 0{,}9\,c$ ist

$$v'_x = \frac{x'}{t'} = \frac{x - v_{\mathrm{Beo.}} \cdot t}{t - v_{\mathrm{Beo.}} \cdot x/c^2} = \frac{v_x - v_{\mathrm{Beo.}}}{1 - v_{\mathrm{Beo.}} \cdot v_x/c^2} = -v_{\mathrm{Beo.}}$$

und

$$v'_y = \frac{y'}{t'} = \frac{y}{\gamma(t - v_{\mathrm{Beo.}} \cdot x/c^2)} = \frac{v_y}{\gamma(1 - v_{\mathrm{Beo.}} \cdot v_x/c^2)} = \frac{v_y}{\gamma}$$

Die Energie des Elektrons ist

$$E = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - v_e^2}} \quad \text{und} \quad v_e^2 = (v'_x)^2 + (v'_y)^2 = v^2_{\mathrm{Beo.}} + (v_y)^2(1 - v^2_{\mathrm{Beo.}}/c^2)$$

$$E = m_e c^2 \frac{1}{\sqrt{1 - v^2_{\mathrm{Beo.}} - (v_y)^2(1 - v^2_{\mathrm{Beo.}}/c^2)}} = m_e c^2 \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2_{\mathrm{Beo.}})(1 - (v_y)^2)}}$$

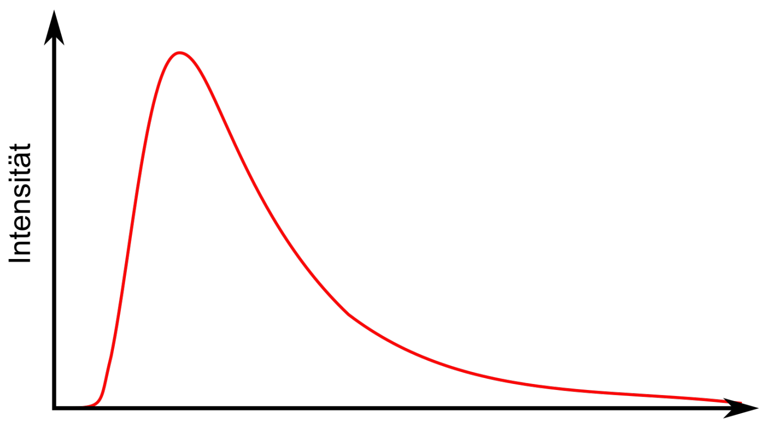
und

$$E = m_e c^2\, 1{,}15 \cdot 2{,}29$$

4. Aufgabe (4 Punkte)

a) Ideale thermische Strahlung wird oft als Schwarzkörperstrahlung bezeichnet. Was zeichnet eine ideale thermische Strahlungsquelle aus?
b) Skizzieren Sie das Strahlungsspektrum eines idealen thermischen Strahlers als Funktion der Wellenlänge.
c) Wie beeinflusst die Temperatur der Strahlungsquelle das Strahlungsspektrum?
d) ^{210}Po zerfällt durch einen α-Zerfall in Blei und wirkt als Wärmequelle mit einer thermischen Leistung von $P_{\text{Zerfall}}/m = 141\,\text{W/kg}$. Welche Gleichgewichtstemperatur stellt sich auf der Oberfläche einer Poloniumkugel (Radius 1 cm) ein, die sich in einer Umgebung bei Raumtemperatur $T_0 = 300$ K befindet und nur durch Wärmestrahlung gekühlt wird? $\rho = 9{,}2 \cdot 10^3\,\text{kgm}^{-3}$ ist die Dichte von Polonium.

a) Schwarzkörperstrahlung
   i) Das elektromagnetische Strahlungsfeld ist im thermischen Gleichgewicht mit der übrigen Materie.
   ii) Die Oberfläche hat keinen Einfluss auf die Strahlung, d.h. elektromagnetische Strahlung kann ungehindert die thermische Strahlungquelle verlassen, oder in sie eindringen.
b) Spektrum der idealen thermischen Strahlung



c) Die Wellenlänge des Maximums $\lambda_{\max}$ ist umgekehrt proportional zur Temperatur der Strahlungsquelle, d.h. $\lambda_{\max} \propto 1/T$ (Wiensches Verschiebungsgesetz).
d) Leistungsbilanz

$$P_{\text{Heiz}} + A\sigma T_0^4 = A\sigma T^4 \quad \text{mit} \quad P_{\text{Heiz}} = (P_{\text{Zerfall}}/m)\,\rho\,\frac{4\pi r^3}{3} \quad \text{und} \quad A = 4\pi r^2$$

Oberflächentemperatur

$$T = \left(\frac{P_{\text{Heiz}}}{\sigma A} + {T_0}^4\right)^{(1/4)} = \left(\frac{141\,\text{Wkg}^{-1}\,9{,}2\cdot 10^3\,\text{kgm}^{-3}\,4\pi\,10^{-2}\,\text{m}}{5{,}67\cdot 10^{-8}\,\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}\,3\cdot 4\pi} + 300^4\,\text{K}^4\right)^{1/4}$$

$$T = (763\cdot 10^8\,\text{K}^4 + 300^4\,\text{K}^4)^{1/4} = (763+81)^{1/4}\cdot 100\,\text{K} = 539\,\text{K}$$

5. Aufgabe (4 Punkte)

a) Wie wird der Bahndrehimpuls in der Newtonschen Mechanik definiert und wie unterscheidet sich der Bahndrehimpuls der klassischen Physik vom Bahndrehimpuls in der Quantenphysik?
b) Schreiben Sie den Bahndrehimpulsoperator der Quantenphysik auf und geben Sie die Eigenwertgleichungen für den Bahndrehimpuls an.
c) Welche Zahlenwerte können die Eigenwerte des Bahndrehimpulses haben?
d) Eine Masse m kann sich im Abstand r um einen festen Raumpunkt drehen. Schreiben Sie die Schrödingergleichung der Masse m auf und geben Sie die Energieeigenwerte dieser Masse an.

a) Drehimpuls bei Newton
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$
Dabei bezeichnet $\vec{r}$ den Ortsvektor und $\vec{p}$ den Impuls eines Teilchens. Beim

Newtonschen Impuls können allen drei Komponenten des Vektors Zahlenwerte bestimmt werden. Beim Drehimpuls in der Quantenphysik kann nur eine Komponente, die üblicherweise als z-Komponente bezeichnet wird, festgelegt werden.
b) Mit dem Impulsoperator $\hat{\vec{p}} = -\mathrm{i}\hbar\nabla$ kann man für den Drehimpulsoperator schreiben
$$\hat{\vec{L}} = -\mathrm{i}\,\hbar\vec{r} \times \nabla$$
Die Eigenwertgleichungen sind
$$\begin{aligned}\hat{L}_\mathrm{z} Y_{\ell,m} &= m\hbar Y_{\ell,m}\\ \hat{\vec{L}}^2 Y_{\ell,m} &= \ell(\ell+1)\hbar^2 Y_{\ell,m}\end{aligned}$$
Die Eigenfunktionen $Y_{\ell,m} = Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ sind die Kugelflächenfunktionen.
c) Die Drehimpulsquantenzahl ℓ kann die Werte 0, 1, 2, etc. haben. Die Drehimpulsquantenzahl m variiert in Schritten von 1 im Intervall $-\ell \leq m \leq +\ell$.
d) Die Schrödinger-Gleichung einer rotierenden Masse ist
$$E_\ell Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) = \frac{\hat{\vec{L}}^2}{2mr^2} Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$$
Die Energieeigenwerte sind
$$E_\ell = \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

6. Aufgabe (4 Punkte)

Das Elektron hat einen Eigendrehimpuls: den Spin.

a) Wie lautet der Spinoperator des Elektrons?
b) Da die Eigenfunktionen des Spinoperators keine Wellenfunktionen sind, führte Dirac eine verallgemeinerte Schreibweise der Quantenzustände ein. Erläutern Sie die Dirac-Notation der Quantenzustände und schreiben Sie damit die Eigenwertgleichungen des Spins auf.
c) Welche Zahlenwerte können die Eigenwerte des Elektronenspins haben?
d) Der Spin des Elektrons ist mit einem magnetischen Moment verknüpft. Berechnen Sie die Änderung der Energie des Elektrons, wenn ein Magnetfeld der Stärke $B_0 = 1\,\mathrm{T}$ angelegt wird.

a) Spinoperator des Elektrons

$$\hat{\vec{s}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\sigma_\mathrm{x}\\ \sigma_\mathrm{y}\\ \sigma_\mathrm{z}\end{pmatrix}$$

$\sigma_{\mathrm{x,\,y,\,z}}$ sind die Pauli-Matrizen.

b) Dirac führte zur Bezeichnung von Quantenzuständen ein spezielles Klammersymbol $|\,...\,\rangle$ ein, in welches die Quantenzahlen geschrieben werden, die den jeweiligen Quantenzustand bestimmen, z.B.

$$|\mathrm{Quantenzahl}_1,\ \mathrm{Quantenzahl}_2,\ \mathrm{Quantenzahl}_3,\ ...\rangle\,.$$

Eigenwertgleichungen des Spins

$$\hat{s}_\mathrm{z}\,|s,\,m_\mathrm{s}\rangle = m_\mathrm{s}\hbar\,|s,\,m_\mathrm{s}\rangle$$
$$\hat{\vec{s}}^{\,2}\,|s,\,m_\mathrm{s}\rangle = s(s+1)\hbar^2\,|s,\,m_\mathrm{s}\rangle$$

c) Die Eigenwerte des Elektronenspin sind $s = 1/2$ und $m_\mathrm{s} = \pm 1/2$.
d) Zeeman-Aufspaltung

$$\Delta E_{m_\mathrm{s}} = \pm g\mu_\mathrm{B}B_0 m_\mathrm{s}$$

mit $g = 2$ (in sehr guter Näherung) ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta E_{m_\mathrm{s}=\pm 1/2} = \pm\mu_\mathrm{B}B_0 &= \pm 9{,}274\cdot 10^{-24}\,\mathrm{Am}^2\cdot 1\,\mathrm{Vsm}^{-2}\\ &= \pm 9{,}274\cdot 10^{-24}\,\mathrm{Ws}\\ &= \pm 5{,}8\cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV}.\end{aligned}$$

7. Aufgabe (4 Punkte)

Das Valenzelektron von Natrium ist ein 3s Elektron.

a) Die gelbe Natriumlinie entspricht den Übergang 3s $\leftrightarrow$ 3p. Begründen Sie, weshalb die gelbe Natriumlinie in zwei Komponenten aufgespalten ist und schreiben Sie die Übergänge auf, die den beiden Komponenten entsprechen.

b) Welche der beiden Komponenten hat die kleiner Energie?

c) Erkären Sie, weshalb in einem Magnetfeld die eine der beiden Komponenten in vier und die andere in sechs Spektrallinien aufgespalten ist. Geben Sie die Übergänge an, die diesen Spektrallinien entsprechen.

a) Spinbahnkopplung: im 3p-Zustand richtet sich das magnetische Moment des Elektrons im Magnetfeld aus, das durch die Bahnbewegung des Elektrons verursacht wird. Dabei sind zwei Einstellungen möglich, bei denen sich der Bahndrehimpuls mit der Quantenzahl $\ell = 1$ mit dem Spin des Elektrons zum Gesamtdrehimpuls mit den Quantenzahlen $j = 1/2$ bzw. $j = 3/2$ addieren.
Die Übergänge sind

$$3s_{1/2} \leftrightarrow 3p_{1/2}$$
$$3s_{1/2} \leftrightarrow 3p_{3/2}$$

b) Der Übergang $3s_{1/2} \leftrightarrow 3p_{1/2}$ hat die kleinere Energie, da sich die magnetischen Momente von Bahn und Spin eher antiparallel als parallel zueinander orientieren (Eine strikte parallele bzw. antiparallele Orientierung ist für quantisierte Drehimpulse nicht möglich.).

c) Der Grundstand spaltet im Magnetfeld in die beiden Quantenzustände $|3s_{1/2}, m_\mathrm{j} = \pm 1/2\rangle$ auf.
Ebenso spaltet der angeregte erste Zustand $3p_{1/2}$ in die beiden Quantenzustände $|3p_{1/2}, m_\mathrm{j} = \pm 1/2\rangle$ auf,
während der zweite angeregte Zustand $3p_{3/2}$ in die vier Quantenzustände $|3s_{3/2}, m_\mathrm{j} = \pm 1/2, \pm 3/2\rangle$ aufspaltet.
Mit der Auswahlregel $\Delta m_\mathrm{j} = 0, \pm 1$ und der Tatsache, dass die Aufspaltungsenergien der Quantenzustände $3s_{1/2}$, $3p_{1/2}$ und $3s_{3/2}$ im Magnetfeld verschieden sind,

ergeben sich die vier Übergänge

$$|3\mathrm{s}_{1/2},\,\pm 1/2\rangle \leftrightarrow |3\mathrm{p}_{1/2},\,\pm 1/2\rangle$$
$$|3\mathrm{s}_{1/2},\,\pm 1/2\rangle \leftrightarrow |3\mathrm{p}_{1/2},\,\mp 1/2\rangle$$

bzw. die sechs Übergänge

$$|3\mathrm{s}_{1/2},\,+1/2\rangle \leftrightarrow |3\mathrm{p}_{3/2},\,+3/2\rangle \quad \text{und} \quad |3\mathrm{s}_{1/2},\,-1/2\rangle \leftrightarrow |3\mathrm{p}_{3/2},\,-3/2\rangle$$
$$|3\mathrm{s}_{1/2},\,+1/2\rangle \leftrightarrow |3\mathrm{p}_{3/2},\,\pm 1/2\rangle \quad \text{und} \quad |3\mathrm{s}_{1/2},\,-1/2\rangle \leftrightarrow |3\mathrm{p}_{3/2},\,\pm 1/2\rangle\,.$$

8. Aufgabe (4 Punkte)

a) Erläutern Sie die Sommerfeld-Theorie der Metalle.
b) Leiten Sie die Fermi-Wellenzahl k_F im Sommerfeld-Modell her.
c) Wie ist die Fermi-Energie E_F definiert?
d) Berechnen Sie die Zustandsdichte $D(E)$ der Elektronen im Sommerfeld-Modell.

a) In der Sommerfeld-Theorie der Metalle werden die Leitungselektronen freie Elektronen, die durch ebene Wellen beschrieben werden, die sich in alle Raumrichtungen ausbreiten können. Die Energie der Elektronen ist $E(\vec{k}) = (\hbar\vec{k})^2/2m_\mathrm{e}$. Die Wellenzahlvektoren sind gemäß der Formel

$$\vec{k}_{\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2,\mathrm{n}_3} = \frac{2\pi}{L}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

quantisiert.
Dabei bezeichnet L die Kantenlänge einer würfelförmigen Metallprobe.
Gemäß dem Pauli-Prinzip kann jeder Quantenzustand, der durch einen Wellenzahlvektor $\vec{k}_{\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2,\mathrm{n}_3}$ bestimmt ist, mit zwei Elektronen besetzt werden.

b) Die Fermiwellenzahl ist durch die Bedingung

$$N = 2 \cdot \frac{4\pi k_\mathrm{F}^3/3}{(2\pi)^3/L^3}$$

bestimmt. Da alle Raumrichtungen gleichberechtigt sind, können bei der Temperaftur $T = 0$ alle k-Zustände innerhalb einer Kugel bis zur Fermiwellenzahl mit Elektronen besetzt werden. $4\pi k_\mathrm{F}^3/3$ ist das Volumen der Kugel, $(2\pi)^3/L^3$ das Volumen einen k-Zustands. Der Faktor 2 berücksichtigt, dass jeder k-Zustand mit zwei Elektronen besetzt werden kann und N bezeichnet die Anzahl der Elektronen. Damit ist die Fermiwellenzahl

$$k_\mathrm{F} = (3\pi^2\frac{N}{L^3})^{1/3} = (3\pi^2\frac{N}{V})^{1/3}$$

allein durch die Elektronendichte bestimmt.

c) Die Fermienergie ist die größte Energie, die Elektronen bei $T = 0$ haben können. Im Rahmen des Sommerfeld-Models gilt

$$E_\mathrm{F} = \frac{\hbar^2 k_\mathrm{F}^2}{2m_\mathrm{e}}$$

d) Die Zustandsdichte der Elektronen ist

$$D(E) = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}E}.$$

Da alle Raumrichtungen gleichberechtigt sind, ist die Zahl der Zustände dN bei einer bestimmten Energie durch die Zahl der k-Zustände in einer Kugelschale mit dem Radius k und der Dicke dk gegeben

$$\mathrm{d}N = 2 \cdot \frac{4\pi k^2 \mathrm{dk}}{(2\pi)^3/V}.$$

Mit $E = \hbar^2 k^2/2m_\mathrm{e} \rightarrow k^2 = 2m_\mathrm{e}E/\hbar^2$ und $\mathrm{d}E = \hbar^2 k\mathrm{d}k/m_\mathrm{e} \rightarrow \mathrm{d}k = m_\mathrm{e}\mathrm{d}E/(\hbar^2 k)$

$$\mathrm{d}N = \frac{V}{\pi^2} \cdot \frac{2m_\mathrm{e}E}{\hbar^2} \cdot \frac{m_\mathrm{e}\mathrm{d}E}{\hbar^2 k} = \frac{V}{\pi^2} \cdot \frac{2m_\mathrm{e}E}{\hbar^2} \cdot \frac{m_\mathrm{e}\mathrm{d}E}{\hbar\sqrt{2m_\mathrm{e}E}}$$

und

$$D(E) = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}E} = \frac{1}{\pi^2}\frac{\sqrt{2m_\mathrm{e}^3}}{\hbar^3}\sqrt{E}.$$

1. Aufgabe (4 Punkte)

a) Wie lautet die Wellengleichung und die Wellenfunktion einer ebenen Welle?
b) Wie ist die Wellenzahl definiert und wie hängt die Wellenzahl mit dem Wellenzahlvektor zusammen?
c) Die Geschwindigkeit einer Lichtwelle in einem Medium wird durch die Brechzahl n bestimmt. Es gilt $v = c/n$. Wie hängt die Wellenzahl von der Brechzahl n ab?
d) Bei der Brechung einer Lichtwelle ändert sich die Projektion des Wellenzahlvektors auf die Grenzfläche nicht. Zeigen Sie, dass diese Aussage mit dem Brechungsgesetz $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$ übereinstimmt.

2. Aufgabe (Jönsson-Experiment 1961) (4 Punkte)

a) Elektronen werden mit der Spannung $U_0 = 50$ kV beschleunigt. Welche Wellenlänge haben die Elektronen?
b) Der Elektronenstrahl triff senkrecht auf einen Doppelspalt. Der Abstand der Spalte beträgt von Mitte zu Mitte $d = 2\,\mu\text{m}$. Unter welchen Winkeln zum zentralen Hauptmaximum werden die Maxima der Intensität beobachtet?
c) Die Elektronen werden auf einem Fluoreszenzschirm aufgefangen, der in einem Abstand von $\ell = 35\,\text{cm}$ nach dem Doppelspalt senkrecht zum Strahl aufgestellt ist. Welchen Abstand haben die Interferenzmaxima auf dem Schirm?
d) Skizzieren Sie die Intensität am Schirm als Funktion des Gangunterschieds $\Delta s = d \sin\alpha$, wenn die Einzelspalte eine Breite von $b = 0{,}4\,\mu\text{m}$ haben.

Hinweis: Verwenden Sie $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

a) Mit welcher Geschwindigkeit muss sich ein Elektron in Bezug auf einen Beobachter bewegen, damit im Bezugssystem des Elektrons 0,5 s vergehen, während im Bezugssystem des Beobachters 1 s vergangen ist?
b) Um welche Strecke ändert sich während dieser Zeit der Abstand zwischen Elektron und Beobachter im Bezugssystem des Beobachters bzw. im Bezugssystem des Elektrons?
c) Welche relativistische Masse hat das Elektron, wenn es sich mit dieser Geschwindigkeit bewegt?
d) Mit welcher Spannung muss das Elektron beschleunigt werden, um es auf diese Geschwindigkeit zu bringen?

4. Aufgabe (4 Punkte)

a) Skizzieren Sie das Planck'sche Strahlungsgesetz, d.h. die Intensität $I(\lambda)$ eines idealen thermischen Strahlers als Funktion der Wellenlänge λ.
b) Welche Grundannahme musste Max Planck treffen, um das Strahlungsgesetz herzuleiten?
c) Auf welche fundamentalen Prozesse führte Albert Einstein das Planck'sche Strahlungsgesetz zurück?
d) Welcher dieser Prozesse bildet die Grundlage für die Funktion eines Lasers?
e) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit Laserlicht entstehen kann?

5. Aufgabe (4 Punkte)

^{137}Cs geht durch einen β-Zerfall in ^{137}Ba über. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 92 % wird dabei ein Photon der Energie $E_\gamma = 662\,\mathrm{keV}$ emittiert.

a) Was versteht man unter dem Compton-Effekt?
b) Ein Photon der oben genannten Energie werde an einem Elektron exakt zurückgestreut. Berechnen Sie die Energie des zurückgestreuten Photons.
c) Welche kinetische Energie hat dieses Elektron nach der Streuung, wenn seine kinetische Energie vor der Streuung vernachlässigbar klein war?
d) Ein charakteristisches Merkmal eines Compton-Spektrums ist die Compton-Kante. Wie entsteht die Compton-Kante und welche Energie hat sie?
e) Skizzieren Sie das Compton-Spektrum einer ^{137}Cs-Probe und benennen Sie die wesentlichen Merkmale des Spektrums.

6. Aufgabe (4 Punkte)

a) Welche Bindungsenergie hat ein Elektron im 2s- bzw. 2p-Orbital des Wasserstoffatoms?
b) Skizzieren Sie für das Wasserstoffatom die radialen Wellenfunktionen $R_{2\mathrm{s}}(r)$ und $R_{2\mathrm{p}}(r)$, sowie die radialen Wahrscheinlichkeitsdichten $r^2R^2_{2\mathrm{s}}(r)$ und $r^2R^2_{2\mathrm{p}}(r)$.
c) Begründen Sie Ihre Skizzen in Teilaufgabe b).

7. Aufgabe (4 Punkte)

Die Elektronenkonfiguration von Natrium ist $1\mathrm{s}^2, 2\mathrm{s}^2, 2\mathrm{p}^6, 3\mathrm{s}^1$.

a) Wie lauten die Eigenwertgleichungen für den Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$?
b) Welche Quantenzahlen hat der Gesamtdrehimpuls von Natrium im Grundzustand?
c) Welchen Betrag hat das magnetische Moment von Natrium im Grundzustand?
d) Natriumatome fliegen durch ein inhomogenes Magnetfeld, das in z-Richtung orientiert ist. Der Feldgradient ist $\partial B_z/\partial x = \partial B_z/\partial y = 0$, $\partial B_z/\partial z = 100\,\mathrm{T\,m^{-1}}$. Auf die Natriumatome wirkt eine Kraft. Welchen Betrag hat diese Kraft und in welche Richtungen kann sie wirken? Hinweis: Für die Kraft gilt: $\vec{F} = (\vec{\mu}\cdot\nabla)\vec{B}$.

8. Aufgabe (4 Punkte)

Im Sommerfeldmodell ergibt sich für die Wärmekapazität des Elektronengases die Formel $C = V\frac{\pi^2}{3}D(E_\mathrm{F})k_\mathrm{B}^2T$.

a) Wie ist die Zustandsdichte $D(E)$ der Elektronen definiert?
b) Zeigen Sie, dass die Zustandsdichte im Sommerfeldmodell proportional zur Wurzel aus der Energie ist, d.h. $D(E) \propto \sqrt{E}$.
c) Die Dichte der Leitungselektronen von Kupfer ist $N/V = 8{,}45\cdot 10^{22}\,\mathrm{cm^{-3}}$. Berechnen Sie die Fermi-Temperatur $T_\mathrm{F} = E_\mathrm{F}/k_\mathrm{B}$ von Kupfer.
d) Weshalb wird zur Berechnung der Wärmekapazität die Zustandsdichte der Elektronen bei der Fermi-Energie E_F benötigt?

Bitte verwenden Sie für die Konstanten die folgenden Werte:

Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s
Boltzmann Konstante:	$k_B = 8{,}6 \cdot 10^{-5}$eV/K $= 1{,}38 \cdot 10^{-23}$J/K
Plancksche Konstante:	$h = 4{,}14 \cdot 10^{-15}$ eVs $= 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Ws^2
Compton-Wellenlänge:	$\lambda_C = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ m
Rydberg-Energie:	$R = 13{,}6$ eV
Bohrsches Magneton:	$\mu_B = 9{,}274 \cdot 10^{-24}$ Am^2
Elementarladung:	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As
Ruhemasse des Elektrons:	$m_e = 511$ keV$/c^2 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg

1. Aufgabe (4 Punkte)

a) Wie lautet die Wellengleichung und die Wellenfunktion einer ebenen Welle?
b) Wie ist die Wellenzahl definiert und wie hängt die Wellenzahl mit dem Wellenzahlvektor zusammen?
c) Die Geschwindigkeit einer Lichtwelle in einem Medium wird durch die Brechzahl n bestimmt. Es gilt $v = c/n$. Wie hängt die Wellenzahl von der Brechzahl n ab?
d) Bei der Brechung einer Lichtwelle ändert sich die Projektion des Wellenzahlvektors auf die Grenzfläche nicht. Zeigen Sie, dass diese Aussage mit dem Brechungsgesetz $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$ übereinstimmt.

a) Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\nabla^2\psi$$

Ebene Welle

$$\psi(\vec{r,t}) = \psi_0 e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}$$

b) Wellenzahl

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Die Wellenzahl ist der Betrag des Wellenzahlvektors, d.h. $k = |\vec{k}|$.

c) Mit $\lambda = \frac{c}{n}\cdot T = \frac{c}{n\cdot\nu}$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\cdot\nu}{c}\cdot n = k_0\cdot n$$

k_0 bezeichnet die Wellenzahl im Vakuum.

d) Da beim Brechungsgesetz die Winkel α_1 bzw. α_2 bezüglich der Oberflächennormalen gemessen werden, ist

$$k_1\sin\alpha_1 \qquad \text{bzw.} \qquad k_2\sin\alpha_2$$

die Projektion des Wellenzahlvektors auf die Grenzfläche. Mit

$$k_1\sin\alpha_1 = k_2\sin\alpha_2 \qquad \text{folgt das Berechungsgestz} \qquad n_1\sin\alpha_1 = n_2\sin\alpha_2$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

a) Elektronen werden mit der Spannung $U_0 = 50$ kV beschleunigt. Welche Wellenlänge haben die Elektronen?
b) Der Elektronenstrahl triff senkrecht auf einen Doppelspalt. Der Abstand der Spalte beträgt von Mitte zu Mitte $d = 2\,\mu\text{m}$. Unter welchen Winkeln zum zentralen Hauptmaximum werden die Maxima der Intensität beobachtet?
c) Die Elektronen werden auf einem Fluoreszenzschirm aufgefangen, der in einem Abstand von $\ell = 35\,\text{cm}$ nach dem Doppelspalt senkrecht zum Strahl aufgestellt ist. Welchen Abstand haben die Interferenzmaxima auf dem Schirm?
d) Skizzieren Sie die Intensität am Schirm als Funktion des Gangunterschieds $\Delta s = d \sin\alpha$, wenn die Einzelspalte eine Breite von $b = 0{,}4\,\mu\text{m}$ haben.

Hinweis: Verwenden Sie $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$.

a) de Broglie Wellenlänge des Elektronenstrahls

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Die kinetische Energie der Elektronen ist $E_\text{kin} = eU_0$, und der Impuls ist

$$E_\text{kin} = \frac{p^2}{2m_\text{e}} \qquad \rightarrow \qquad p = \sqrt{2m_\text{e}E_\text{kin}} = \sqrt{2 \cdot (511\,\text{keV}/\text{c}^2) \cdot 50\,\text{keV}} = 226\,\text{keV}/c$$

Die Wellenlänge ist damit

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\text{eVs}\,3 \cdot 10^8\,\text{ms}^{-1}}{226 \cdot 10^3\,\text{eV}} = 5{,}5 \cdot 10^{-12}\,\text{m}$$

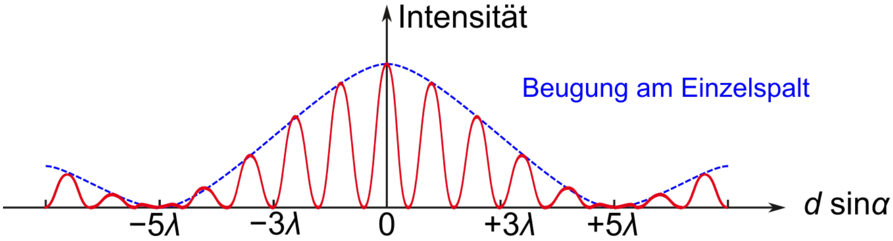
b) Bedingung für konstruktive Interferenz beim Doppelspalt

$$n\lambda = d \cdot \sin\alpha_n \qquad \rightarrow \qquad \alpha_n = n\frac{\lambda}{d} = n \cdot \frac{5{,}5 \cdot 10^{-12}\,\text{m}}{2 \cdot 10^{-6}\,\text{m}} = n \cdot 2{,}75 \cdot 10^{-6}$$

c) Abstand δ der Interferenzmaxima auf dem Schirm. Da die Winkel sehr klein sind kann $\tan\alpha = \alpha$ verwendet werden

$$\delta = \alpha \cdot \ell = 2{,}75 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}35\,\text{m} = 0{,}96\,\mu\text{m}$$

d) Da $d = 5 \cdot b$ gilt, fällt jedes 5. Interferenzmaximum aufgrund der Beugung am Einzelspalt aus



3. Aufgabe (4 Punkte)

a) Mit welcher Geschwindigkeit muss sich ein Elektron in Bezug auf einen Beobachter bewegen, damit im Bezugssystem des Elektrons 0,5 s vergehen, während im Bezugssystem des Beobachters 1 s vergangen ist?
b) Um welche Strecke ändert sich während dieser Zeit der Abstand zwischen Elektron und Beobachter im Bezugssystem des Beobachters bzw. im Bezugssystem des Elektrons?
c) Welche relativistische Masse hat das Elektron, wenn es sich mit dieser Geschwindigkeit bewegt?
d) Mit welcher Spannung muss das Elektron beschleunigt werden, um es auf diese Geschwindigkeit zu bringen?

a) Die Eigenzeit im Bezugssystem des Elektrons ist $T_0 = 0{,}5\,\mathrm{s}$ und es vergeht aufgrund der Zeitdilatation die Zeit $T(v) = 1\,\mathrm{s}$, während der Beobachter das bewegte Elektron beobachtet

$$T(v) = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Die Geschwindigkeit ist also

$$v = c\sqrt{1 - (T_0/T(v))^2} = c\sqrt{1 - (0{,}5)^2} = c\frac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}6 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}.$$

b) Im Bezugssystem des Beobachters legt das Elektron während 1 s die Strecke $2{,}6 \cdot 10^8$ m zurück, während es im Bezugssystem des Elektrons nur $2{,}6 \cdot 10^8\,\mathrm{m} \cdot 0{,}5 = 1{,}3 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$ sind (Längenkontraktion).
c) Die relativistische Masse des Elektrons ist

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{511\,\mathrm{keV}/c^2}{\sqrt{1 - (\sqrt{3}/2)^2}} = 2 \cdot 511\,\mathrm{keV}/c^2.$$

d) Die Energie des Elektrons ist

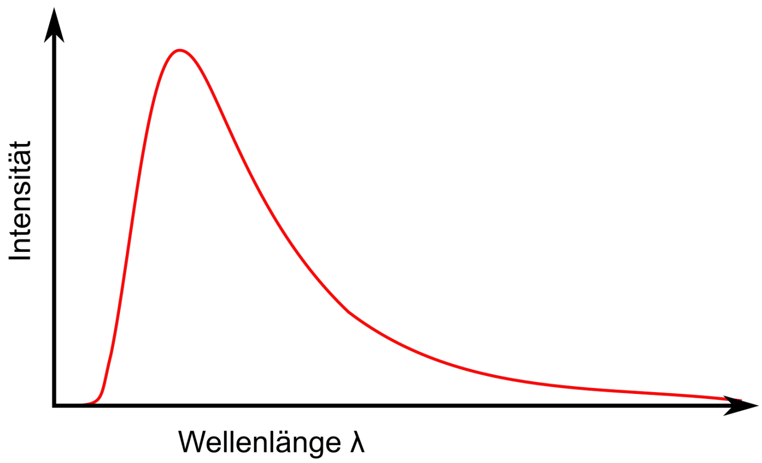
$$E = m(v)c^2 = 2 \cdot 511\,\mathrm{keV}.$$

Das ist die doppelte Ruheenergie eines Elektrons. Die kinetische Energie entspricht also der Ruheenergie und die Beschleunigungsspannung muss folglich 511 kV betragen.

4. Aufgabe (4 Punkte)

a) Skizzieren Sie das Planck'sche Strahlungsgesetz, d.h. die Intensität $I(\lambda)$ eines idealen thermischen Strahlers als Funktion der Wellenlänge λ.
b) Welche Grundannahme musste Max Planck treffen, um das Strahlungsgesetz herzuleiten?
c) Auf welche fundamentalen Prozesse führte Albert Einstein das Planck'sche Strahlungsgesetz zurück?
d) Welcher dieser Prozesse bildet die Grundlage für die Funktion eines Lasers?
e) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit Laserlicht entstehen kann?

a) Skizze des Planckschen Strahlungsgesetz



b) Max Planck nimmt an, dass elektromagnetische Wellen nur in Quanten der Energie $E = h\nu$ absorbiert und emittiert werden können.
c) Zur Herleitung des Planckschen Strahlungsgesetzes benötigt Albert Einstein die fundamentalen Prozesse der spontanen Emission, der stimulierten Emission und der Absorption eines Energiequants der elektromagnetischen Strahlung.
d) Die stimulierte Emission verstärkt eine elektromagnetische Welle kohärent und bildet so die Grundlage für den Laser (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation).
e) Da die stimulierte Emission den Effekt der Absorption übersteigen muss, ist beim Laser der angeregte Zustand stärker als der Grundzustand besetzt. Diese Bedingung wird Besetzungsinversion genannt.

5. Aufgabe (4 Punkte)

^{137}Cs geht durch einen β-Zerfall in ^{137}Ba über. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 92 % wird dabei ein Photon der Energie $E_\gamma = 662\,\text{keV}$ emittiert.

a) Was versteht man unter dem Compton-Effekt?
b) Ein Photon der oben genannten Energie werde an einem Elektron exakt zurückgestreut. Berechnen Sie die Energie des zurückgestreuten Photons.
c) Welche kinetische Energie hat dieses Elektron nach der Streuung, wenn seine kinetische Energie vor der Streuung vernachlässigbar klein war?
d) Ein charakteristisches Merkmal eines Compton-Spektrums ist die Compton-Kante. Wie entsteht die Compton-Kante und welche Energie hat sie?
e) Skizzieren Sie das Compton-Spektrum einer ^{137}Cs-Probe und benennen Sie die wesentlichen Merkmale des Spektrums.

a) Der Compton-Effekt bezeichnet die Streuung eines Photons an einem quasi ruhenden Elektron, d.h. ein Photon trifft auf ein Elektron, überträgt einen Teil seiner Energie auf das Elektron und wird dabei abgelenkt. Dabei ist die kinetische Energie des Elektrons vor dem Zusammenstoß mit dem Photon vernachlässigbar klein im Vergleich zur Energie des Photons.

b) Die Compton-Formel ist

$$\lambda' - \lambda = \lambda_\text{C}(1 - \cos\theta).$$

Dabei bezeichnet λ' die Wellenlänge nach der Streuung. Der Streuwinkel für die Rückstreuung ist $\theta = 180°$. Die Wellenlänge des Photons vor dem Stoß ist

$$\lambda = \frac{hc}{E_\lambda} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\text{eVs}\,3 \cdot 10^{8}\,\text{ms}^{-1}}{662 \cdot 10^{3}\,\text{eV}} = 1{,}88 \cdot 10^{-12}\,\text{m}.$$

Die Wellenlänge des zurückgestreuten Photons ist

$$\lambda' = \lambda + \lambda_\text{C}(1 - \cos\theta) = 1{,}88 \cdot 10^{-12}\,\text{m} + 2 \cdot 2{,}43 \cdot 10^{-12}\,\text{m} = 6{,}74 \cdot 10^{-12}\,\text{m}.$$

Die Energie des zurückgestreuten Photons ist damit

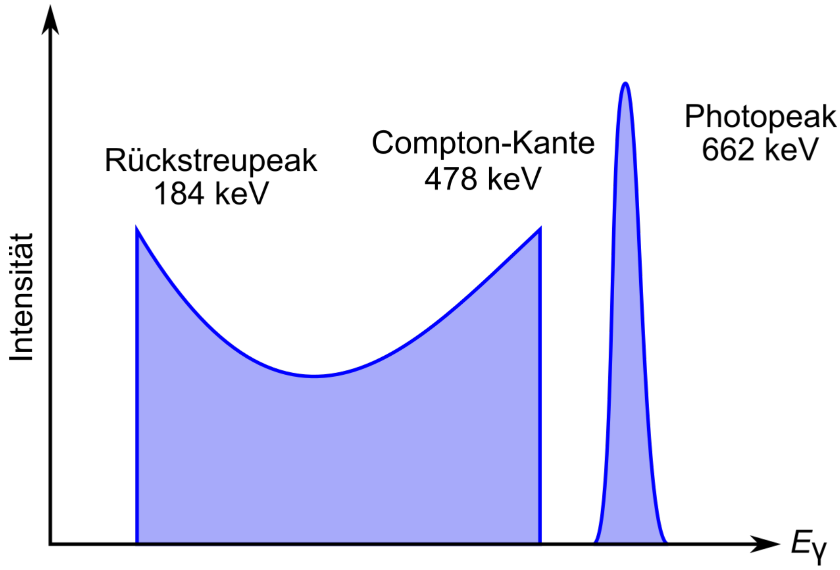
$$E_{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\text{eVs}\,3 \cdot 10^{8}\,\text{ms}^{-1}}{6{,}74 \cdot 10^{-12}\,\text{m}} = 1{,}84 \cdot 10^{5}\,\text{eV} = 184\,\text{keV}.$$

c) Die kinetische Energie des Elektrons ist

$$E_\text{kin} = E_\lambda - E_{\lambda'} = 662\,\text{keV} - 184\,\text{keV} = 478\,\text{keV}.$$

d) Die Compton-Kante ist die größte Energie des kontinuierlichen Compton-Spektrums. Die größte Energie des kontinuierlichen Spektrum ergibt sich, wenn die rückgestreuten Elektronen ihre gesamte kinetische Energie mit einem einzigen Photon abstrahlen. Die Energie der Compton-Kante entspricht somit der maximalen kinetische Energie der gestreuten Elektronen.

e) Schematische Skizze des Compton-Spektrums von ^{137}Cs



So wie der Photopeak eine endliche Linienbreite hat, haben auch der Rückstreupeak und die Compton-Kante eine endliche Breite (vgl. z.B. das Compton-Spektrum von ^{60}Co in der Vorlesung.)

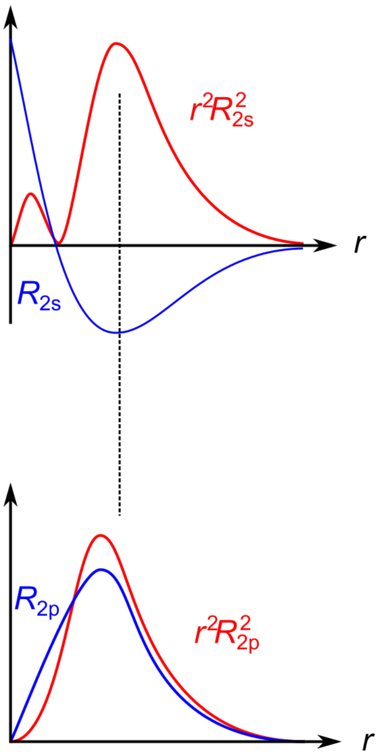
6. Aufgabe (4 Punkte)

a) Welche Bindungsenergie hat ein Elektron im 2s- bzw. 2p-Orbital des Wasserstoffatoms?
b) Skizzieren Sie für das Wasserstoffatom die radialen Wellenfunktionen $R_{2s}(r)$ und $R_{2p}(r)$, sowie die radialen Wahrscheinlichkeitsdichten $r^2R^2_{2s}(r)$ und $r^2R^2_{2p}(r)$.
c) Begründen Sie Ihre Skizzen in Teilaufgabe b).

a) Die Bindungsenergie von 2s- und 2p-Elektron sind beim Wasserstoffatom in erster Näherung gleich. Mit $E_n = -\frac{R}{n^2}$ und $n = 2$ ist die Bindungsenergie

$$E_2 = -\frac{R}{2^2} = -\frac{13{,}6\,\mathrm{eV}}{2^2} = -3{,}4\,\mathrm{eV}$$

b) Die radialen Wellenfunktionen und die radialen Wahrscheinlichkeitsdichten für das 2s- und 2p-Orbital beim Wasserstoffatom



c) • Das p-Elektron hat einen Drehimpuls mit der Quantenzahl $\ell = 1$. Die Zentrifugalkraft drückt das p-Elektron vom Kern weg, so dass die radiale Wellenfunktion proportional mit dem Abstand zum Atomkern r anwächst, um dann exponentiell mit $e^{-r/2a_B}$ abzufallen.
• Das s-Elektron hat keinen Drehimpuls. Es stürzt in den Atomkern und taucht auf der anderen Seite wieder auf, da es die Kernkraft nicht verspürt. Die Wellenfunktion ist am Ort des Atomkerns maximal. Da das s-Elektron und das p-Elektron die gleich Energie haben, muss die Rotationsenergie des p-Elektrons durch eine erhöhte radiale Energie des s-Elektrons ausgeglichen werden. Da die Reichweite der radialen Wellenfunktion für das s- und

das p-Orbital durch die gleiche Exponentialfunktion bestimmt wird, kann die Steigung der radialen Wellenfunktion durch Hinzufügen eines Nulldurchgangs in der radialen Wellenfunktion des s-Elektrons $R_{2s}(r)$ erhöht werden. Dadurch erhöht sich die radiale Energie, da sie von den Ableitungen der Wellenfunktion abhängt.

- Der Vergleich der radialen Wahrscheinlichkeitsdichte von s- und p-Elektron zeigt, dass das p-Elektron aufgrund der Drehbewegung vom Kern weggedrückt wird und sich das Maximum der radialen Wahrscheinlichkeitsdichte des s-Elektrons aufgrund der größeren radialen Energie bei einem größeren Abstand zum Kern befindet als beim p-Elektron.

7. Aufgabe (4 Punkte)

Die Elektronenkonfiguration von Natrium ist $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^1$.

a) Wie lauten die Eigenwertgleichungen für den Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$?
b) Welche Quantenzahlen hat der Gesamtdrehimpuls von Natrium im Grundzustand?
c) Welchen Betrag hat das magnetische Moment von Natrium im Grundzustand?
d) Natriumatome fliegen durch ein inhomogenes Magnetfeld, das in z-Richtung orientiert ist. Der Feldgradient ist $\partial B_z/\partial x = \partial B_z/\partial y = 0$, $\partial B_z/\partial z = 100\,\mathrm{Tm^{-1}}$. Auf die Natriumatome wirkt eine Kraft. Welchen Betrag hat diese Kraft und in welche Richtungen kann sie wirken? Hinweis: Für die Kraft gilt: $\vec{F} = (\vec{\mu}\cdot\nabla)\vec{B}$.

a) Die Eigenwertgleichung für den Gesamtdrehimpuls sind

$$\hat{\vec{J}}^2\,|j,m_j\rangle = j(j+1)\hbar^2\,|j,m_j\rangle$$
$$\hat{J}_z\,|j,m_j\rangle = m_j\hbar\,|j,m_j\rangle$$

b) Die $1s^2$, $2s^2$ und $2p^6$ Konfigurationen entsprechen abgeschlossenen Schalen und haben keinen Drehimpuls. Die $3s^1$ Konfiguration hat keinen Bahndrehimpuls . Der Gesamtdrehimpuls ist somit durch den Spin des Elektrons gegeben. Die Quantenzahlen des Gesamtdrehimpulses sind $s = 1/2$ und $s_z = \pm 1/2$.

c) Das magnetische Moment des Spins ist

$$\vec{\mu}_s = -g\mu_B\frac{\vec{s}}{\hbar}$$

Der Betrag des magnetischen Moments ist mit $g = 2$ und $s = 1/2$

$$|\vec{\mu}_s| = g\mu_B\sqrt{s(s+1)} = 2\cdot 9{,}274\cdot 10^{-24}\,\mathrm{Am^2}\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})} = 16{,}1\cdot 10^{-24}\,\mathrm{Am^2}$$

d) Der Betrag der Kraft ist

$$F = \mu_B\cdot\frac{\partial B_z}{\partial z} = 9{,}274\cdot 10^{-24}\,\mathrm{Am^2}\cdot 100\,\mathrm{Tm^{-1}} = \pm 9{,}274\cdot 10^{-22}\,\mathrm{N}.$$

Nur die Projektion von $\vec{\mu}_s$ auf die z-Achse ist wirksam. Je nach Orientierung des Spins wirkt die Kraft parallel oder antiparallel zur z-Achse.

8. Aufgabe (4 Punkte)

Im Sommerfeldmodell ergibt sich für die Wärmekapazität des Elektronengases die Formel $C = V\frac{\pi^2}{3}D(E_\mathrm{F})k_\mathrm{B}^2 T$.

a) Wie ist die Zustandsdichte $D(E)$ der Elektronen definiert?
b) Zeigen Sie, dass die Zustandsdichte im Sommerfeldmodell proportional zur Wurzel aus der Energie ist, d.h. $D(E) \propto \sqrt{E}$.
c) Die Dichte der Leitungselektronen von Kupfer ist $N/V = 8{,}45 \cdot 10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}$. Berechnen Sie die Fermi-Temperatur $T_\mathrm{F} = E_\mathrm{F}/k_\mathrm{B}$ von Kupfer.
d) Weshalb wird zur Berechnung der Wärmekapazität die Zustandsdichte der Elektronen bei der Fermi-Energie E_F benötigt?

a) Die Definition der Zustandsdichte ist

$$D(E) = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}E}.$$

Dabei bezeichnet dN die Zahl der $\vec{k}$-Zustände im Energieintervall dE bei der Energie E.

b) Im Sommerfeldmodell ist die Energie der Leitungselektronen schlicht deren kinetische Energie $E = \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m_\mathrm{e}}$. Die Energie ist somit durch die Wellenzahl k bestimmt und unabhängig von der Richtung, in die der Wellenzahlvektor $\vec{k}$ zeigt. Die Zahl der $\vec{k}$-Zustände im Wellenzahlintervall dk ist somit

$$\mathrm{d}N = 4\pi k^2 \mathrm{d}k.$$

Mit $E = \hbar^2 k^2/2m_\mathrm{e}$ ist $\mathrm{d}E \propto k\mathrm{d}k$ und $\mathrm{d}N \propto k\mathrm{d}E \propto \sqrt{E}\,\mathrm{d}E$, so dass sich $D(E) \propto \sqrt{E}$ ergibt.

c) Die Fermi-Energie ist

$$E_\mathrm{F} = \frac{\hbar^2 k_\mathrm{F}^2}{2m_\mathrm{e}} \qquad \text{mit} \qquad k_\mathrm{F} = \left((3\pi^2)\frac{N}{V}\right)^{1/3}$$

Mit $N/V = 8{,}45 \cdot 10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3} = 8{,}45 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$ ist

$$k_\mathrm{F} = \left((3\pi^2)\frac{N}{V}\right)^{1/3} = \left((3\pi^2)\cdot 8{,}45 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}\right)^{1/3} = 1{,}36 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}^{-1}$$

und die Fermi-Temperatur

$$T_\mathrm{F} = \frac{\hbar^2 k_\mathrm{F}^2}{2m_\mathrm{e}k_\mathrm{B}} = \frac{(4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs} \cdot 1{,}36 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}^{-1}\, 3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{ms}^{-1})^2}{2 \cdot 2^2\pi^2\, 511 \cdot 10^3\,\mathrm{eV}\, 8{,}6 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eVK}^{-1}} = 82222\,\mathrm{K}$$

d) Nur Elektronen, die $\vec{k}$-Zustände in der Nähe der Fermi-Energie besetzen, können durch thermische Energien im Bereich von $\approx k_\mathrm{B}T$ angeregt werden. Alle anderen Elektronen können ihre k-Zustände nicht verlassen. Da für alle Temperaturen unterhalb der Verdampfungstemperatur von Kupfer (2868 K) $T << T_\mathrm{F}$ gilt, können nur Elektronen im Bereich der Fermi-Energie zur Wärmekapazität beitragen.

1. Aufgabe (4 Punkte)

a) Schreiben Sie die Wellengleichung einer Schallwelle auf, die sich in Luft ausbreitet.
b) Wie lautet die Formel, mit der die Schallgeschwindigkeit berechnet werden kann? Benennen Sie die Größen, die in dieser Formel auftreten.
c) Eine Schallquelle sendet harmonische Schallwellen gleichmäßig in alle Raumrichtungen. Schreiben Sie die Wellenfunktion dieser Wellen für den Schalldruck auf und erläutern Sie die Größen, die darin auftreten.
d) Wie hängt die Wellenlänge der harmonischen Schallwelle mit der Schallfrequenz zusammen?

2. Aufgabe (4 Punkte)

Ein Beugungsgitter mit einem Spaltabstand von $d = 5\,\mu\text{m}$ (von Spaltmitte zu Spaltmitte) wird senkrecht mit monochromatischem Licht der Wellenlänge $\lambda = 590\,\text{nm}$ beleuchtet.

a) Skizzieren Sie als Funktion des Gangunterschieds den Verlauf der Intensität, die in einem großen Abstand zum Gitter beobachtet werden kann. Es werden 4 Spalte beleuchtet und die Breite der Spalte sei vernachlässigbar klein.
b) Wie groß ist der Winkel zwischen dem 1. Hauptmaximum und dem zentralen Maximum der 0. Ordnung?
c) Skizzieren Sie das Beugungsbild, wenn die Spaltbreite b die Hälfte des Spaltabstands beträgt, d.h. $b = d/2$.
d) Wieviele Spalte müssen mindestens beleuchtet werden, wenn die Feinstruktur der Natrium-D-Linie mit dem Gitter in der 1. Beugungsordnung aufgelöst werden soll? Hinweis: $\lambda_{\text{D1}} = 589{,}6\,\text{nm}$ und $\lambda_{\text{D2}} = 589{,}0\,\text{nm}$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

a) Wie lautet die Formel für den relativistischen Impuls? Benennen Sie die darin auftretenden Größen.
b) Ein Teilchen bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_{\text{y}} = 0{,}5\,c$ relativ zu einem ruhenden Beobachter. Berechnen Sie den Impuls des Teilchens in Einheiten von m_0c. Dabei bezeichne m_0 die Ruhemasse des Teilchens.
c) Senkrecht zur Geschwindigkeit des Teilchens bewegt sich ein zweiter Beobachter mit der Geschwindigkeit $v_{\text{x}} = 0{,}5\,c$. Fertigen Sie eine Skizze der Bezugssysteme an 7Frühj2018und schreiben Sie die Lorentztransformationen zwischen den beiden Bezugssystemen auf.
d) Berechnen Sie den Impuls des Teilchens im Bezugssystem des bewegten Beobachters parallel und senkrecht und zu seiner Geschwindigkeit.

4. Aufgabe (4 Punkte)

a) Geben Sie die Schrödingergleichung für ein Elektron an, das sich im elektrischen Feld eines Protons bewegt.
b) Schreiben Sie die Energieeigenwerte des Elektrons auf.
c) Welche Quantenzahlen bestimmen die Wellenfunktionen des Elektrons, wenn der Spin des Elektrons nicht berücksichtigt wird?

d) Welche Zahlenwerte haben diese Quantenzahlen im Grundzustand und im ersten angeregten Zustand des Elektrons?

5. Aufgabe (4 Punkte)

a) Schreiben Sie die Gleichungen auf, die den Spin des Elektrons definieren und erläutern Sie die verwendeten Größen.
b) Welche Werte haben die Quantenzahlen des Elektronenspins?
c) Was ist die Ursache für die sogenannte Spin-Bahn-Kopplung?
d) Schreiben Sie den Hamiltonoperator der Spin-Bahn-Kopplung auf und geben Sie seine Eigenwerte für den angeregten Zustand des Wasserstoffatoms mit der Hauptquantenzahl $n = 2$ an.

6. Aufgabe (4 Punkte)

Der Atomkern von Helium enthält zwei Protonen und kann deshalb zwei Elektronen binden.

a) Im Grundzustand besetzen die beiden Elektron das 1s-Orbital. Geben Sie für den Grundzustands von Helium die Quantenzahlen und das Termsymbol an.
b) Die Anregungen mit der kleinsten Energie ergeben sich, wenn ein Elektron in das 2s-Orbital angeregt wird. Geben Sie die Quantenzahlen und Termsymbole der Elektronenkonfiguration [1s2s] an.
c) Skizzieren Sie das Energieniveauschema dieser angeregten Zustände.
d) Wie macht sich die Austauschwechselwirkung in diesem Energieniveauschema bemerkbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

7. Aufgabe (4 Punkte)

a) Was versteht man unter der Fermienergie?
b) Das 3s-Elektron von Natrium wird im Natriummetall zu einem Leitungselektron. Berechnen Sie die Fermiwellenzahl von Natrium.
c) Wie ist die Zustandsdichte der Leitungselektronen definiert? Erläutern Sie die verwendeten Größen.
d) Skizzieren Sie die Zustandsdichte als Funktion der Energie, die sich für ein freies Elektronengas ergibt.

Zahlenwerte: Die Dichte von Natrium ist $\rho = 0{,}968\,\mathrm{gcm}^{-3}$ und die Atommasse $22{,}98\,u$

8. Aufgabe (4 Punkte)

Die Austrittsarbeit von festem Natrium beträgt $W_\mathrm{A} = 2{,}28\,\mathrm{eV}$ und die Fermienergie $E_\mathrm{F} = 3{,}24\,\mathrm{eV}$. Natrium wird mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 200\,\mathrm{nm}$ beleuchtet.

a) Welchen maximalen Wert hat die kinetische Energie der dabei erzeugten Photoelektronen?
b) Welchen kleinsten Wert hat die kinetische Energie der Photoelektronen?
c) Berechnen Sie die Grenzwellenlänge, für die der photoelektrische Effekt gerade noch beobachtet werden kann.
d) Mit einem Spektrometer kann die Anzahl der Photoelektronen als Funktion der Energie gemessen werden. Skizzieren Sie das Spektrum der Photoelektronen als Funktion der kinetischen Energie der Photoelektronen.

Bitte verwenden Sie für die Konstanten die folgenden Werte:

Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}$
Plancksche Konstante:	$h = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs} = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Ws^2}$
Rydberg-Energie:	$R = 13{,}6\,\mathrm{eV}$
Atomare Masseneinheit:	$u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

1. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 5) (4 Punkte)

a) Schreiben Sie die Wellengleichung einer Schallwelle auf, die sich in Luft ausbreitet.
b) Wie lautet die Formel, mit der die Schallgeschwindigkeit berechnet werden kann? Benennen Sie die Größen, die in dieser Formel auftreten.
c) Eine Schallquelle sendet harmonische Schallwellen gleichmäßig in alle Raumrichtungen. Schreiben Sie die Wellenfunktion dieser Wellen für den Schalldruck auf und erläutern Sie die Größen, die darin auftreten.
d) Wie hängt die Wellenlänge der harmonischen Schallwelle mit der Schallfrequenz zusammen?

a) Wellengleichung einer Schallwelle in Luft für die Verscheibung der Gasteilchen $\vec{s}$ aufgrund der Schallwelle

$$\frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = c_S^2 \nabla^2 \vec{s}$$

oder für den Schalldruck p_S

$$\frac{\partial^2 p_S}{\partial t^2} = c_S^2 \nabla^2 p_S$$

(1 Punkt)

b) Schallgeschwindigkeit

$$c_S = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

Dabei bezeichnet
- γ den Adiabatenexponenten von Luft ($\gamma \approx 1{,}4$)
- p_0 den Luftdruck
- ρ_0 die Dichte der Luft

(1 Punkt)

c) Wellenfunktion einer Kugelwelle für den Schalldruck

$$p_S(r,t) = \frac{p_{S0}}{r} \exp \mathrm{i}(kr - \omega t) \quad \text{und} \quad r > r_{S0}$$

- r bezeichnet den Abstand zur Schallquelle
- p_{S0} die Druckamplitude für $r = r_{S0}$
- $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl
- $\omega = 2\pi/T$ die Winkelfrequenz der Welle mit der Periodendauer T

(1 Punkt)

d) Zusammenhang Wellenlänge - Frequenz $\nu = T^{-1}$

$$\lambda = \frac{c_S}{\nu} = c_S \cdot T$$

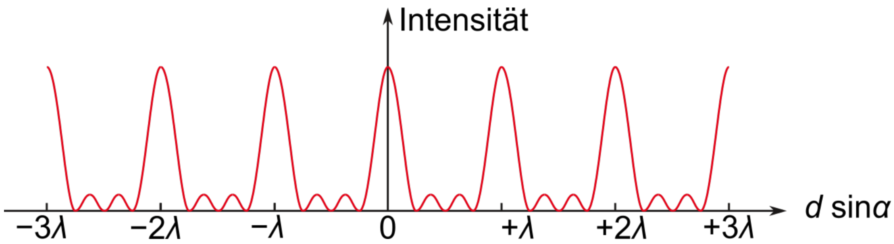
(1 Punkt)

2. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 8) (4 Punkte)

Ein Beugungsgitter mit einem Spaltabstand von $d = 5\,\mu\text{m}$ (von Spaltmitte zu Spaltmitte) wird senkrecht mit monochromatischem Licht der Wellenlänge $\lambda = 590\,\text{nm}$ beleuchtet.

a) Skizzieren Sie als Funktion des Gangunterschieds den Verlauf der Intensität, die in einem großen Abstand zum Gitter beobachtet werden kann. Es werden 4 Spalte beleuchtet und die Breite der Spalte sei vernachlässigbar klein.
b) Wie groß ist der Winkel zwischen dem 1. Hauptmaximum und dem zentralen Maximum der 0. Ordnung?
c) Skizzieren Sie das Beugungsbild, wenn die Spaltbreite b die Hälfte des Spaltabstands beträgt, d.h. $b = d/2$.
d) Wieviele Spalte müssen mindestens beleuchtet werden, wenn die Feinstruktur der Natrium-D-Linie mit dem Gitter in der 1. Beugungsordnung aufgelöst werden soll? Hinweis: $\lambda_{D1} = 589{,}6\,\text{nm}$ und $\lambda_{D2} = 589{,}0\,\text{nm}$.

a) Verlauf der Intensität als Funktion des Gangunterschieds zwischen benachbarten Strahlen $\Delta s = d \sin\alpha$, wenn vier Spalte des Gitters beleuchtet werden. α bezeichnet den Ablenkwinkel bezüglich der Richtung des ursprünglichen Lichtstrahls



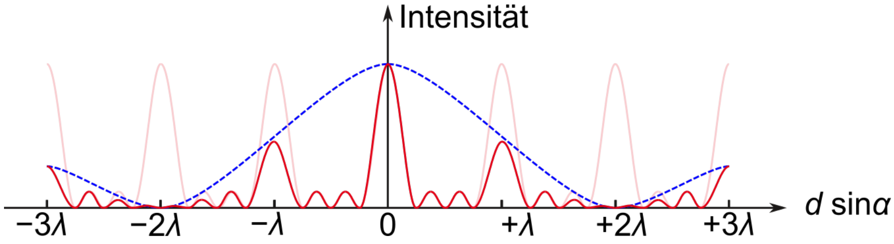
(1 Punkt)

b) Ablenkwinkel der 1. Ordnung

$$\lambda = d \sin\alpha_1 \quad \rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{\lambda}{d} = \frac{590 \cdot 10^{-9}\,\text{m}}{5 \cdot 10^{-6}\,\text{m}} = 0{,}118 \quad \rightarrow \quad \alpha = 6{,}78°$$

(1 Punkt)

c) Für die Minima beim Einzelspalt git $n\lambda = b \sin \alpha_n$. Mit $b = d/2$ ergibt es sich, dass alle geraden Hauptmaxima des Gitters ausgelöscht werden.



Die gestrichlte Kurve deutet die einhüllende Intensität des Einzelspalts an. Schattiert ist nochmals die Intensität gezeigt, wenn die Spaltbreite vernachlässigbar klein ist. (1 Punkt)

d) Für das Auflösungsvermögen in der 1. Beugungsordnung gilt

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = N$$

N bezeichnet die Anzahl der beleuchteten Spalte. Die Mindestzahl der beleuchteten Spalte ist damit

$$N = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589{,}6\,\text{nm}}{(589{,}6 - 589{,}0)\,\text{nm}} = 983$$

(1 Punkt)

3. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 10) (4 Punkte)

a) Wie lautet die Formel für den relativistischen Impuls auf. Benenne Sie die darin auftretenden Größen.
b) Ein Teilchen bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_\mathrm{y} = 0{,}5\,c$ relativ zu einem ruhenden Beobachter. Berechnen Sie den Impuls des Teilchens in Einheiten von $m_0 c$. Dabei bezeichne m_0 die Ruhemasse des Teilchens.
c) Senkrecht zur Geschwindigkeit des Teilchens bewegt sich ein zweiter Beobachter mit der Geschwindigkeit $v_\mathrm{x} = 0{,}5\,c$. Fertigen Sie eine Skizze der Bezugssysteme an und schreiben Sie die Lorentztransformationen zwischen den beiden Bezugssystemen auf.
d) Berechnen Sie den Impuls des Teilchens im Bezugssystem des bewegten Beobachters parallel und senkrecht und zu seiner Geschwindigkeit.

a) Die Formel für den relativistischen Impuls lautet

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- $\vec{v}$ bzw. $v = |\vec{v}|$ ist die Geschwindigkeit der Masse m_0
- m_0 ist die Ruhemasse des Teilchens

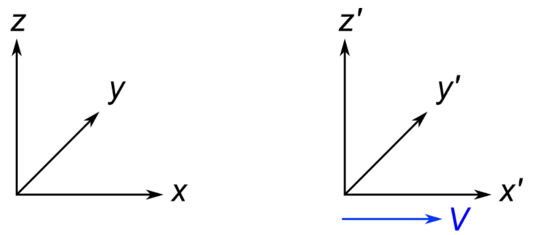
(1 Punkt)

b) Impuls des Teilchens

$$p = \frac{m_0 0,5c}{\sqrt{1 - 0,5^2}} = 0,577\, m_0 c$$

(1 Punkt)

c) Skizze der Bezugssysteme



Die Lorentztransformationen sind

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y' \quad \text{und} \quad t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

und

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y \quad \text{und} \quad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(1 Punkt)

d) Mit der Lorentztransformation ist die Geschwindigkeit des Teilchens parallel zur Geschwindigkeit des Beobachters

$$v'_\mathrm{x} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = -v = -0{,}5c$$

Gemäß den Lorentztransformationen ist $\mathrm{d}x' = \frac{-v\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ und $\mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Die Geschwindigkeit senkrecht ist

$$v'_\mathrm{y} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathrm{v}_\mathrm{y} = \sqrt{1-0{,}5^2}\,0,5\,c = 0{,}433\,c$$

Die Geschwindigkeit v des Teilchens im Bezugssystem des bewegten Beobachters ist

$$v'^2 = (v'_\mathrm{x})^2 + (v'_\mathrm{y})^2 = (0{,}5^2 + 0{,}433^2)c^2 = 0{,}438\,c^2$$

Der Impuls des Teilchens im Bezugssystem des bewegten Beobachters ist

$$p'_\mathrm{x} = -\frac{m_0 0{,}5c}{\sqrt{1-0{,}438}} = -0{,}667\,m_0 c$$

$$p'_\mathrm{y} = \frac{m_0 0{,}433c}{\sqrt{1-0{,}438}} = 0{,}577\,m_0 c = p_\mathrm{y}$$

(1 Punkt)

4. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 17) (4 Punkte)

a) Geben Sie die Schrödingergleichung für ein Elektron an, das sich im elektrischen Feld eines Protons bewegt.
b) Schreiben Sie die Energieeigenwerte des Elektrons auf.
c) Welche Quantenzahlen bestimmen die Wellenfunktionen des Elektrons, wenn der Spin des Elektrons nicht berücksichtigt wird.
d) Welche Zahlenwerte haben diese Quantenzahlen im Grundzustand und im ersten angeregten Zustand des Elektrons?

a) Schrödingergleichung für ein Elektron im elektrischen Feld eines Protons

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left\{-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m_\mathrm{e}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}\right\}\psi$$

(1 Punkt)

b) Die Energieeigenwerte sind

$$E_n = -\frac{R}{n^2} \quad \text{und} \quad n = 1, 2, 3, ...$$

(1 Punkt)

c) Die Wellenfunktionen werden von
- der Hauptquantenzahl n
- der Bahndrehimpulsquantenzahl ℓ
- und der magnetischen Quantenzahl m

bestimmt.

(1 Punkt)

d) Die Quantenzahlen haben im Grundzustand die Zahlenwerte
- $n = 1$
- $\ell = 0$
- $m = 0$

und im ersten angeregten Zustand
- $n = 2$
- $\ell = 0$
- $m = 0$

und
- $n = 2$
- $\ell = 1$
- $m = 0, \pm 1$

(1 Punkt)

5. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 18) (4 Punkte)

a) Schreiben Sie die Gleichungen auf, die den Spin des Elektrons definieren und erläutern Sie die verwendeten Größen.
b) Welche Werte haben die Quantenzahlen des Elektronenspins?
c) Was ist die Ursache für die sogenannte Spin-Bahn-Kopplung?
d) Schreiben Sie den Hamiltonoperator der Spin-Bahn-Kopplung auf und geben Sie seine Eigenwerte für den angeregten Zustand des Wasserstoffatoms mit der Hauptquantenzahl $n = 2$ an.

a) Die Eigenwertgleichungen des Elektronenspins sind

$$\begin{aligned}\hat{\vec{s}}^{\,2}\,|s,m_s\rangle &= s(s+1)\hbar^2\,|s,m_s\rangle \\ \hat{s_z}\,|s,m_s\rangle &= m\hbar\,|s,m_s\rangle\end{aligned}$$

- $\hat{\vec{s}}^{\,2}$ Quadrat des Spinoperators
- $\hat{s_z}$ z-Komponente des Spinoperators
- $|s,m_s\rangle$ Dirac-Notation der Eigenzustände des Spinoperators
- s und m_s Quantenzahlen des Spinoperators

(1 Punkt)

b) Die Quantenzahlen des Spinoperators haben die Zahlenwerte
- $s = 1/2$
- $m_s = \pm 1/2$

(1 Punkt)

c) Das magnetische Moment der Elektronenspins richtet sich im Magnetfeld aus, das durch die Bahnbewegung des Elektrons verursacht wird.

(1 Punkt)

d) Der Hamiltonoperator der Spin-Bahn-Kopplung ist

$$\hat{H}_{s,\ell} = \frac{\xi}{\hbar^2}\hat{\vec{s}}\cdot\hat{\vec{\ell}}$$

Die Energieeigenwerte des Hamiltonoperators der Spin-Bahn-Kopplung sind

$$E_{s,\ell,j} = \frac{\xi}{2}\left(j(j+1) - s(s+1) - \ell(\ell+1)\right)$$

Der erste angeregte Zustand des Wasserstoffatoms mit der Hauptquantenzahl $n = 2$ besteht aus einem s-Orbital ($\ell = 0$) und einem p-Orbital ($\ell = 1$)
- Der Energieeigenwert für das s-Orbital ist $E_{s,\ell=0,j=s} = 0$
- Ist Gesamtdrehimpuls des p-Orbitals $j = 1/2$, dann ist der Energieeigenwert

$$E_{s,\ell=1,j=1/2} = \frac{\xi}{2}(-2) = -\xi$$

- Ist der Gesamtdrehimpuls $j = 3/2$, dann ist der Energieeigenwert

$$E_{s,\ell=1,j=3/2} = \frac{\xi}{2}((3/2)(5/2) - (1/2)(3/2) - 2) = +\frac{\xi}{2}$$

(1 Punkt)

6. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 20) (4 Punkte)

Der Atomkern von Helium enthält zwei Protonen und kann deshalb zwei Elektronen binden.

a) Im Grundzustand besetzen die beiden Elektron das 1s-Orbital. Geben Sie für den Grundzustands von Helium die Quantenzahlen und das Termsymbol an.
b) Die Anregungen mit der kleinsten Energie ergeben sich, wenn ein Elektron in das 2s-Orbital angeregt wird. Geben Sie die Quantenzahlen und Termsymbole der Elektronenkonfiguration [1s2s] an.
c) Skizzieren Sie das Energieniveauschema dieser angeregten Zustände.
d) Wie macht sich die Austauschwechselwirkung in diesem Energieniveauschema bemerkbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Quantenzahlen im Grundzustand der [1s^2]-Konfiguration
- Gesamtspin $S = 0$
- Gesamtbahndrehimpuls $L = 0$
- Gesamtdrehimpuls $J = 0$

Das Termsymbol für den Grundzustand ist

$$^{2S+1}L_J \quad \rightarrow \quad {}^1\mathrm{S}_0$$

(1 Punkt)

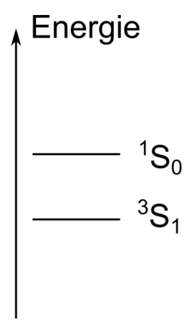
b) Quantenzahlen der [1s2s]-Konfiguration
- Gesamtspin $S = 0$ oder $S = 1$
- Gesamtbahndrehimpuls $L = 0$
- Gesamtdrehimpuls $J = 0$ oder $J = 1$

Die Termsymbole der [1s2s]-Konfiguration sind

$$^1\mathrm{S}_0 \quad \text{und} \quad {}^3\mathrm{S}_1$$

(1 Punkt)

c) Energieniveausschem der [1s2s]-Konfiguration



(1 Punkt)

d) Das Niveau $^1\mathrm{S}_0$ hat aufgrund der Austauschwechselwirkung eine größere Energie als die $^3\mathrm{S}_1$ Niveaus, da aufgrund des Pauli-Prinzips im Zustand $^1\mathrm{S}_0$ die Coulombabstoßung zwischen den Elektronen effektiver ist als im $^3\mathrm{S}_1$.(1 Punkt)

7. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 21) (4 Punkte)

a) Was versteht man unter der Fermienergie?
b) Das 3s-Elektron von Natrium wird im Natriummetall zu einem Leitungselektron. Berechnen Sie die Fermiwellenzahl von Natrium.
c) Wie ist die Zustandsdichte der Leitungselektronen definiert? Erläutern Sie die verwendeten Größen.
d) Skizzieren Sie die Zustandsdichte, die sich für ein freies Elektronengas ergibt als Funktion der Energie.

Zahlenwerte: Die Dichte von Natrium ist $\rho = 0{,}968\,\mathrm{gcm}^{-3}$ und die Atommasse $22{,}98\,u$

a) Die Fermienergie ist die höchste Energie, die Leitungselektronen bei der Temperatur $T = 0$ haben können.

(1 Punkt)

b) Die Fermiwellenzahl k_F ist die größte Wellenzahl die Leitungselektronen bei der Temperatur $T = 0$ haben können. Es ist

$$N = 2\frac{\frac{4\pi k_\mathrm{F}^3}{3}}{\frac{(2\pi)^3}{V}} \quad \to \quad k_\mathrm{F} = \left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{1/3}$$

Dabei bezeichnet N die Anzahl der Leitungselektronen und V das Volumen des Natriumkristalls. Mit der Dichte

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{22{,}98\,u\,N}{V}$$

folgt für die Dichte der Leitungselektronen

$$\frac{N}{V} = \frac{\rho}{22{,}98\,\mathrm{u}} = \frac{0{,}968\,\mathrm{gcm}^{-3}}{22{,}98 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{g}} = 0{,}0254 \cdot 10^{24}\,\mathrm{cm}^{-3}$$

und die Fermiwellenzahl ist

$$k_\mathrm{F} = \left(3\pi^2\, 0{,}0254 \cdot 10^{24}\,\mathrm{cm}^{-3}\right)^{1/3} = 0{,}91 \cdot 10^{8}\,\mathrm{cm}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad 0{,}91 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}^{-1}$$

(1 Punkt)

c) Definition der Zustandsdichte

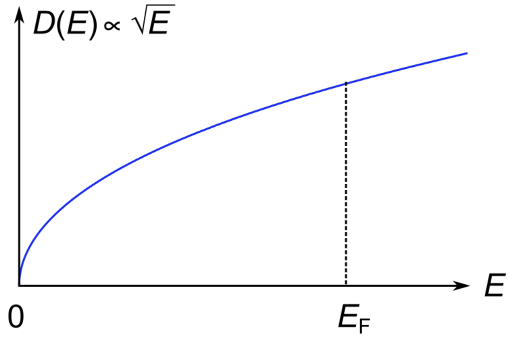
$$D(E) = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}E}$$

dabei ist

- $\mathrm{d}N$ die Anzahl der Zustände der Leitungselektronen im Energieintervall $\mathrm{d}E$
- V das Volumen des Kristalls

(1 Punkt)

d) Die Zustandsdichte der Leitungselektronen ist proportional zur Wurzel aus der Energie der Leitungselektronen



(1 Punkt)

8. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 21) (4 Punkte)

Die Austrittsarbeit von festem Natrium beträgt $W_A = 2{,}28\,\mathrm{eV}$ und die Fermienergie $E_F = 3{,}24\,\mathrm{eV}$. Natrium wird mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 200\,\mathrm{nm}$ beleuchtet.

a) Welchen maximalen Wert hat die kinetische Energie der dabei erzeugten Photoelektronen?
b) Welchen kleinsten Wert hat die kinetische Energie der Photoelektronen?
c) Berechnen Sie die Grenzwellenlänge, für die der photoelektrische Effekt gerade noch beobachtet werden kann.
d) Mit einem Spektrometer kann die Anzahl der Photoelektronen als Funktion der Energie gemessen werden. Skizzieren Sie das Spektrum der Photoelektronen als Funktion der kinetischen Energie der Photoelektronen.

a) Die Energie des Photons ist

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}\, 3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{ms^{-1}}}{200 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 6{,}21\,\mathrm{eV}$$

Der größte Wert der kinetischen Energie der Photoelektronen ist

$$E_{\mathrm{kin}} = E - W_A = 6{,}21\,\mathrm{eV} - 2{,}28\,\mathrm{eV} = 3{,}93\,\mathrm{eV}$$

(1 Punkt)

b) Der kleinste Wert der kinetischen Energie der Photoelektronen ist

$$E_{\mathrm{kin}} = E - W_A - E_F = 6{,}21\,\mathrm{eV} - 2{,}28\,\mathrm{eV} - 3{,}24\,\mathrm{eV} = 0{,}69\,\mathrm{eV}$$

(1 Punkt)

c) Die Grenzwellenlänge ergibt sich, wenn die am schwächsten gebundenen Elektronen gerade noch bzw. gerade nicht mehr durch ein Photon ausgelöst werden können

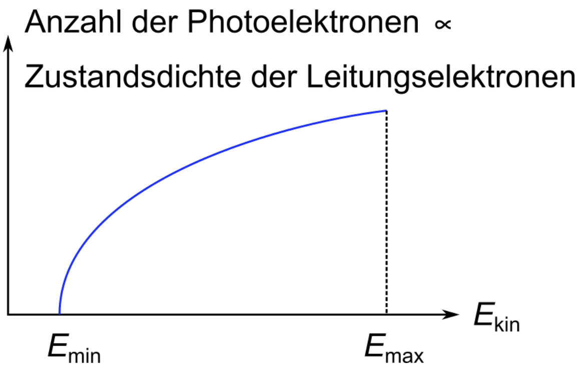
$$\lambda_G = \frac{hc}{W_A} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eV}\, 3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{ms^{-1}}}{2{,}28\,\mathrm{eV}} = 5{,}45 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

Für $\lambda > 545\,\mathrm{nm}$ werden keine Photoelektronen mehr ausgelöst.

(1 Punkt)

d) Spektrum der Photoelektronen: Das Spektrum ist proportional zur Zustandsdichte der Leitungselektronen, die wiederum proportional zur Wurzel der Elektronenenergie ist.

(1 Punkt)


Anzahl der Photoelektronen ∝
Zustandsdichte der Leitungselektronen
E_{kin}
E_{min}
E_{max}

1. Aufgabe (4 Punkte)

a) Schreiben Sie die Wellengleichungen für eine dreidimensionale elektromagnetische Welle auf.
b) Skizzieren Sie die räumliche Variation der elektrischen und magnetischen Feldstärke einer ebenen elektromagnetischen Welle, die sich frei ausbreiten kann.
c) Mit einer Antenne sollen zwischen zwei Metallplatten, die sich parallel zueinander in einen Abstand von $\ell = 1\,\mathrm{m}$ gegenüber stehen, stehende elektromagnetische Wellen angeregt werden. Mit welchen Frequenzen muss die Antenne dazu senden?
d) Skizzieren Sie für die Mode mit der kleinsten Frequenz die räumliche Variation der elektrischen und magnetischen Feldstärke.

2. Aufgabe (4 Punkte)

a) Wie lautet die Interferenzbedingung für konstruktive Interferenz bei einem Gitter mit N Spalten?
b) Wie lautet die Bedingung für destruktive Interferenz bei einem Gitter mit N Spalten?
c) Skizzieren Sie den Verlauf der Intensität nach einem Gitter mit 5 Spalten als Funktion des Gangunterschieds benachbarter Teilstrahlen.
d) Skizzieren Sie den Verlauf der Intensität nach einem Gitter mit 5 Spalten, wenn die Spaltöffnung ein Fünftel des Spaltabstands beträgt.

3. Aufgabe (4 Punkte)

a) Wie lautet die Braggsche Bedingung für konstruktive Interferenz bei der Beugung von Röntgenstrahlen an einem Kristallgitter?
b) Wie können mit den Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$, welche die primitive Elementarzelle eines Kristallgitters aufspannen, die Basisvektoren des reziproken Gitters berechnet werden?
c) Wie lautet die Laue-Bedingung für konstruktive Interferenz bei der Beugung von Röntgenstrahlen an einem Kristallgitter?
d) Zeigen Sie anhand einer Skizze, welcher Zusammenhang bei konstruktiver Interferenz zwischen den Braggschen Netzebenen eines Kristallgitters und dem zugehörigen reziproken Gittervektor besteht. Wie ist der Vektor orientiert und welche Länge hat er?

4. Aufgabe (4 Punkte)

a) Schreiben Sie die Formel für die Zeitdilatation auf und erklären Sie die Bedeutung der physikalischen Größen, die in die Formel eingehen.
b) Beschreiben Sie ein Experiment, mit dem man den Effekt der Zeitdilatation nachweisen kann.
c) Schreiben Sie die Formel für die Ruheenergie einer Masse m_0 auf.
d) Um wieviel % erhöht sich die Energie einer Masse m_0, wenn ihre Geschwindigkeit 50% der Lichtgeschwindigkeit beträgt?

Bitte beachten Sie die Rückseite.

5. Aufgabe (4 Punkte)

a) Skizzieren Sie das elektromagnetische Spektrum der Sonne und geben Sie den Wellenlängenbereich an, in dem das menschliche Auge sensitiv ist.
b) Schätzen Sie mit dem Spektrum der Sonne die Temperatur der Sonnenoberfläche ab.
c) Berechnen Sie mit der Temperatur der Sonnenoberfläche die gesamte elektromagnetische Strahlungsleistung der Sonne.
d) Bestimmen Sie die Solarkonstante, d.h. die Strahlungsleistung pro Quadratmeter (m^2) bezogen auf eine Empfängerfläche, die senkrecht zur einfallenden Strahlung am „oberen Rand" der Atmosphäre ausgerichtet ist.

6. Aufgabe (4 Punkte)

a) Schreiben Sie die Formel für die Energieniveaus des Wasserstoffatoms auf, die man aus der Lyman-, Balmer-, und Paschen-Serie ablesen kann.
b) Berechnen Sie die kleinste Wellenlänge des Wasserstoffspektrums.
c) Niels Bohr findet 1913, dass der Bahndrehimpuls quantisiert ist. Erläutern Sie, wie er zu diesem Ergebnis kommt.
d) Der Bahndrehimpuls ist durch zwei Quantenzahlen bestimmt. Wie hängt der Bahndrehimpulsvektor mit diesen Quantenzahlen zusammen?

7. Aufgabe (4 Punkte)

a) Durch welche Quantenzahlen wird der Spin eines Elektrons charakterisiert?
b) Was besagt das Pauli-Prinzip?
c) Worauf beruht die Austauschwechselwirkung?
d) Welchen Gesamtspin hat eine Elektronenkonfiguration von 4 Elektronen im Grundzustand?

8. Aufgabe (4 Punkte)

a) Was versteht man unter der Fermi-Kugel?
b) Wie hängt der Radius der Fermi-Kugel mit der Dichte der Leitungselektronen zusammen?
c) Wie ist die Zustandsdichte der Leitungselektronen definiert?
d) Wie hängt die Wärmekapazität der Leitungselektronen von der Temperatur ab? Begründen Sie Ihre Antwort.

Bitte verwenden Sie für die Konstanten die folgenden Werte:

Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^8$ m/s
Plancksche Konstante:	$h = 4{,}14 \cdot 10^{-15}$ eVs $= 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Ws^2
Stefan-Boltzmann Konstante:	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Wm^{-2}K^{-4}
Wiensche Konstante:	$b = 2{,}9$ mm $\cdot$ K
Radius der Sonne:	$r_S = 6{,}96342 \cdot 10^8$ m
mittlerer Abstand Sonne-Erde:	$r_{SE} \approx 150 \cdot 10^9$ m
Rydberg-Energie:	$R = 13{,}6$ eV

1. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 6) (4 Punkte)

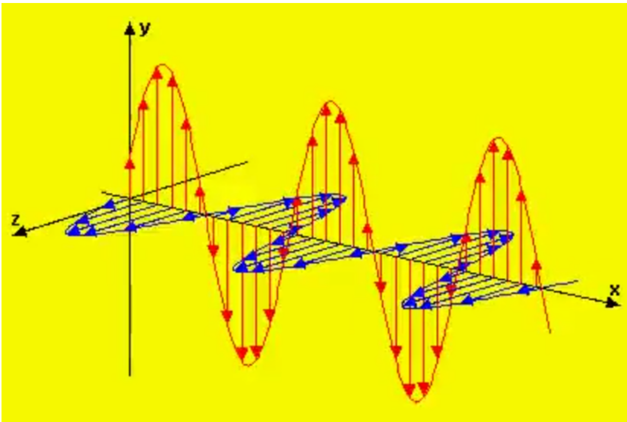
a) Schreiben Sie die Wellengleichungen für eine dreidimensionale elektromagnetische Welle auf.
b) Skizzieren Sie die räumliche Variation der elektrischen und magnetischen Feldstärke einer ebenen elektromagnetischen Welle, die sich frei ausbreiten kann.
c) Mit einer Antenne sollen zwischen zwei Metallplatten, die sich parallel zueinander in einen Abstand von $\ell = 1\,\text{m}$ gegenüber stehen, stehende elektromagnetische Wellen angeregt werden. Mit welchen Frequenzen muss die Antenne dazu senden?
d) Skizzieren Sie für die Mode mit der kleinsten Frequenz die räumliche Variation der elektrischen und magnetischen Feldstärke.

a)

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{E}(\vec{r},t)$$
$$\frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \vec{B}(\vec{r},t).$$

1 Punkt

b) Die roten Vektoren bezeichnen das elektrische und die blauen Vektoren das magnetische Feld der Welle



1 Punkt

c) Resonanzbedingung der stehenden Welle

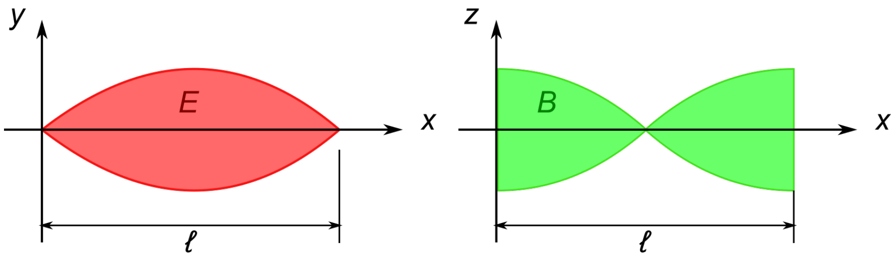
$$\ell = n\frac{\lambda_n}{2} \quad \rightarrow \quad \lambda_n = \frac{2\ell}{n}$$

Die Frequenzen sind

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = n \cdot \frac{c}{2\ell} = n \cdot \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{2\,\text{m}} = n \cdot 150\,\text{MHz}$$

1 Punkt

d) Die Antenne sendet entlang der x-Achse, die Metallplatten sind senkrecht dazu orientiert, d.h. die Flächennormalen zeigen in Richtung der x-Achse. Das elektrische und magnetische Feld sind senkrecht zueinander orientiert und um 90° phasenverschoben.



1 Punkt

2. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 6) (4 Punkte)

a) Wie lautet die Interferenzbedingung für konstruktive Interferenz bei einem Gitter mit N Spalten?
b) Wie lautet die Bedingung für destruktive Interferenz bei einem Gitter mit N Spalten?
c) Skizzieren Sie den Verlauf der Intensität nach einem Gitter mit 5 Spalten als Funktion des Gangunterschieds benachbarter Teilstrahlen.
d) Skizzieren Sie den Verlauf der Intensität nach einem Gitter mit 5 Spalten, wenn die Spaltöffnung ein Fünftel des Spaltabstands beträgt.

a) Die Interferenzbedingung für konstruktive Interferenz ist

$$\Delta s = n \cdot \lambda \quad \text{und} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Δs bezeichnet den Gangunterschied benachbarter Strahlen.

1 Punkt

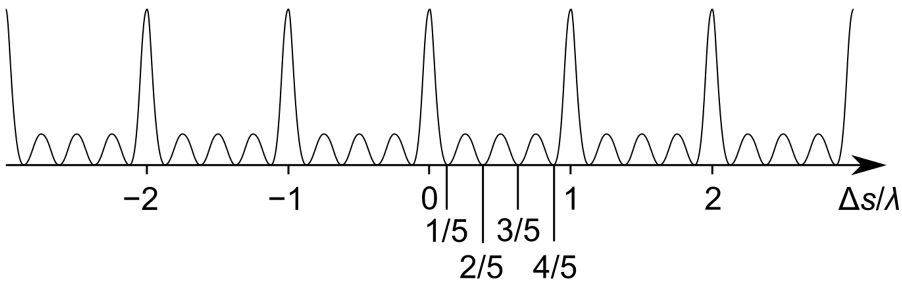
b) Die Interferenzbedingung für destruktive Interferenz ist

$$\Delta s = n \cdot \frac{\lambda}{5} \quad \text{und} \quad n = \pm 1, \pm 2, ... \quad \text{aber kein Vielfaches von} \ \pm 5$$

Δs bezeichnet den Gangunterschied benachbarter Strahlen.

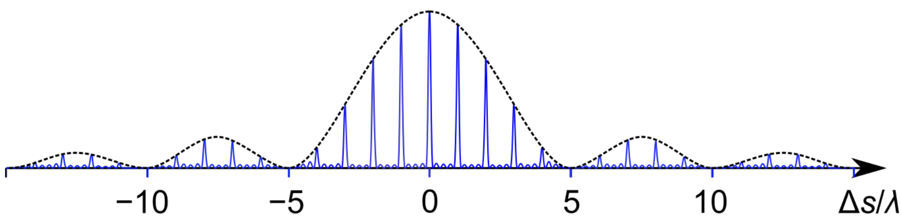
1 Punkt

c) Skizze der Intensität als Funktion des Gangunterschieds Δs benachbarter Strahlen



1 Punkt

d) Die 5., 10., etc -Ordnung wird durch die Beugung am Einzelspalt komplett ausgelöscht. Δs bezeichnet in der Abbildung den Gangunterschied zwischen zwei Strahlen, die benachbarte Spalte im gleichen Anstand vom Rand des jeweiligen Spalts passieren.



1 Punkt

3. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 12) (4 Punkte)

a) Wie lautet die Braggsche Bedingung für konstruktive Interferenz bei der Beugung von Röntgenstrahlen an einem Kristallgitter?

b) Wie können mit den Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$, welche die primitive Elementarzelle eines Kristallgitters aufspannen, die Basisvektoren des reziproken Gitters berechnet werden?

c) Wie lautet die Laue-Bedingung für konstruktive Interferenz bei der Beugung von Röntgenstrahlen an einem Kristallgitter?

d) Zeigen Sie anhand einer Skizze, welcher Zusammenhang bei konstruktiver Interferenz zwischen den Braggschen Netzebenen eines Kristallgitters und dem zugehörigen reziproken Gittervektor besteht. Wie ist der Vektor orientiert und welche Länge hat er?

a) Braggsche Interferenzbedingung

$$n \cdot \lambda = 2d \sin \alpha_n$$

d bezeichnet den Abstand der Netzebenen.

1 Punkt

b) Die Basisvektoren des reziproken Gitters sind

$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{V_{\mathrm{EZ}}}(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$$
$$\vec{b}_2 = \frac{2\pi}{V_{\mathrm{EZ}}}(\vec{a}_3 \times \vec{a}_1)$$
$$\vec{b}_3 = \frac{2\pi}{V_{\mathrm{EZ}}}(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)$$

Dabei bezeichnet $V_{\mathrm{EZ}} = \vec{a}_1(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$ das Volumen der primitiven Elementarzelle.

1 Punkt

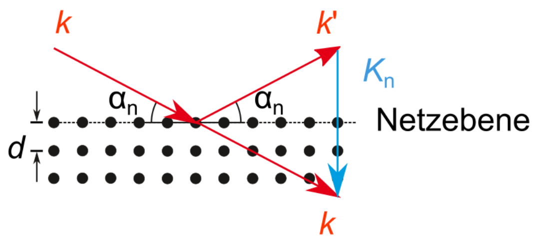
c) Die Laue-Bedingung für konstruktive Interferenz ist

$$\vec{K} = \vec{k} - \vec{k'}$$

Dabei ist $\vec{k}$ der Wellenzahlvektor der einlaufenden Welle und $\vec{k'}$ der Wellenzahlvektor der gestreuten Welle .

1 Punkt

d) Der reziproke Gittervektor steht senkrecht auf den Netzebenen und hat die Länge $k \sin \alpha_n = \frac{(2\pi)}{\lambda} \sin \alpha_n = K_n/2 = \frac{(2\pi)}{\lambda}\frac{n\lambda}{(2d)} \quad \rightarrow \quad K_n = n\frac{2\pi}{d}$



1 Punkt

4. Aufgabe (4 Punkte)

a) Schreiben Sie die Formel für die Zeitdilatation auf und erklären Sie die Bedeutung der physikalischen Größen, die in die Formel eingehen.
b) Beschreiben Sie ein Experiment, mit dem man den Effekt der Zeitdilatation nachweisen kann.
c) Schreiben Sie die Formel für die Ruheenergie einer Masse m_0 auf.
d) Um wieviel % erhöht sich die Energie einer Masse m_0, wenn ihre Geschwindigkeit 50% der Lichtgeschwindigkeit beträgt?

a) Zeitdilatation $\tau(v)$

$$\tau(v) = \tau_0 \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

τ_0 ist die Eigenzeit im Ruhesystem der Uhr und v die Geschwindigkeit, mit der die Bewegung der Uhr beobachtet wird.

1 Punkt

b) Am direktesten kann man den Effekt der Zeitdilatation an der Lebensdauer von Elementarteilchen beobachten.
- Elementarteilchen zerfallen gemäß dem Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 \exp(-t/\tau)$.
- Die Lebensdauer τ nimmt mit der Geschwindigkeit zu.
- Je größer die Geschwindigkeit der Teilchen wird, desto weniger Teilchen zerfallen innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls.

1 Punkt

c) Ruheenergie

$$E_0 = m_0 c^2$$

1 Punkt

d) Geschwindigkeit $v = 0{,}5c$

$$E(v) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - 0{,}5^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{0{,}75}} = 1{,}155\, m_0 c^2$$

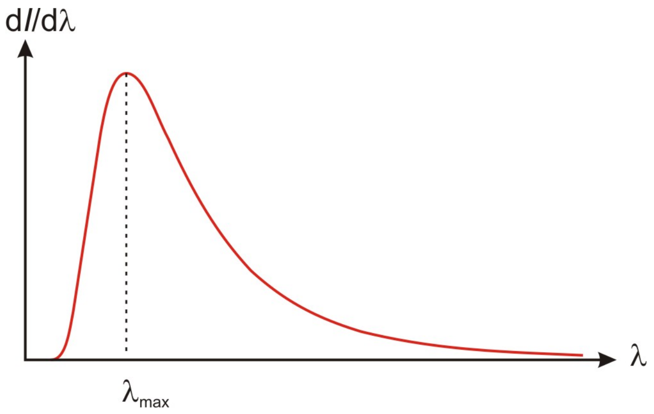
Die Energie erhöht sich um rund 16%.

1 Punkt

5. Aufgabe (4 Punkte)

a) Skizzieren Sie das elektromagnetische Spektrum der Sonne und geben Sie den Wellenlängenbereich an, in dem das menschliche Auge sensitiv ist.
b) Schätzen Sie mit dem Spektrum der Sonne die Temperatur der Sonnenoberfläche ab.
c) Berechnen Sie mit der Temperatur der Sonnenoberfläche die gesamte elektromagnetische Strahlungsleistung der Sonne.
d) Bestimmen Sie die Solarkonstante, d.h. die Strahlungsleistung pro Quadratmeter (m^2) bezogen auf eine Empfängerfläche, die senkrecht zur einfallenden Strahlung am „oberen Rand“ der Atmosphäre ausgerichtet ist.

a) Der sichtbare Bereich des elektromagnetischen Spekrum liegt zwischen $\lambda \approx 400\,\text{nm}$ und $\lambda \approx 700\,\text{nm}$



1 Punkt

b) Mit den Wienschen Verschiebungsgesetz und $\lambda_{\text{max}} \approx 550\,\text{nm}$

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T}$$

und

$$T \approx \frac{2{,}9\,\text{mm}}{550\,\text{nm}} = 5273\,\text{K}$$

Hinweis: Sie können für die Rechnung auch einen anderen Zahlenwert zwischen 400 nm ($T = 7250$ K) und 700 nm ($T = 4143$ K) vewenden.

1 Punkt

c) Die gesamte Strahlungsleistung ergibt sich mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz für $T = 5273$ K)

$$P = 4\pi r_S^2 \sigma \cdot T^4 = 4\pi \cdot (6{,}96342 \cdot 10^8\,\text{m})^2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4} \cdot (5273\,\text{K})^4$$

$$P = 2{,}67 \cdot 10^{26}\,\text{W}$$

bzw. für $T = 7250$ K: $P = 9{,}54 \cdot 10^{26}$ W und für $T = 4143$ K: $P = 1{,}02 \cdot 10^{26}$ W

1 Punkt

d) Solarkonstante für $T = 5273$ K

$$E_0 = \frac{P}{4\pi r_{SE}^2} = \frac{2{,}67 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}}{4\pi \cdot (150 \cdot 10^9\,\mathrm{m})^2} = 944\,\mathrm{Wm^{-2}}$$

bzw. für $T = 7250$ K: $E_0 = 3374\,\mathrm{Wm^{-2}}$ und für $T = 4143$ K: $E_0 = 361\,\mathrm{Wm^{-2}}$

1 Punkt

6. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 13, 15 und 17) (4 Punkte)

a) Schreiben Sie die Formel für die Energieniveaus des Wasserstoffatoms auf, die man aus der Lyman-, Balmer-, und Paschen-Serie ablesen kann.
b) Berechnen Sie die kleinste Wellenlänge des Wasserstoffspektrums.
c) Niels Bohr findet 1913, dass der Bahndrehimpuls quantisiert ist. Erläutern Sie, wie er zu diesem Ergebnis kommt.
d) Der Bahndrehimpuls ist durch zwei Quantenzahlen bestimmt. Geben Sie den Wertebereich dieser Quantenzahlen an, und zeigen Sie, wie der Bahndrehimpulsvektor mit diesen Quantenzahlen zusammen hängt.

a) Aus dem Spektren ergibt sich die Formel für die Energie der Niveaus

$$E_n = -\frac{R}{n^2}$$

1 Punkt

b) Der Übergang zwischen den Energieniveaus mit der $n = 1$ und $n \to \infty$ hat die größte Energie, d.h.

$$E_{\text{max}} = \mathrm{R} = 13{,}6\,\text{eV}$$

Mit dem Planckschen Gesetz $E = h\nu$ und $\lambda = c/\nu$

$$\lambda_{\text{min}} = \frac{c}{\nu_{\text{max}}} = \frac{hc}{E_{\text{max}}} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\text{eVs} \cdot 3 \cdot 10^{8}\,\text{ms}^{-1}}{13{,}6\,\text{eV}} = 91{,}3\,\text{nm}$$

1 Punkt

c) - Niels Bohr nimmt an, dass sich die Elektronen auf bestimmten Kreisbahnen um den Atomkern bewegen, die durch einen Quantenzahl bestimmt werden.
- Da der Drehimpuls die Kreisbahn bestimmt, muss der Drehimpuls quantisiert sein, wenn die Energie quantisiert ist, was die Spektren des Wasserstoffatoms deutlich zeigen.

1 Punkt

d) - Die Quantenzahl ℓ bestimmt die Länge des Drehimpulsvektors $|\vec{L}| = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$ und hat die Werte $\ell = 0, 1, 2, ...$

1 Punkt

- Die Quantenzahl m bestimmt die z-Komponente des Drehimpulsvektors $L_z = m\hbar$ und hat die Werte $\mathrm{m} = 0, \pm 1, \pm 2, ... \pm \ell$.

1 Punkt

7. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 18 und 20) (4 Punkte)

a) Durch welche Quantenzahlen wird der Spin eines Elektrons charakterisiert?
b) Was besagt das Pauli-Prinzip?
c) Worauf beruht die Austauschwechselwirkung bei Atomen?
d) Welchen Gesamtspin hat eine atomare Konfiguration von vier 3d-Elektronen (Hauptquantenzahl $n = 3$, Drehimpulsquantenzahl $\ell = 2$) im Grundzustand?

a) Der Spin eines Elektrons hat die Quantenzahlen $s = 1/2$ und $m_\mathrm{s} = \pm 1/2$.
1 Punkt

b) Das Pauli-Prinzip besagt, dass in einer Elektronenkonfiguration sich die Elektronen in mindestens einer Quantenzahl unterscheiden müssen, d.h. jeder Quantenzustand kann nur von einem Elektron besetzt werden.
1 Punkt

c) Die Austauschwechselwirkung beruht auf
- dem Pauli-Prinzip und
- der Coulomb-Abstoßungskraft zwischen den Elektronen

1 Punkt

Elektronen, die sich in der Spinquantenzahl m_s unterscheiden, können das gleiche Orbital besetzten. Die Elektronen kommen sich sehr nahe und die Coulomb-Kraft reduziert die Bindungsenergie.
Elektronen mit der selben Spinquantenzahl m_s müssen verschieden Orbitale besetzen. Die Abstände zwischen den Elektronen sind deshalb größer und der Einfluss der Coulomb-Kraft kleiner.
Die Austauchwechselwirkung führt im Atom dazu, dass sich die Spins der Elektronen bevorzugt parallel ausrichten.

d) Es gibt fünf 3d-Orbitale mit den Quantenzahlen $m = 0, \pm 1, \pm 2$. Haben die Elektronen die selbe Spinquantenzahl m_s, dann können sie die verschiedenen 3d-Orbitale besetzen und dadurch den Einfluss der Coulomb-Kraft minimieren. Die vier Elektronen haben im Grundzustand den Gesamtspin $S = 4 \times 1/2 = 2$.
1 Punkt

8. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 21) (4 Punkte)

a) Was versteht man unter der Fermi-Kugel und der Fermi-Energie?
b) Wie hängt der Radius der Fermi-Kugel im Sommerfeld-Modell mit der Dichte der Leitungselektronen zusammen?
c) Wie ist die Zustandsdichte der Leitungselektronen definiert?
d) Wie hängt die Wärmekapazität der Leitungselektronen von der Temperatur ab? Begründen Sie Ihre Antwort.

a)
- Die Fermi-Kugel ergibt sich für Leitungselektronen, die sich frei durch ein Metall bewegen können.
- Die Quantenzustände dieser Leitungselektronen werden durch ebene Wellen beschrieben und sind durch einen Wellenzahlvektor $\vec{k}$ festgelegt.
- Die Fermi-Kugel umgibt alle $\vec{k}$-Zustände, die im Grundzustand mit Elektronen besetzt sind.

1/2 Punkt

- Die Fermi-Energie ist die größte Energie, die Leitungselektronen im Grundzustand haben können.

1/2 Punkt

b) Der Radius der Fermi-Kugel k_F ist proportional zur dritten Wurzel der Elektronendichte.

1 Punkt

$$\left(\text{Die exakte Formel ist} \quad N = 2\frac{4\pi k_F^3/3}{(2\pi)^3/V} \quad \rightarrow \quad k_F^3 = 3\pi^2\frac{N}{V}\right)$$

c) Die Zustandsdichte der Leitungselektronen gibt die Anzahl der $\vec{k}$-Zustände dN mit der Energie E im Energieintervall dE.

1 Punkt

$$\left(\text{Die exakte Formel ist} \quad D(E) = \frac{1}{V}\frac{dN}{dE}\bigg|_E\right)$$

d)
- Die Wärmekapazität der Leitungselektronen ist proportional zur Temperatur T.
- Da $E_F >> k_B T$ gilt, kann nur der kleine Anteil der Leitungselektronen mit der Fermi-Energie thermisch angeregt werden.
- Die übrigen Leitungselektronen sind aufgrund des Pauli-Prinzip in ihren $\vec{k}$-Zuständen blockiert.

1 Punkt

1. Aufgabe (4 Punkte)

a) Wie lautet die Wellengleichung und die Formel für die Geschwindigkeit einer Seilwelle?
b) Erklären Sie, was man unter der Phasengeschwindigkeit einer Welle versteht.
c) Schreiben Sie die Wellenfunktion einer harmonischen ebenen Schallwelle auf.

d) Wie ändert sich die Geschwindigkeit einer Schallwelle in einem Gas, wenn der Druck verdoppelt wird?

2. Aufgabe (4 Punkte)

Ein optisches Transmissionsgitter mit sehr vielen Spalten wird senkrecht mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 600$ nm beleuchtet.

a) Unter welchen Winkeln zum zentralen Hauptmaximum können die Hauptmaxima der Intensität nach dem Gitter beobachtet werden, wenn der Abstand der Spalte $a = 6\,\mu$m beträgt?
b) Ein Doppelspalt wird mit Licht der gleichen Wellenlänge beleuchtet. Unter welchen Winkeln können die Maxima der Intensität nach dem Doppelspalt beobachtet werden, wenn der Spaltabstand $b = 2\,\mu$m beträgt?
c) Skizzieren Sie den Verlauf der Intensität nach dem Doppelspalt auf dem Schirm. Tragen Sie dazu die Intensität über $\sin \alpha$ auf und vernachlässigen Sie die endliche Breite der Spalte. α bezeichne den Ablenkwinkel.
d) Beim Gitter aus Teilaufgabe a) wird jeder Spalt durch einen Doppelspalt aus Teilaufgabe b) ersetzt. Skizzieren Sie den Verlauf der Intensität nach diesem Gitter.

3. Aufgabe (4 Punkte)

a) Für was steht das Abkürzung „LASER“?
b) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit Laser-Licht entstehen kann?
c) Erklären Sie mittels einer Skizze, wie die Bedingung zur Erzeugung von Laser-Licht mit einem Vier-Energie-Niveau-Schema eingestellt werden kann.
d) Worin unterscheidet sich das Vier-Niveau-Schema eines gepulsten Lasers von dem eines kontinuierlichen Lasers?

4. Aufgabe (4 Punkte)

a) Welche Gesamtenergie haben Elektronen, wenn sie die mit einer Spannung von 2 MV aus der Ruhe heraus beschleunigt werden?
b) Wie groß ist die relativistische Masse dieser Elektronen in Einheiten von kg?
c) Berechnen Sie den Impuls dieser Elektronen.
d) Welche Wellenlänge hat ein Strahl dieser Elektronen?

5. Aufgabe (4 Punkte)

a) Wie lautet die Formel für die quantisierte Energie des Wasserstoffatoms?
b) Berechnen Sie jeweils die kleinste Wellenlänge der Lyman- und der Balmer-Serie.
c) Erklären Sie, was in einem Röntgenspektrum die K_α-Linie ist.
d) Im Röntgenspektrum eines Elements hat die K_α-Linie die Wellenlänge $\lambda = 8{,}36 \cdot 10^{-10}$ m. Welche Kernladungszahl hat das Element?

6. Aufgabe (4 Punkte)

Die beiden Sterne von β-Aurigae haben nahezu die gleiche Masse und kreisen um den gemeinsamen Schwerpunkt. Zum Zeitpunkt der Beobachtung bewegt sich ein

Stern mit einer Geschwindigkeit von 100 km/s direkt auf die Erde zu, während der andere Stern sich mit dieser Geschwindigkeit von der Erde entfernt.

a) Berechnen Sie für beide Sterne die Dopplerverschiebung der roten Wasserstoff- Spektrallinie ($\lambda = 657$ nm) aufgrund der Rotation um den gemeinsamen Schwerpunkt.
b) Aufgrund dieser Rotation spaltet die Spektrallinie in zwei Komponenten auf. Berechnen Sie den Energieunterschied der beiden Komponenten in Einheiten von eV.

Der Mikrowellenstrahl ($\nu_0 = 30$ GHz) einer „Radarfalle" ist unter 45° zu den Fahrzeugen ausgerichtet, die sich mit einer Geschwindigkeit von 70 km/h nähern.

c) Mit welcher Frequenzverschiebung kommt die Mikrowelle bei den Fahrzeugen an?
d) Ein Teil der Mikrowelle wird in den Empfänger des Messgeräts reflektiert. Welche Frequenzverschiebung misst das Gerät?

7. Aufgabe (4 Punkte)

a) Welche Quantenzahlen charakterisieren die Orbitale des Wasserstoffatoms?
b) Welche Werte sind für die Drehimpulsquantenzahl ℓ der Orbitale mit der Hauptquantenzahl $n = 4$ möglich?
c) Das Element Rubidium (Rb) mit der Kernladungszahl $Z = 37$ befindet sich in seinem Grundzustand. Geben Sie in einer Tabelle alle besetzten Orbitale mit den zugehörigen Besetzungszahlen an.
d) Die kleinste Anregung, die dem Übergang 5s $\rightarrow$ 5p entspricht, ist in zwei Komponenten aufgespalten. Nennen Sie die Ursache für diese Aufspaltung.

8. Aufgabe (4 Punkte)

a) Berechnen Sie die Dichte der Leitungselektronen von Rb. Hinweis: Rb hat ein Leitungselektron (das 5s-Elektron). Die atomare Massenzahl von Rb ist $A = 85{,}47$ und die Massendichte beträgt $\rho_{\mathrm{Rb}} = 1{,}53\,\mathrm{g/cm^3}$.
b) Berechnen Sie für Rb die Fermi-Wellenzahl k_{F}.
c) Wie groß ist die Fermi-Energie E_{F} von Rb in Einheiten von eV?
d) Welchen Zahlenwert hat die Fermi-Geschwindigkeit v_{F} von Rb?

Bitte verwenden Sie für die Konstanten die folgenden Werte:

Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s
Plancksche Konstante:	$h = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs} = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Ws^2}$
Rydberg-Energie:	$R = 13{,}6\,\mathrm{eV}$
Atomare Masseneinheit:	$u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Elementarladung:	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}$
Ruhemasse des Elektrons:	$m_{\mathrm{e}} = 500\,\mathrm{keV}/c^2 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

1. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 5) (4 Punkte)

a) Wie lautet die Wellengleichung und die Formel für die Geschwindigkeit einer Seilwelle?
b) Erklären Sie, was man unter der Phasengeschwindigkeit einer Welle versteht.
c) Schreiben Sie die Wellenfunktion einer harmonischen ebenen Schallwelle auf.
d) Wie ändert sich die Geschwindigkeit einer Schallwelle in einem Gas, wenn der Druck verdoppelt wird?

a) Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}$$

ψ bezeichnet die Auslenkung des Seils, das sich entlang der x-Achse erstreckt.

Geschwindigkeit der Seilwelle

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

F bezeichnet die Kraft, mit der das Seil gespannt ist, und μ die Masse je Längeneinheit.

b) Die Phasengeschwindigkeit ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer harmonischen Welle.

c) Wellenfunktion einer harmonischen ebenen Welle

$$\psi(\vec{r},t) = \psi_0 \exp(\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r} - \omega t))$$

- ψ_0 ist die Amplitude der Welle.
- $\vec{k}$ ist der Wellenzahlvektor, der senkrecht auf den Wellenfronten steht. Der Betrag von $\vec{k}$ ist die Wellenzahl: $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$
- ω ist die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$. $\nu = T^{-1}$ ist Frequenz der Welle und T die Periodendauer der lokalen Schwingung.

d) Die Schallgeschwindigkeit ist

$$c_\mathrm{S} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

Die Schallgeschwindigkeit in einem Gas ist proportional zur Wurzel des Gasdrucks p. Die Schallgeschwindigkeit vergrößert sich um einen Faktor $\sqrt{2}$, wenn der Druck p verdoppelt wird. In der Formel bezeichnet γ den Adiabaten-Exponenten und ρ die Gasdichte.

2. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 6 und 8) (4 Punkte)

Ein optisches Transmissionsgitter mit sehr vielen Spalten wird senkrecht mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 600$ nm beleuchtet.

a) Unter welchen Winkeln zum zentralen Hauptmaximum können die Hauptmaxima der Intensität nach dem Gitter beobachtet werden, wenn der Abstand der Spalte $a = 6\,\mu$m beträgt?

b) Ein Doppelspalt wird mit Licht der gleichen Wellenlänge beleuchtet. Unter welchen Winkeln können die Maxima der Intensität nach dem Doppelspalt beobachtet werden, wenn der Spaltabstand $b = 2\,\mu$m beträgt?

c) Skizzieren Sie den Verlauf der Intensität nach dem Doppelspalt auf dem Schrim. Tragen Sie dazu die Intensität über $\sin\alpha$ auf und vernachlässigen Sie die endliche Breite der Spalte. α bezeichne den Ablenkwinkel.

d) Beim Gitter aus Teilaufgabe a) wird jeder Spalt durch einen Doppelspalt aus Teilaufgabe b) ersetzt. Skizzieren Sie den Verlauf der Intensität nach diesem Gitter.

a) Haupmaxima beim Gitter

$$\sin\alpha_n = \pm n\frac{\lambda}{a} = \pm n\frac{6\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}}{6\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}} = \pm n\,0{,}1,$$

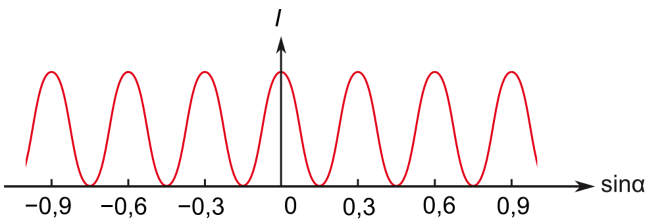
d.h. $n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm 10$.

b) Maxima beim Doppelspalt

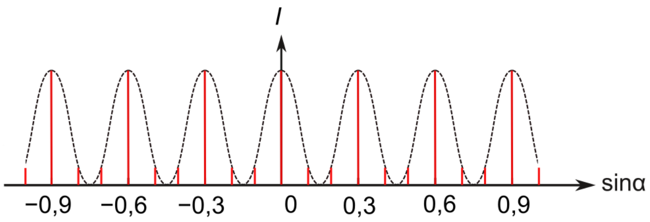
$$\sin\alpha_n = \pm n\frac{\lambda}{b} = \pm n\frac{6\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}}{2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}} = \pm n\,0{,}3,$$

d.h. $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

c) Skizze der Intensität nach dem Doppelspalt



d) Skizze der Intensität nach dem Gitter. Die Intensität der Hauptmaxima wird durch den Doppelspaltstruktur der einzelnen Slitze moduliert.



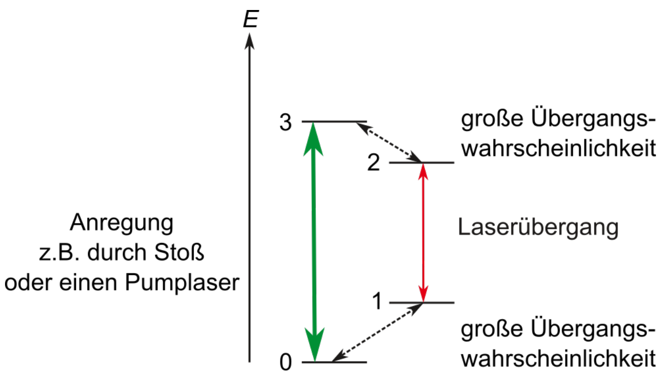
3. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 11 und 12) (4 Punkte)

a) Für was steht das Abkürzung „LASER“?
b) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit Laser-Licht entstehen kann?
c) Erklären Sie mittels einer Skizze, wie die Bedingung zur Erzeugung von Laser-Licht mit einem Vier-Energie-Niveau-Schema eingestellt werden kann.
d) Worin unterscheidet sich das Vier-Niveau-Schema eines gepulsten Lasers von dem eines kontinuierlichen Lasers?

a) LASER: light amplification by stimulated emission of radiation

b) Es muss „Besetzungsinversion“ erreicht werden, d.h. es müssen sich mehr Elektronen in einem angeregten Energieniveau befinden als in einem Energieniveau mit einer kleineren Energie. Das thermische Gleichgewicht schließt eine Besetzungsinversion somit aus.

c) Die Atome werden aus dem Grundzustand in das Energieniveaus 3 angeregt. Das geschieht beim Helium-Neon-Laser durch den Stoß von Helium und Neon-Atomen. Häufig wird ein zweiter Laser verwendet, der den Übergang $0 \leftrightarrow 3$ „pumpt“. Vom Energieniveau 3 können die Atome in das Energieniveaus 2 relaxieren. Durch den Pumpvorgang wird das Energieniveau besonders stark besetzt, so dass sich zu tieferliegenden Energieniveaus eine Besetzungsinversion einstellen kann.



d) Ein kontinuierlicher Laser ist möglich, wenn die Besetzung des Energieniveau 1 durch den Übergang $1 \leftrightarrow 0$ schneller vermindert wird, als das Energieniveau 2 durch den Pumpvorgang besetzt werden kann, so dass sich eine dauerhafte Besetzungsinversion von Energieniveau 2 und 1 ergibt (z.B. beim He-Ne-Laser).

Die stimulierte Emission führt nach einer bestimmten Zeit zur Gleichbesetzung von Energieniveau 2 und 1, wenn die Besetzung von Energieniveaus 1 langsamer abgebaut wird, als das Energieniveau 2 durch den Pumpvorgang besetzt wird. Die Laser-Bedingung verschwindet nach einer Zeit, die von der Relaxationszeit von Energieniveau 1 bestimmt wird (z.B. der N_2-Laser).

4. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 10 und 12) (4 Punkte)

a) Welche Gesamtenergie haben Elektronen, wenn sie die mit einer Spannung von 2 MV aus der Ruhe heraus beschleunigt werden?
b) Wie groß ist die relativistische Masse dieser Elektronen in Einheiten von kg?
c) Berechnen Sie den Impuls dieser Elektronen.
d) Welche Wellenlänge hat ein Strahl dieser Elektronen?

a) Die Gesamtenergie ergibt sich aus der Ruheenergie und der kinetischen Energie, d.h.

$$E = m_0c^2 + eU$$

Dabei bezeichnet U die Beschleunigungsspannung.

$$E = 500\,\text{keV} + 2\text{MeV} = 2{,}5\,\text{MeV}$$

b) Für die relativistische Masse gilt

$$E = mc^2$$

d.h.

$$m = \frac{E}{c^2} = 2{,}5\,\text{MeV}/c^2 = \frac{2{,}5 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{VAs}}{(3 \cdot 10^8\,\text{ms}^{-1})^2} = 4{,}4 \cdot 10^{-30}\,\text{kg}$$

c) Mit

$$E^2 = m_0^2c^4 + c^2p^2 \quad \rightarrow \quad p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m_0^2c^4}$$

$$\begin{aligned} p =& \frac{1}{c}\sqrt{2{,}5^2 - 0{,}5^2}\,\text{MeV} = 2{,}45\,\text{MeV}/c = \frac{2{,}45 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{VAs}}{3 \cdot 10^8\,\text{ms}^{-1}} \\ =& 1{,}33 \cdot 10^{-21}\,\text{kgms}^{-1} \end{aligned}$$

d) de Broglie Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\text{eVs}\,3 \cdot 10^8\,\text{ms}^{-1}}{2{,}45 \cdot 10^6\,\text{eV}} = 5{,}07 \cdot 10^{-13}\,\text{m}$$

5. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 13) (4 Punkte)

a) Wie lautet die Formel für die quantisierte Energie des Wasserstoffatoms?
b) Berechnen Sie jeweils die kleinste Wellenlänge der Lyman- und der Balmer-Serie.
c) Erklären Sie, was in einem Röntgenspektrum die K_α-Linie ist.
d) Im Röntgenspektrum eines Elements hat die K_α-Linie die Wellenlänge $\lambda = 8{,}36 \cdot 10^{-10}$ m. Welche Kernladungszahl hat das Element?

a) Energie des Wasserstoffatoms

$$E_n = -\frac{R}{n^2} \qquad n = 1, 2, ...$$

b) Der Energieunterschied zwischen den Niveaus E_n und E_m ist

$$\Delta E_{n,m} = |E_n - E_m| = R\left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right| = R\frac{|n^2 - m^2|}{n^2 m^2}$$

Die Wellenlänge für Übergänge zwischen den Niveaus E_n and E_m ist

$$\lambda_{n,m} = \frac{ch}{\Delta E_{n,m}} = \frac{ch}{R}\frac{n^2 m^2}{|n^2 - m^2|} = \frac{3 \cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1} \cdot 4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}}{13{,}6\,\mathrm{eV}}\frac{n^2 m^2}{|n^2 - m^2|}$$
$$= 91{,}3\,\mathrm{nm}\frac{n^2 m^2}{|n^2 - m^2|}$$

Die kleinste Wellenlänge bei der Emission eines Photons zwischen $(m \to \infty) \to n$ ist

$$\lambda_{\infty,n} = 91{,}3\,\mathrm{nm} \cdot n^2$$

- Lyman-Serie $n = 1$
$$\lambda_{\infty,1} = 91{,}3\,\mathrm{nm}$$
- Balmer-Serie $n = 2$
$$\lambda_{\infty,2} = 91{,}3\,\mathrm{nm} \cdot 2^2 = 365\,\mathrm{nm}$$

c) Die K_α-Linie bezeichnet den Übergang $n = 2 \to 1$.
d) Gemäß dem Moseleyschen Gesetz gilt für die Übergangsenergie

$$\Delta \mathrm{E}_{2,1} = |E_2 - E_1| = R(Z-1)^2\left|\frac{1}{2^2} - 1\right|$$

Die Wellenlänge für die K_α-Linie ist

$$\lambda_{21} = \frac{91{,}3\,\mathrm{nm}}{(Z-1)^2} \cdot \frac{2^2}{2^2 - 1} = \frac{91{,}3\,\mathrm{nm}}{(Z-1)^2} \cdot \frac{4}{3}$$

Damit ergibt sich die Kernladungszahl

$$(Z-1) = \sqrt{\frac{91{,}3\,\mathrm{nm}}{\lambda_{21}} \cdot \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{91{,}3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}{8{,}36 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}} \cdot \frac{4}{3}} = 12$$

Bemerkung: Z=13 ist die Kernladungszahl von Aluminium.

6. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 10) (4 Punkte)

Die beiden Sterne von β-Aurigae haben nahezu die gleiche Masse und kreisen um den gemeinsamen Schwerpunkt. Zum Zeitpunkt der Beobachtung bewegt sich ein Stern mit einer Geschwindigkeit von 100 km/s direkt auf die Erde zu, während der andere Stern sich mit dieser Geschwindigkeit von der Erde entfernt.

a) Berechnen Sie für beide Sterne die Dopplerverschiebung der roten Wasserstoff- Spektrallinie ($\lambda = 657$ nm) aufgrund der Rotation um den gemeinsamen Schwerpunkt.
b) Aufgrund dieser Rotation spaltet die Spektrallinie in zwei Komponenten auf. Berechnen Sie den Energieunterschied der beiden Komponenten in Einheiten von eV.

Der Mikrowellenstrahl ($\nu_0 = 30$ GHz) einer „Radarfalle" ist unter 45° zu den Fahrzeugen ausgerichtet, die sich mit einer Geschwindigkeit von 70 km/h nähern.

c) Mit welcher Frequenzverschiebung kommt die Mikrowelle bei den Fahrzeugen an?
d) Ein Teil der Mikrowelle wird in den Empfänger des Messgeräts reflektiert. Welche Frequenzverschiebung misst das Gerät?

a) Doppelverschiebung bei Annäherung bzw. Entfernung

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 \mp (v/c)}{1 \pm (v/c)}} \quad \xrightarrow{v<<c} \quad \lambda_0(1 \mp (v/c))$$

also

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \mp \lambda_0 \frac{v}{c} = \mp 657\,\text{nm} \cdot \frac{10^5 \text{ms}^{-1}}{3 \cdot 10^8\,\text{ms}^{-1}} = \mp 0{,}219\,\text{nm}$$

b) Energieunterschied

$$\Delta E = h\Delta\nu$$

mit $\nu = c/\lambda$ ist

$$\Delta\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda$$

Energieunterschied der Aufspaltung

$$\Delta E = 2 \cdot \frac{hc}{\lambda_0^2} \cdot \Delta\lambda = 2 \cdot \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\text{eVs}\, 3 \cdot 10^8\,\text{ms}^{-1}}{(657 \cdot 10^{-9})^2\,\text{m}^2} \cdot 0{,}219 \cdot 10^{-9}\,\text{m} = 1{,}26\ \text{meV}$$

Bemerkung: Der Effekt ist also sehr viel größer als die Feinstrukturaufspaltung

von rund 40 µeV beim H-Atom.

c) Frequenz am Fahrzeug

$$\nu = \nu_0(1 + \frac{v}{c}\cos\alpha),$$

d.h.

$$\begin{aligned}\nu =&\nu_0 + \nu_0\frac{v}{c}\cos\alpha = 30\,\text{GHz} + 30\cdot 10^9\,\text{Hz}\frac{70\cdot 10^3\,\text{m}}{3600\,\text{s}\cdot 3\cdot 10^8\,\text{ms}^{-1}}\cos 45°\\ =&30\,\text{GHz} + 1375\,\text{Hz}\end{aligned}$$

d) Frequenz der reflektierten Welle

$$\nu' = \nu(1 + \frac{v}{c}\cos\alpha) = \nu_0(1 + \frac{v}{c}\cos\alpha)^2 = \nu_0(1 + 2\frac{v}{c}\cos\alpha) = 30\,\text{GHz} + 2750\,\text{Hz}$$

Bemerkung: Der Term $\nu_0(\frac{v}{c}\cos\alpha)^2 = 12{,}6\cdot 10^{-7}$ Hz kann vernachlässigt werden.

7. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 17 und 20) (4 Punkte)

a) Welche Quantenzahlen charakterisieren die Orbitale des Wasserstoffatoms?
b) Welche Werte sind für die Drehimpulsquantenzahl ℓ der Orbitale mit der Hauptquantenzahl $n = 4$ möglich?
c) Das Element Rubidium (Rb) mit der Kernladungszahl $Z = 37$ befindet sich in seinem Grundzustand. Geben Sie in einer Tabelle alle besetzten Orbitale mit den zugehörigen Besetzungszahlen an.
d) Die kleinste Anregung, die dem Übergang 5s $\rightarrow$ 5p entspricht, ist in zwei Komponenten aufgespalten. Nennen Sie die Ursache für diese Aufspaltung.

a) Es sind die
- Hauptquantenzahl n
- die Quantenzahlen des Bahndrehimpuls ℓ und m
- die Quantenzahlen des Elektronenspin $s = 1/2$ und $m_s = \pm 1/2$

b) Es gilt $\ell < n$ also $\ell = 0, 1, 2, 3$

c) Tabelle der besetzten Orbitale (gemäß dem Periodensystem der Elemente nach aufsteigender Energie geordnet)

Orbital	Besetzungszahl	Summe
1s	2	2
2s	2	4
2p	6	10
3s	2	12
3p	6	18
4s	2	20
3d	10	30
4p	6	36
5s	1	37

d) Der Übergang spaltet aufgrund der Spin-Bahn-Wechselwirkung im 5p Orbital auf.

8. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 21) (4 Punkte)

a) Berechnen Sie die Dichte der Leitungselektronen von Rb. Hinweis: Rb hat ein Leitungselektron (das 5s-Elektron). Die atomare Massenzahl von Rb ist $A = 85{,}47$ und die Massendichte beträgt $\rho_{\mathrm{Rb}} = 1{,}53\,\mathrm{g/cm^3}$.
b) Berechnen Sie für Rb die Fermi-Wellenzahl k_F.
c) Wie groß ist die Fermi-Energie E_F von Rb in Einheiten von eV?
d) Welchen Zahlenwert hat die Fermi-Geschwindigkeit v_F von Rb?

a) Dichte der Leitungselektronen

$$\rho_{\mathrm{Rb}} = \frac{NAu}{\mathrm{V}} \quad \rightarrow \quad \frac{N}{V} = n = \frac{\rho_{\mathrm{Rb}}}{Au} = \frac{1{,}53 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot 10^{6}\,\mathrm{m^{-3}}}{85{,}47 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} = 1{,}08 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}$$

b) Die Fermi-Wellenzahl ist der Radius der Fermi-Kugel

$$N = 2\frac{4\pi k_\mathrm{F}^3/3}{(2\pi)^3/V} \quad \rightarrow \quad \frac{N}{V}3\pi^2 = k_\mathrm{F}^3$$

$$k_\mathrm{F} = (3\pi^2 n)^{(1/3)} = (3\pi^2 \cdot 1{,}08 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}})^{(1/3)} = 6{,}84 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m^{-1}}$$

c) Die Fermi-Energie ist

$$E_\mathrm{F} = \frac{\hbar^2 k_\mathrm{F}^2}{2m_\mathrm{e}} = \frac{(4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs})^2 \cdot (6{,}84 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m^{-1}})^2 \cdot (3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{ms^{-1}})^2}{(2\pi)^2 \cdot 2 \cdot 500 \cdot 10^3\,\mathrm{eV}} = 1{,}83\,\mathrm{eV}$$

d) Fermi-Geschwindigkeit

$$E_\mathrm{F} = \frac{1}{2}m_\mathrm{e}v_\mathrm{F}^2 \quad \rightarrow \quad v_\mathrm{F} = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{F}}{m_\mathrm{e}}} = c\sqrt{\frac{2E_\mathrm{F}}{m_\mathrm{e}c^2}} = c\sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}83\,\mathrm{eV}}{500 \cdot 10^3\,\mathrm{eV}}} = c \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-3}$$

$$v_\mathrm{F} = 3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{ms^{-1}} \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-3} = 8{,}1 \cdot 10^{5}\,\mathrm{ms^{-1}}$$

1. Aufgabe (4 Punkte)

Auf einem Draht der Länge $\ell = 1$ m gibt es eine transversale Welle mit der Wellenfunktion $z(x,t) = 1\,\mathrm{mm} \cdot \sin\left(3\pi\,\mathrm{m}^{-1}x\right)\sin\left(100\pi\,\mathrm{s}^{-1}t\right)$.

a) Skizzieren Sie die Wellenfunktion und bestimmen Sie (i) die Wellenlänge und (ii) die Frequenz der Welle.
b) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion die Wellengleichung erfüllt und bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit.
c) Mit welcher Kraft ist der Draht gespannt, wenn er aus Titan gefertigt ist ($\rho_{\mathrm{Ti}} = 4{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$) und einen Durchmesser von $d = 2\,\mathrm{mm}$ hat?
d) Mit welcher Kraft ist der Draht aus Teilaufgabe c) gespannt, wenn sich die Frequenz der Welle nicht geändert hat, die Wellenlänge nun aber $\lambda = 2$ m beträgt? Skizzieren Sie die resultierende Wellenfunktion.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Eine Glasplatte (Brechnungsindex $n_{\mathrm{G}} = 1{,}5$) ist mit einer $d = 1\,\mu\mathrm{m}$ dicken Magnesiumfluoridschicht ($n_{\mathrm{MgF_2}} = 1{,}36$) bedeckt. Licht im Wellenlängenbereich $\lambda = 400$-700 nm fällt senkrecht auf die beschichtete Glasplatte.

a) Wie viel Prozent der einfallenden Lichtintensität wird an der Grenzfläche Luft-MgF_2 reflektiert?
b) Wie viel sind es an der Grenzfläche MgF_2-Glas?
c) Bei welchen Wellenlängen ist die Intensität bei Reflexion an der beschichteten Glasplatte am geringsten?
d) Schätzen Sie ab, wie viel Prozent der einfallenden Lichtintensität in den Minima reflektiert wird. Hinweis: Berechnen Sie $E_{\mathrm{r,Luft}\to\mathrm{MgF_2}}/E_0$ bzw. $E_{\mathrm{r,MgF_2}\to\mathrm{Glas}}/E_0$ und vernachlässigen Sie die Reflexion beim Übergang MgF_2 nach Luft.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Ein Kristallgitter ergibt sich durch die Wiederholung einer primitiven Elementarzelle, die durch die linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ aufgespannt wird. Für das fcc-Gitter von Kupfer kann man die Vektoren $\vec{a}_1 = \frac{a}{2}\left(\vec{e}_{\mathrm{x}} + \vec{e}_{\mathrm{z}}\right)$, $\vec{a}_2 = \frac{a}{2}\left(\vec{e}_{\mathrm{y}} + \vec{e}_{\mathrm{x}}\right)$ und $\vec{a}_3 = \frac{a}{2}\left(\vec{e}_{\mathrm{z}} + \vec{e}_{\mathrm{y}}\right)$ verwenden. $\vec{e}_{\mathrm{x}}$, $\vec{e}_{\mathrm{y}}$ und $\vec{e}_{\mathrm{z}}$ sind orthogonale Einheitsvektoren. Die Gitterkonstante beträgt $a = 3{,}61 \cdot 10^{-10}$ m.

a) Wie sind die Basisvektoren des reziproken Gitters definiert?
b) Berechnen Sie den Basisvektor $\vec{b}_1$ für das reziproke Gitter vom Kupfer.
c) Berechnen Sie den Netzebenen-Abstand für den Vektor $\vec{b}_1$.
d) Unter welchen Winkeln können die Beugungsmaxima für einen Röntgenstrahl der Wellenlänge $\lambda = 0{,}35\,\mathrm{nm}$ beobachtet werden?

4. Aufgabe (4 Punkte)

a) Das Maximum im thermischen Spektrum der Sonne wird bei der Wellenlänge $\lambda = 525$ nm beobachtet. Welche Temperatur hat die Oberfläche der Sonne?
b) Der Radius der Sonne beträgt $r_{\mathrm{S}} = 696.340$ km. Wie groß ist die gesamte Strahlungsleistung der Sonne?

c) Die ESA-Raumsonde Solar Orbiter umkreist die Sonne mit einem Bahnradius von $d = 77 \cdot 10^6$ km. Welche Gleichgewichtstemperatur hat ein kugelförmiger Satellit auf dieser Bahn?

5. Aufgabe (4 Punkte)

a) Die Definition der Rotverschiebung ist $z = (\lambda' - \lambda_0)/\lambda_0$. Dabei bezeichnet λ_0 die Wellenlänge im Ruhesystem der Quelle. Messungen der Rotverschiebung ergeben für den Galaxiencluster BAS11 den Wert $z = 0{,}07$. Wie groß ist die relative Geschwindigkeit zwischen der Erde und BAS11?

b) Bei der Temperatur $T = 300$ K bewegt sich ein Helium-Atom (Massenzahl $A = 4$) mit der kinetischen Energie $k_B T$. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Helium-Atoms?

c) Das Helium-Atom bewegt sich mit dieser Geschwindigkeit in einem Laser-Strahl mit der Wellenlänge
$\lambda = 623{,}8$ nm. Es entfernt sich vom Laser unter einem Winkel von 60° zum Strahl. Welche Wellenlänge hat der Laser im Bezugssystem der Helium Atoms?

d) Wie viele Spalte muss ein gleichmäßig ausgeleuchtetes Beugungsgitter mindestens haben, das diese Änderung der Wellenlänge in 1. Ordnung auflösen kann?

6. Aufgabe (4 Punkte)

a) Durch welche Quantenzahlen wird der Spin des Elektrons bestimmt?

b) Skizzieren Sie das Vektordiagramm für den Spin des Elektrons.

c) Welche Zahlenwerte haben die Eigenwerte des Spins?

d) Welchen Radius hat eine rotierende Kugel mit der Masse und dem Drehimpuls des Elektrons, wenn die größte Geschwindigkeit an der Oberfläche der Kugel die Lichtgeschwindigkeit erreicht? Hinweis: Das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel der Masse m ist $I = 2mr^2/5$ und der Zusammenhang von Drehimpuls und Kreisfrequenz ist $L = I\omega$.

7. Aufgabe (4 Punkte)

a) Wie wird aus der Hamilton-Funktion der Hamiltonoperator?

b) Wie lautet die Schrödinger-Gleichung in ihrer allgemeinsten Form?

c) Wie lautet die Schrödinger-Gleichung für ein Wasserstoffatom, wenn relativistische Effekte nicht berücksichtigt werden?

d) Wie lautet die Schrödinger-Gleichung, wenn der Spin des Elektrons berücksichtigt wird und das Wasserstoffatom sich in einem starken homogenen magnetischen Feld befindet?

8. Aufgabe (4 Punkte)

a) Berechnen Sie die Dichte $n = N/V$ der Leitungselektronen von Kupfer.
Hinweis: Die Massendichte von Kupfer ist $\rho_{Cu} = 8{,}96\,\mathrm{g/cm^3}$, die Massenzahl ist $A = 63{,}55$ und es gibt ein Leitungselektron je Kupfer-Atom.

b) Berechnen Sie die Fermi-Wellenzahl von Kupfer.

c) Berechnen Sie die Fermi-Geschwindigkeit von Kupfer.

d) Die elektrische Leitfähigkeit von Kupfer beträgt $\sigma = 58 \cdot 10^6$ A/Vm. Berechnen Sie die mittlere freie Weglänge eines Elektrons in Kupfer. Hinweis: $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e}$

Bitte verwenden Sie für die Konstanten die folgenden Werte:

Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^8$ m/s
Boltzmann Konstante:	$k_B = 8{,}6 \cdot 10^{-5}$eV/K $= 1{,}38 \cdot 10^{-23}$J/K
Plancksche Konstante:	$h = 4{,}14 \cdot 10^{-15}$ eVs $= 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Ws^2
Stefan-Boltzmann Konstante:	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Wm^{-2}K^{-4}
Wiensche Konstante:	$b = 2{,}9$ mm $\cdot$ K
Atomare Masseneinheit:	$u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg
Elementarladung:	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As
Ruhemasse des Elektrons:	$m_e = 500$ keV$/c^2 = 9 \cdot 10^{-31}$ kg

1. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 5) (4 Punkte)

Auf einem Draht der Länge $\ell = 1$ m gibt es eine transversale Welle mit der Wellenfunktion $z(x,t) = 1\,\text{mm} \cdot \sin\left(3\pi\,\text{m}^{-1}x\right) \sin\left(100\pi\,\text{s}^{-1}t\right)$.

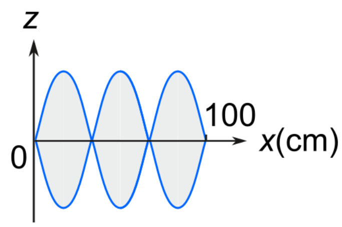
a) Skizzieren Sie die Wellenfunktion und bestimmen Sie (i) die Wellenlänge und (ii) die Frequenz der Welle.

b) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion die Wellengleichung erfüllt und bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit.

c) Mit welcher Kraft ist der Draht gespannt, wenn er aus Titan gefertigt ist ($\rho_{\text{Ti}} = 4{,}5\,\text{g}/\text{cm}^3$) und einen Durchmesser von $d = 2\,\text{mm}$ hat?

d) Mit welcher Kraft ist der Draht aus Teilaufgabe c) gespannt, wenn sich die Frequenz der Welle nicht geändert hat, die Wellenlänge nun aber $\lambda = 2$ m beträgt? Skizzieren Sie die resultierende Wellenfunktion.

a) Skizze



i) Wellenlänge:

$$\text{Wellenzahl} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 3\pi\text{m}^{-1} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3}\,\text{m}$$

ii) Frequenz:

$$\text{Kreisfrequenz}: \omega = 2\pi\nu = 100\pi\text{s}^{-1} \quad \rightarrow \quad \nu = 50\,\text{Hz}$$

b) Die Wellengleichung ist

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = (-1)(100\pi\,\text{s}^{-1})^2 z = v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = v^2(-1)(3\pi\,\text{m}^{-1})^2 z$$

Phasengeschwindigkeit:

$$v = \frac{100\pi\,\text{s}^{-1}}{3\pi\,\text{m}^{-1}} = 33{,}3\,\text{m}/\text{s}$$

c) Mit der Formel für die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

und der Massenbelegung

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta \ell} = \frac{\rho A \Delta \ell}{\Delta \ell} = \rho A = 4{,}5\,\mathrm{g\,cm^{-3}}\frac{\pi}{4}(0{,}2\,\mathrm{cm})^2 = 0{,}14\,\mathrm{g\,cm^{-1}} = 1{,}4\cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$$

ist die Kraft

$$F = v^2\mu = (33{,}3\,\mathrm{ms^{-1}})^2 1{,}4\cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^{-1}} = 15{,}5\,\mathrm{N}$$

d) Mit der Geschwindigkeit:

$$v = \nu\lambda = 50\,\mathrm{s^{-1}}\cdot 2\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{ms^{-1}}$$

ist die Kraft

$$F = \mathrm{v}^2\mu = (100\,\mathrm{ms^{-1}})^2 1{,}4\cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^{-1}} = 140\,\mathrm{N}$$

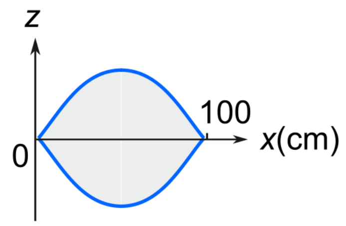
Neue Wellenzahl

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi\,\mathrm{m^{-1}}$$

ist die neue Wellenfunktion

$$z(x,t) = 1\,\mathrm{mm}\cdot\sin\left(\pi\,\mathrm{m^{-1}}x\right)\sin\left(100\pi\,\mathrm{s^{-1}}t\right)$$

Skizze



2. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 6) (4 Punkte)

Eine Glasplatte (Brechnungsindex $n_G = 1{,}5$) ist mit einer $d = 1\mu m$ dicken Magnesiumfluoridschicht ($n_{MgF_2} = 1{,}36$) bedeckt. Licht im Wellenlängenbereich $\lambda = 400$-700 nm fällt senkrecht auf die beschichtete Glasplatte.

a) Wie viel Prozent der einfallenden Lichtintensität wird an der Grenzfläche Luft-MgF_2 reflektiert?
b) Wie viel sind es an der Grenzfläche MgF_2-Glas?
c) Bei welchen Wellenlängen ist die Intensität bei Reflexion an der beschichteten Glasplatte am geringsten?
d) Schätzen Sie ab, wie viel Prozent der einfallenden Lichtintensität in den Minima reflektiert wird. Hinweis: Berechnen Sie $E_{r,\text{Luft}\to MgF_2}/E_0$ bzw. $E_{r,MgF_2\to\text{Glas}}/E_0$ und vernachlässigen Sie die Reflexion beim Übergang MgF_2 nach Luft.

a) Reflexionskoeffizient der Amplitude

$$r = \frac{n_{\text{Luft}} - n_{MgF_2}}{n_{\text{Luft}} + n_{MgF_2}} = \frac{1 - 1{,}36}{1 + 1{,}36} = -0{,}15$$

Das Verhältnis von reflektierter zu einfallender Intensität ist

$$\frac{I_r}{I_0} = r^2 = 0{,}022 \quad \text{d.h.} \quad 2{,}2\,\%.$$

b) Reflexion Magnesiumflourid - Glas

$$r = \frac{n_{MgF_2} - n_{\text{Glas}}}{n_{MgF_2} + n_{\text{Glas}}} = \frac{1{,}36 - 1{,}5}{1{,}36 + 1{,}5} = -0{,}05$$

Das Verhältnis von reflektierter zu einfallender Intensität ist

$$\frac{I_r}{I_0} = r^2 = 0{,}0025 \quad \text{d.h.} \quad 0{,}25\,\%.$$

c) Für destruktive Interferenz muss der Gangunterschied ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge sein. Phasensprünge treten an beiden Grenzflächen auf und heben sich auf. Die Bedingung für destruktive Interferenz ist

$$2d = (2\text{m} + 1)\frac{\lambda_m}{2n_{MgF_2}} \quad \to \quad \lambda_m = \frac{4d\,n_{MgF_2}}{(2\text{m}+1)} = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}36\,\text{m}}{(2\text{m}+1)}$$

Mit $4 \cdot 10^{-7}\,\text{m} \leq \lambda_m \leq 7 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$ ergibt sich

$$\frac{4 \cdot 10^{-6}\,\text{m} \cdot 1{,}36}{7 \cdot 10^{-7}\,\text{m}} \leq 2\text{m} + 1 \leq \frac{4 \cdot 10^{-6}\,\text{m} \cdot 1{,}36}{4 \cdot 10^{-7}\,\text{m}}$$

$$3{,}4 \leq \text{m} \leq 6{,}3 \quad \to \quad \text{m} = 4,\ 5,\ 6.$$

$$m = 4 \quad \lambda_4 = \frac{4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m} \cdot 1{,}36}{9} = 604\,\mathrm{nm}$$
$$m = 5 \quad \lambda_5 = \frac{4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m} \cdot 1{,}36}{11} = 495\,\mathrm{nm}$$
$$m = 6 \quad \lambda_6 = \frac{4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m} \cdot 1{,}36}{13} = 418\,\mathrm{nm}$$

d) Die Amplitude der Lichtwelle, die an der Grenzfläche Luft-Magnesiumflourid reflektiert wird ist
$$E_{\mathrm{r1}} = -0{,}15 E_0 .$$
Unter der vereinfachenden Annahme, dass jeweils 100 % des Lichts transmittiert wird, ist die Amplitude der Welle, die an der Grenzfläche Magnesiumflourid-Glas reflektiert wird,
$$E_{\mathrm{r2}} = -0{,}05 E_0 .$$
Dabei wird der Phasensprung an der Grenzfläche durch den Gangunterschied $\lambda/2$ in der Beschichtung abgehoben und die Amplitude der insgesamt reflektierten Welle ist.
$$E_{\mathrm{r}} = E_{\mathrm{r1}} - E_{\mathrm{r2}} = -0{,}1 E_0 .$$
Die minimale reflektierte Intensität beträgt somit 1 %.

Zum Vergleich: Beim unbeschichteten Glas hat man
$$r = \frac{n_{\mathrm{Luft}} - n_{\mathrm{Glas}}}{n_{\mathrm{Luft}} + n_{\mathrm{Glas}}} = \frac{1 - 1{,}5}{1 + 1{,}5} = -0{,}2$$
und es werden 4 % der Lichtintensität reflektiert.

3. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 8 und 12) (4 Punkte)

Ein Kristallgitter ergibt sich durch die Wiederholung einer primitiven Elementarzelle, die durch die linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ aufgespannt wird. Für das fcc-Gitter von Kupfer kann man die Vektoren $\vec{a}_1 = \frac{a}{2}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_z\right)$, $\vec{a}_2 = \frac{a}{2}\left(\vec{e}_y + \vec{e}_x\right)$ und $\vec{a}_3 = \frac{a}{2}\left(\vec{e}_z + \vec{e}_y\right)$ verwenden. $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ sind orthogonale Einheitsvektoren. Die Gitterkonstante beträgt $a = 3{,}61 \cdot 10^{-10}$ m.

a) Wie sind die Basisvektoren des reziproken Gitters definiert?
b) Berechnen Sie den Basisvektor $\vec{b}_1$ für das reziproke Gitter vom Kupfer.
c) Berechnen Sie den Netzebenen-Abstand für den Vektor $\vec{b}_1$.
d) Unter welchen Winkeln können die Beugungsmaxima für einen Röntgenstrahl der Wellenlänge $\lambda = 0{,}35\,\text{nm}$ beobachtet werden?

a) Basisvektoren des reziproken Gitters

$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{V_{\text{Zelle}}}\vec{a}_2 \times \vec{a}_3 \qquad \text{und zyklische Permutationen}$$

Volumen der Elementarzelle

$$V_{\text{Zelle}} = \vec{a}_1(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$$

b)

$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{V_{\text{Zelle}}}\left(\frac{a}{2}\left(\vec{e}_y + \vec{e}_x\right)\right) \times \left(\frac{a}{2}\left(\vec{e}_z + \vec{e}_y\right)\right)$$

mit $\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x$, $\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y$ und $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$

$$\vec{b}_1 = \frac{a^2}{2V_{\text{Zelle}}}(\vec{e}_x - \vec{e}_y + \vec{e}_z)$$

und

$$V_{\text{Zelle}} = \frac{a^3}{8}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_z\right)\left(\vec{e}_x - \vec{e}_y + \vec{e}_z\right) = \frac{a^3}{4}$$

$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a}(\vec{e}_x - \vec{e}_y + \vec{e}_z)$$

c) Der Netzebenenabstand d ist

$$|\vec{b}_1| = \frac{2\pi}{d} \quad \rightarrow \quad \frac{2\pi}{d} = \frac{2\pi}{a}\sqrt{(\vec{e}_x - \vec{e}_y + \vec{e}_z)(\vec{e}_x - \vec{e}_y + \vec{e}_z)} = \frac{2\pi}{a}\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \quad d = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{3{,}61 \cdot 10^{-10}\,\text{m}}{\sqrt{3}} = 2{,}1 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$$

d) Bragg-Bedingung für konstruktive Interferenz

$$m\lambda = 2d \sin \alpha_m \quad \rightarrow \quad \sin \alpha_m = m \frac{0{,}35 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}{2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}} = m \cdot 0{,}833$$

$$m = 1: \quad \alpha_1 = 54{,}4°$$

4. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 10) (4 Punkte)

a) Das Maximum im thermischen Spektrum der Sonne wird bei der Wellenlänge $\lambda = 525$ nm beobachtet. Welche Temperatur hat die Oberfläche der Sonne?

b) Der Radius der Sonne beträgt $r_S = 696.340$ km. Wie groß ist die gesamte Strahlungsleistung der Sonne?

c) Die ESA-Raumsonde Solar Orbiter umkreist die Sonne mit einem Bahnradius von $d = 77 \cdot 10^6$ km. Welche Gleichgewichtstemperatur hat ein kugelförmiger Satellit auf dieser Bahn?

a) Mit dem Wienschen Verschiebungsgesetz ergibt sich für die Temperatur der Sonnenoberfläche

$$\lambda_{max} = \frac{2{,}9\,\mathrm{mmK}}{T} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mK}}{525 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 5524\,\mathrm{K}$$

b) Mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$\begin{aligned} P &= A\sigma T^4 = 4\pi {r_S}^2 \sigma T^4 \\ &= 4\pi \cdot (696340 \cdot 10^3)^2\,\mathrm{m}^2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}} \cdot 5524^4\,\mathrm{K}^4 \\ &= 3{,}22 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

c) Die Intensität der Sonne ist im Abstand d zum Mittelpunkt

$$I = \frac{P}{4\pi d^2}$$

Der Satellit empfängt die Leistung (r bezeichnet den Radius des Satelliten)

$$P_{ein} = \pi r^2 \cdot I$$

und emittiert die Leistung

$$P_{ab} = 4\pi r^2 \sigma T^4$$

Im Gleichgewicht $P_{ein} = P_{ab}$ ergibt sich die Temperatur

$$T = \left(\frac{\pi r^2 \cdot I}{4\pi r^2 \sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{3{,}18 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}}{5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}} 16\pi (77 \cdot 10^9\,\mathrm{m})^2}\right)^{1/4} = 372\,\mathrm{K}$$

5. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 10) (4 Punkte)

a) Die Definition der Rotverschiebung ist $z = (\lambda' - \lambda_0)/\lambda_0$. Dabei bezeichnet λ_0 die Wellenlänge im Ruhesystem der Quelle. Messungen der Rotverschiebung ergeben für den Galaxiencluster BAS11 den Wert $z = 0{,}07$. Wie groß ist die relative Geschwindigkeit zwischen der Erde und BAS11?

b) Bei der Temperatur $T = 300$ K bewegt sich ein Helium-Atom (Massenzahl $A = 4$) mit der kinetischen Energie $k_B T$. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Helium-Atoms?

c) Das Helium-Atom bewegt sich mit dieser Geschwindigkeit in einem Laser-Strahl mit der Wellenlänge
$\lambda = 623{,}8$ nm. Es entfernt sich vom Laser unter einem Winkel von 60° zum Strahl. Welche Wellenlänge hat der Laser im Bezugssystem der Helium Atoms?

d) Wie viele Spalte muss ein gleichmäßig ausgeleuchtetes Beugungsgitter mindestens haben, das diese Änderung der Wellenlänge in 1. Ordnung auflösen kann?

a) Der longitudinale Doppler-Effekt bei Entfernung der Quelle ist

$$\lambda' = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{v}{c}\right)}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)}}$$

Die Rotverschiebung ist damit

$$z + 1 = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{v}{c}\right)}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)}} \quad \rightarrow \quad (z+1)^2 = \frac{1 + \left(\frac{v}{c}\right)}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)} = 1{,}07^2 = 1{,}14$$

und mit

$$1 + \left(\frac{v}{c}\right) = 1{,}14 - 1{,}14\left(\frac{v}{c}\right) \quad \rightarrow \quad 2{,}14\left(\frac{v}{c}\right) = 0{,}14$$

ergibt sich für die Geschwindigkeit

$$v = c\frac{0{,}14}{2{,}14} = 0{,}065\, c$$

b) Die Geschwindigkeit der Helium-Atome mit der Energie $k_B T$ ist

$$\frac{1}{2} m_{He} v^2 = k_B T \rightarrow \mathrm{v} = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m_{He}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{JK^{-1}} \cdot 300\,\mathrm{K}}{4 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}} = 1117\,\mathrm{ms^{-1}}$$

c) Da $v << c$ gilt bei Entfernung

$$\frac{\lambda_{He} - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c}\cos 60° \quad \rightarrow \quad \lambda_{He} = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\cos 60°\right)$$

$$\lambda_{He} = 623{,}8\,\mathrm{nm}\left(1 + 0{,}5 \cdot \frac{1117\,\mathrm{ms^{-1}}}{3 \cdot 10^8\,\mathrm{ms^{-1}}}\right) = 623{,}8\,\mathrm{nm}\left(1 + 1{,}86 \cdot 10^{-6}\right)$$

d) Auflösungsvermögen beim Gitter in 1. Ordnung

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = N \quad \rightarrow \quad N > \frac{1}{1{,}86 \cdot 10^{-6}} = 0,54 \cdot 10^{6}$$

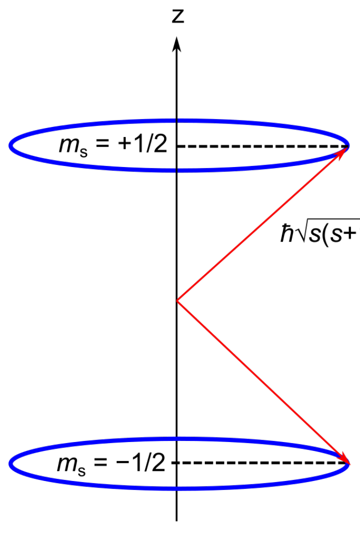
Schlussfolgerung: Mit klassischen Methoden der Spektroskopie wird man die Bewegung von strömenden Gasen und Flüssigkeiten nicht auflösen können!

6. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 18) (4 Punkte)

a) Durch welche Quantenzahlen wird der Spin des Elektrons bestimmt?
b) Skizzieren Sie das Vektordiagramm für den Spin des Elektrons.
c) Welche Zahlenwerte haben die Eigenwerte des Spins?
d) Welchen Radius hat eine rotierende Kugel mit der Masse und dem Drehimpuls des Elektrons, wenn die größte Geschwindigkeit an der Oberfläche der Kugel die Lichtgeschwindigkeit erreicht? Hinweis: Das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel der Masse m ist $I = 2mr^2/5$ und der Zusammenhang von Drehimpuls und Kreisfrequenz ist $L = I\omega$.

a) Der Spin wird durch die Quantenzahl $s = 1/2$ und die Quantenzahlen $m_s = \pm 1/2$ bestimmt.

b) Vektorskizze des Spins: Die Länge des Vektors ist durch die Quantenzahl $s = 1/2$ und die Projektion auf die z-Achse durch die Quantenzahl $m_s = \pm 1/2$ bestimmt.



c) Der Eigenwert von $\vec{s}^{\,2}$ ist

$$\hbar^2\, s(s+1) = \left(\frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}}{2\pi}\right)^2 \frac{3}{4} = 0{,}33 \cdot 10^{-30}\,(\mathrm{eVs})^2$$

Die Eigenwerte von s_z sind

$$\hbar m_s = \pm\frac{1}{2}\frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}}{2\pi} = \pm 0{,}33 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}$$

d) Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{mit der Periodendauer} \quad T = 2\pi\,\frac{r}{c} \quad \text{also} \quad \omega = \frac{c}{r}$$

Wird für den Drehimpuls die Projektion auf die z-Achse verwendet

$$\frac{\hbar}{2} = \frac{2m_\mathrm{e}r^2}{5}\frac{c}{r}$$

dann ergibt sich

$$r = \frac{5\hbar}{4m_\mathrm{e}c} = \frac{5\hbar c}{4m_\mathrm{e}c^2} = \frac{5 \cdot 4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}\, 3 \cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1}}{4 \cdot 2\pi\, 500 \cdot 10^3\,\mathrm{eV}} = 0{,}5 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}$$

Wird statt der Projektion auf die z-Achse die Länge des Drehimpulsvektors $\hbar\sqrt{s(s+1)}$ verwendet, dann ergibt sich der Radius

$$r' = r\frac{\hbar\sqrt{s(s+1)}}{\hbar/2} = r \cdot \sqrt{3} = 0{,}866 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}$$

Bem.: Durch die Rutherfordschen Streuversuche (1909-13), war bekannt, dass der Kernradius zur damaligen Zeit unmessbar klein war. Ein Elektronenradius, der den Kernradius von $\approx 10^{-15}$ m um Größenordnungen übersteigt, ist unrealistisch. Man kann sich das Elektron also nicht als eine rotierende Kugel vorstellen.

7. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 13 und 17) (4 Punkte)

a) Wie wird aus der Hamilton-Funktion der Hamiltonoperator?
b) Wie lautet die Schrödinger-Gleichung in ihrer allgemeinsten Form?
c) Wie lautet die Schrödinger-Gleichung für ein Wasserstoffatom, wenn relativistische Effekte nicht berücksichtigt werden?
d) Wie lautet die Schrödinger-Gleichung, wenn der Spin des Elektrons berücksichtigt wird und das Wasserstoffatom sich in einem starken homogenen magnetischen Feld befindet?

a) In der Hamiltonfunktion muss der Impuls durch den Impulsoperator ersetzt werden

$$\vec{p} \quad \rightarrow \quad -\mathrm{i}\hbar\nabla$$

b) Die Schrödingergleichung in der allgemeinsten Form lautet

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}\psi$$

Dabei bezeichnet $\hat{\mathcal{H}}$ den Hamiltonoperator. ψ muss nicht notwendigerweise eine Wellenfunktion sein, sondern kann einen allgemeinen Quantenzustand repräsentieren, z.B. den Zustand des Spins.

c)

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}\right)\psi$$

d)

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} + {}_{\mathrm{B}}\frac{\hat{\vec{L}}}{\hbar}\vec{B} + 2{}_{\mathrm{B}}\frac{\hat{\vec{s}}}{\hbar}\vec{B}\right)\psi$$

Die magnetischen Momente von Spin und Bahndrehimpuls präzedieren unabhängig voneinander um das magnetische Feld (Paschen-Back Effekt). Die Spin-Bahn-Kopplung kann vernachlässigt werden.

8. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 21) (4 Punkte)

a) Berechnen Sie die Dichte $n = N/V$ der Leitungselektronen von Kupfer.
Hinweis: Die Massendichte von Kupfer ist $\rho_{\mathrm{Cu}} = 8{,}96\,\mathrm{g/cm^3}$, die Massenzahl ist $A = 63{,}55$ und es gibt ein Leitungselektron je Kupfer-Atom.

b) Berechnen Sie die Fermi-Wellenzahl von Kupfer.

c) Berechnen Sie die Fermi-Geschwindigkeit von Kupfer.

d) Die elektrische Leitfähigkeit von Kupfer beträgt $\sigma = 58 \cdot 10^6$ A/Vm. Berechnen Sie die mittlere freie Weglänge eines Elektrons in Kupfer. Hinweis: $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_\mathrm{e}}$

a) Gibt es N Kupfer-Atome, dann ist die Dichte von Kupfer

$$\rho_{\mathrm{Cu}} = \frac{m}{V} = \frac{NAu}{V} = \frac{N \cdot 63{,}55u}{V}$$

und die Dichte der Leitungselektronen

$$\frac{N}{V} = \frac{\rho_{\mathrm{Cu}}}{63{,}55u} = \frac{8{,}96 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/cm^3}}{63{,}55 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} = 8{,}5 \cdot 10^{22}\,\mathrm{cm^{-3}} = 8{,}5 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}.$$

b) Die Fermi-Wellenzahl ergibt sich, wenn das Volumen der Fermi-Kugel durch das Volumen eines k-Zustands geteilt wird und berücksichtigt wird, dass jeder k-Zustand mit zwei Elektronen besetzt werden kann. Aus

$$N = 2\frac{\frac{4\pi k_\mathrm{F}^3}{3}}{\frac{(2\pi)^3}{V}}$$

folgt

$$k_\mathrm{F} = \left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{1/3} = \left(3\pi^2 8{,}5 \cdot 10^{28}\,1/\mathrm{m^3}\right)^{1/3} = 13{,}6 \cdot 10^9\,\mathrm{m^{-1}}.$$

c) Die Fermi-Geschwindigkeit ist

$$v_\mathrm{F} = \frac{\hbar k_\mathrm{F}}{m_\mathrm{e}} = \frac{\hbar k_\mathrm{F} c^2}{m_\mathrm{e} c^2} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs} \cdot 13{,}6 \cdot 10^9\,\mathrm{m^{-1}}(3 \cdot 10^8\,\mathrm{ms^{-1}})^2}{2\pi \cdot 500 \cdot 10^3\,\mathrm{eV}} = 0{,}16 \cdot 10^7\,\mathrm{ms^{-1}}$$

d) Die mittlere freie Weglänge ist

$$\ell_\mathrm{F} = v_\mathrm{F} \cdot \tau$$

Aus der Leitfähigkeit ergibt sich die mittlere Stoßzeit

$$\tau = \frac{\sigma m_\mathrm{e}}{ne^2}$$

und damit

$$\ell_\mathrm{F} = \frac{\sigma m_\mathrm{e} v_\mathrm{F}}{n e^2} = \frac{58 \cdot 10^6\,\mathrm{AV^{-1}m^{-1}}\,500 \cdot 10^3\,\mathrm{eV}\,0{,}16 \cdot 10^7\,\mathrm{ms^{-1}}}{(3 \cdot 10^8\,\mathrm{ms^{-1}})^2\,8{,}5 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}} \cdot \mathrm{e} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}} = 2{,}74 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$$

Mit der Gitterkonstante von Kupfer $a = 3{,}61 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$ (vgl. Aufgabe 3) wären das

$$\frac{\ell_\mathrm{F}}{a} = \frac{2{,}74 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}}{3{,}61 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}} = 7590$$

Elementarzellen, die zwischen zwei Stößen durchflogen werden.

1. Aufgabe (4 Punkte)

Auf einem Draht breitet sich eine transversale Welle gemäß der Wellenfunktion $z(x,t) = 1\,\mathrm{mm} \cdot \sin\big((6\,\mathrm{m}^{-1})x - (600\,\mathrm{s}^{-1})t\big)$ aus.

a) Bestimmen Sie (i) die Wellenlänge und (ii) die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.
b) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion die Wellengleichung erfüllt.
c) Mit welcher Kraft ist der Draht gespannt, wenn er aus Titan gefertigt ist ($\rho_{\mathrm{Ti}} = 4{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$) und einen Durchmesser von $d = 2\,\mathrm{mm}$ hat?
d) Die Welle erreicht bei $x = 0\,\mathrm{m}$ das Drahtende, das fest eingespannt ist. Wie lautet die Wellenfunktion z_{R} der reflektierten Welle?
e) Skizzieren Sie das Ergebnis der Überlagerung der Wellen z und z_{R} am Drahtende.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Paralleles Licht ($\lambda = 600\,\mathrm{nm}$) fällt senkrecht auf einen Einzelspalt ($s = 0{,}02$ mm).

a) Unter welchen Winkeln werden die Minima der Intensität beobachtet?
b) Skizzieren Sie die Intensitätsverteilung, die auf einem Schirm beobachtet wird als Funktion von $\sin\theta$. θ bezeichnet den Ablenkwinkel.
c) Nun wird ein zweiter Spalt ($s = 0{,}02$ mm) parallel zum ersten Spalt geöffnet. Beide Spalte sind durch einen lichtundurchlässigen Steg der Breite $b = s$ voneinander getrennt. Unter welchen zusätzlichen Winkeln werden nun Minima der Intensität beobachtet?
d) Skizzieren Sie die resultierende Intensitätsverteilung am Schirm als Funktion von $\sin\theta$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Ein Kristallgitter ergibt sich durch die Wiederholung einer primitiven Elementarzelle, die durch die linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ aufgespannt wird.

a) Die Streuung von Wellen an Kristallgittern wird mit dem reziproken Gitter beschrieben. Wie ist das reziproke Gitter definiert?
b) Wie lautet die Bedingung für konstruktive Interferenz?
c) Berechnen Sie die Vektoren des reziproken Gitters für einen einfach kubischen Kristall mit dem Gitterparameter $a = 350\,\mathrm{pm}$.
d) Ein Röntgenstrahl der Wellenlänge $\lambda = 0{,}35\,\mathrm{nm}$ fällt auf den kubischen Kristall. Unter welchen Winkeln bezogen auf den einfallenden Strahl werden die Maxima der konstruktiven Interferenz bei elastischer Streuung beobachtet?

4. Aufgabe (4 Punkte)

Die Lorentz-Transformation zwischen den Bezugssystemen S und S' ist
$t = \gamma(\mathrm{t}' + \frac{V}{c^2}\mathrm{x}')$, $x = \gamma(x' + Vt')$, $y = y'$, $z = z'$ mit $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - V^2/c^2}$.

a) Wie lautet die klassische Galilei-Transformation für kleine Relativgeschwindigkeiten V?
b) Skizzieren Sie die relative Bewegung der Bezugssysteme S und S'.
c) Berechnen Sie die relativistische Transformation der Geschwindigkeiten $v_{\mathrm{x}} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ und $v_{\mathrm{y}} = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$.

d) Unter welchem Winkel ist im Bezugssystem S ein Lichtstrahl geneigt, der sich im Bezugssystem S' entlang der y' Achse bewegt?

5. Aufgabe (4 Punkte)

Monochromatisches Licht der Wellenlänge $\lambda = 500\,\text{nm}$ fällt auf ein Metallstück. Die emittierten Elektronen haben eine maximale Geschwindigkeit von $v = 2{,}6 \cdot 10^5\,\text{m/s}$.

a) Wie groß ist die Energie der verwendeten Photonen?
b) Wie groß ist die maximale kinetische Energie der emittierten Elektronen.
c) Wie groß ist die Austrittsarbeit der Elektronen?
d) Wie groß ist die maximale Wellenlänge λ_{max}, mit der die Elektronenemission gerade noch möglich ist?

6. Aufgabe (4 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einem eindimensionalen Potential $V(x) = \frac{1}{2}Dx^2$. Die Wellenfunktion im Grundzustand ist $\psi_0 = Ae^{-ax^2}$.

a) Wie lautet die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung des Teilchens?
b) Berechnen Sie den Parameter a und die Energie des Teilchen im Grundzustand.
c) Wie lautet die Wellenfunktion des Teilchens im ersten angeregten Zustand?

7. Aufgabe (4 Punkte)

a) Erklären Sie anhand einer Skizze die Erzeugung von Röntgenstrahlen mittels einer Röntgenröhre und benennen Sie alle relevanten Komponenten.
b) Skizzieren Sie ein Röntgenspektrum.
c) Geben Sie eine Formel zur Berechnung der kleinsten möglichen Wellenlänge der Röntgenstrahlen einer Röntgenröhre an.
d) Was ist die Ursache für die charakteristische Strahlung einer Röntgenröhre und wie lautet das Moseleysche Gesetz, mit dem die Wellenlänge der charakteristischen Strahlung berechnet werden kann?

8. Aufgabe (4 Punkte)

a) Was besagt das Pauli-Prinzip?
b) Wie lautet die Formel für Fermi-Verteilungsfunktion?
c) Skizzieren Sie die Fermi-Verteilungsfunktion für $T = 0$ und $T \neq 0$ und erläutern Sie die Skizze.
d) Weshalb ist die Wärmekapazität eines Elektronengases sehr viel kleiner als die Wärmekapazität eines idealen klassischen Gases gleicher Teilchenzahl?
e) Wie ändert sich die Wärmekapazität eines Elektronengases mit der Temperatur?

Bitte verwenden Sie für die Konstanten die folgenden Werte:

Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^8\ \text{m/s}$	Plancksche Konstante:	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\text{Js}$
Ruhemasse des Elektrons:	$m_e = 9 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$	Elementarladung:	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{As}$

1. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 5) (4 Punkte)

Auf einem Draht breitet sich eine transversale Welle gemäß der Wellenfunktion $z(x,t) = 1\,\mathrm{mm} \cdot \sin\big((6\,\mathrm{m}^{-1})x - (600\,\mathrm{s}^{-1})t\big)$ aus.

a) Bestimmen Sie (i) die Wellenlänge und (ii) die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.
b) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion die Wellengleichung erfüllt.
c) Mit welcher Kraft ist der Draht gespannt, wenn er aus Titan gefertigt ist ($\rho_{\mathrm{Ti}} = 4{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$) und einen Durchmesser von $d = 2\,\mathrm{mm}$ hat?
d) Die Welle erreicht bei $x = 0\,\mathrm{m}$ das Drahtende, das fest eingespannt ist. Wie lautet die Wellenfunktion z_{R} der reflektierten Welle?
e) Skizzieren Sie das Ergebnis der Überlagerung der Wellen z und z_{R} am Drahtende.

a) (i) Wellenlänge

$$k = 6\,\mathrm{m}^{-1} = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{6\,\mathrm{m}^{-1}} = 1{,}05\,\mathrm{m}$$

(ii) Geschwindigkeit

$$z(x,t) = 1\,\mathrm{mm} \cdot \sin\big((6\,\mathrm{m}^{-1})x - (600\,\mathrm{s}^{-1})t\big) = 1\,\mathrm{mm} \cdot \sin\left((6\,\mathrm{m}^{-1})\left\{x - \frac{(600\,\mathrm{s}^{-1}}{6\,\mathrm{m}^{-1}}t\right\}\right)$$

und

$$x = vt \rightarrow v = 100\,\mathrm{ms}^{-1}$$

b) Die Wellengleichung ist

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = (-1)(600\,\mathrm{s}^{-1})^2 z = v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = v^2(-1)(6\,\mathrm{m}^{-1})^2 z$$

c) Mit der Formel für die Geschwindigkeit

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mu}}$$

und der Massenbelegung

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta \ell} = \frac{\rho A \Delta \ell}{\Delta \ell} = \rho A = 4{,}5\,\mathrm{g\,cm^{-3}} \frac{\pi}{4}(0{,}2\,\mathrm{cm})^2 = 0{,}14\,\mathrm{g\,cm^{-1}} = 1{,}4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$$

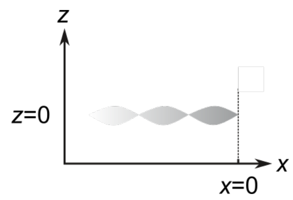
ist die Kraft

$$\mathrm{F} = \mathrm{v}^2 \mu = (100\,\mathrm{ms}^{-1})^2 1{,}4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^{-1}} = 140\,\mathrm{N}$$

d) Die reflektierte Welle ist

$$z(x,t)_{\mathrm{R}} = 1\,\mathrm{mm} \cdot \sin\big((6\,\mathrm{m}^{-1})x + (600\,\mathrm{s}^{-1})t\big)$$

e) Es bildet sich eine stehende Welle aus



2. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 8) (4 Punkte)

Paralleles Licht ($\lambda = 600\,\text{nm}$) fällt senkrecht auf einen Einzelspalt ($s = 0{,}02$ mm).

a) Unter welchen Winkeln werden die Minima der Intensität beobachtet?
b) Skizzieren Sie die Intensitätsverteilung, die auf einem Schirm beobachtet wird als Funktion von $\sin\theta$. θ bezeichnet den Ablenkwinkel.
c) Nun wird ein zweiter Spalt ($s = 0{,}02$ mm) parallel zum ersten Spalt geöffnet. Beide Spalte sind durch einen lichtundurchlässigen Steg der Breite $b = s$ voneinander getrennt. Unter welchen zusätzlichen Winkeln werden nun Minima der Intensität beobachtet?
d) Skizzieren Sie die resultierende Intensitätsverteilung am Schirm als Funktion von $\sin\theta$.

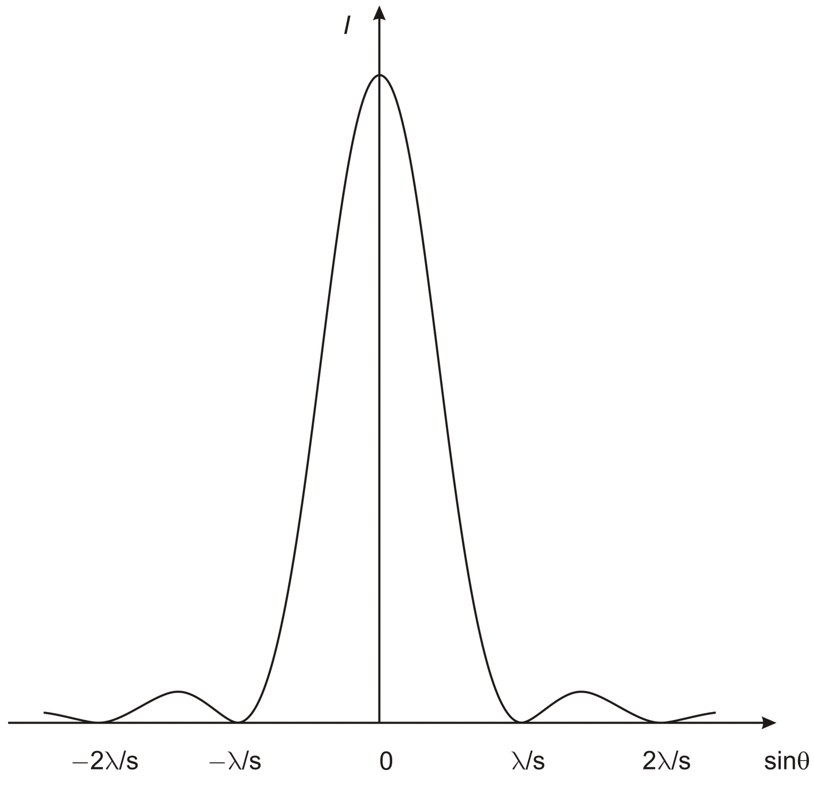
a) Für die Minima am Spalt gilt

$$\sin\theta_n = n\frac{\lambda}{s}$$

mit $n = \pm 1, \pm 2$ etc.. Damit hat man

$$|\sin\theta_n| = |n|\frac{\lambda}{s} = |n|\frac{6\cdot 10^{-7}\,\text{m}}{2\cdot 10^{-5}\,\text{m}} = |n|0{,}03 \approx |\theta_n| \leq 1$$

b) Skizze der Intensitätsverteilung als Funktion von $\sin\theta$

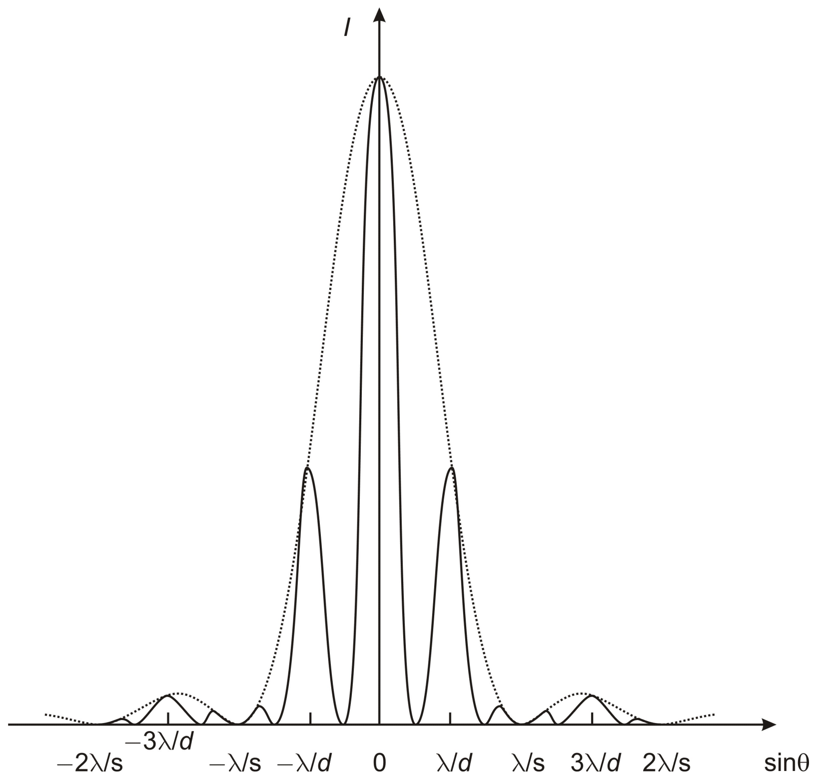


c) Der Abstand von Spaltmitte zu Spaltmitte beträgt $d = 0{,}04\,\text{mm}$ und ist damit doppelt so groß wie die Spaltöffnungen. Für die Intensitätsminima beim Doppelspalt gilt

$$|\sin\theta_\mathrm{n}| = |(2\mathrm{n}+1)|\frac{\lambda}{2d} = |(2\mathrm{n}+1)|\frac{6\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}}{8\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}} = |(2\mathrm{n}+1)|\,0{,}75\cdot 10^{-2} \approx |\theta_\mathrm{n}| \leq 1$$

mit $\mathrm{n} = 0, \pm 1, \pm 2$ etc..

d) Wird die Spaltbreite beim Doppelspalt vernachlässigt, dann treten die Maxima für die Winkel $d\sin\theta_\mathrm{n} = \mathrm{n}\lambda$ auf, so dass die Maxima mit geradem n mit den Minima der Spaltöffnungen zusammen fallen und ausgelöscht werden. Damit ergibt sich die folgende Skizze der Intensitätsverteilung am Schirm als Funktion von $\sin\theta$ für den Doppelspalt mit $d = 0{,}04$ mm und $s = 0{,}02$ mm.



3. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 8 und 12) (4 Punkte)

Ein Kristallgitter ergibt sich durch die Wiederholung einer primitiven Elementarzelle, die durch die linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ aufgespannt wird.

a) Die Streuung von Wellen an Kristallgittern wird mit dem reziproken Gitter beschrieben. Wie ist das reziproke Gitter definiert?
b) Wie lautet die Bedingung für konstruktive Interferenz?
c) Berechnen Sie die Vektoren des reziproken Gitters für einen einfach kubischen Kristall mit dem Gitterparameter $a = 350\,\text{pm}$.
d) Ein Röntgenstrahl der Wellenlänge $\lambda = 0{,}35\,\text{nm}$ fällt auf den kubischen Kristall. Unter welchen Winkeln bezogen auf den einfallenden Strahl werden die Maxima der konstruktiven Interferenz bei elastischer Streuung beobachtet?

a) Die Vektoren des reziproken Gitters $\vec{b}_j$ sind durch die Bedingung

$$\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = 2\pi\delta_{i,j}$$

definiert und $i, j = 1, 2, 3$.

b) Die Bedingung für konstruktive Interferenz ist

$$\vec{k} - \vec{k}' = \vec{K}_{h,k,\ell}.$$

Dabei bezeichnet $\vec{k}$ den Wellenzahlvektor der einfallenden Welle, $\vec{k}'$ den Wellenzahlvektor der gestreuten Welle und $\vec{K}_{h,k,\ell} = h\vec{b}_1 + k\vec{b}_2 + \ell\vec{b}_3$ einen Vektor des reziproken Gitters.

c) Gemäß der Definition des reziproken Gitters ergibt sich für ein einfach kubisches Gitter

$$\vec{b}_{j=1,2,3} = \frac{2\pi}{a}\frac{\vec{a}_j}{a}$$

d) Aus der Bedingung für konstruktive Interferenz ergibt sich für die Beträge

$$\frac{1}{2}|\vec{K}_{h,k,\ell}| = |\vec{k}| \sin\frac{\theta_{h,k,\ell}}{2}$$

und mit $k = 2\pi/\lambda$ für den Streuwinkel

$$\sin\frac{\theta_{h,k,\ell}}{2} = \frac{\lambda}{2a} = \frac{3{,}5\cdot 10^{-10}\,\text{m}}{2\cdot 3{,}5\cdot 10^{-10}\,\text{m}}\sqrt{h^2+k^2+\ell^2} = 0{,}5\sqrt{h^2+k^2+\ell^2}.$$

h,k,l	$\sin\frac{\theta_{h,k,\ell}}{2}$	$\theta_{h,k,\ell}$
1,0,0	0,5	60°
1,1,0	$0{,}5\sqrt{2}$	90°
1,1,1	$0{,}5\sqrt{3}$	120°
2,0,0	$0{,}5\sqrt{4}$	180°

4. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 10) (4 Punkte)

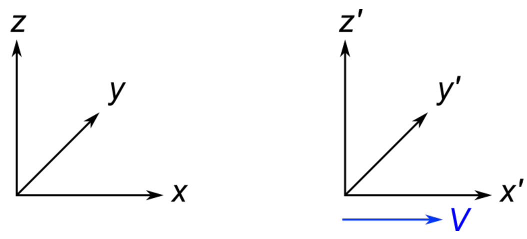
Die Lorentz-Transformation zwischen den Bezugssystemen S und S' ist
$t = \gamma(t' + \frac{V}{c^2}x')$, $x = \gamma(x' + Vt')$, $y = y'$, $z = z'$ mit $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - V^2/c^2}$.

a) Wie lautet die klassische Galilei-Transformation für kleine Relativgeschwindigkeiten V?
b) Skizzieren Sie die relative Bewegung der Bezugssysteme S und S'.
c) Berechnen Sie die relativistische Transformation der Geschwindigkeiten $v_x = dx/dt$ und $v_y = dy/dt$.
d) Unter welchem Winkel ist im Bezugssystem S ein Lichtstrahl geneigt, der sich im Bezugssystem S' entlang der y' Achse bewegt?

a) Für $V << c$ gilt $\gamma \to 1$ und $V/c \to 0$. Damit ergibt sich die klassische Galilei-Transformation

$$\begin{aligned} t &= t' \\ x &= x' + Vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

b) Das Bezugssystem S' bewegt sich relative zum Bezugssystem S nach rechts



c)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + Vdt'}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'} = \frac{v_x' + V}{1 + \frac{Vv_x'}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma(dt' + \frac{V}{c^2}dx')} = \frac{v_y'}{\gamma(1 + \frac{Vv_x'}{c^2})}$$

d) In Bezugssystem S gilt $v_x' = 0$ und $v_y' = c$. Damit ist in Bezugssystem S die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} v_x &= V \\ v_y &= c\gamma^{-1} \end{aligned}$$

und der Winkel zur y-Achse

$$\tan\alpha = \frac{v_x}{v_y} = \gamma\frac{V}{c}$$

5. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 11) (4 Punkte)

Monochromatisches Licht der Wellenlänge $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$ fällt auf ein Metallstück. Die emittierten Elektronen haben eine maximale Geschwindigkeit von $v = 2{,}6 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}$.

a) Wie groß ist die Energie der verwendeten Photonen?
b) Wie groß ist die maximale kinetische Energie der emittierten Elektronen.
c) Wie groß ist die Austrittsarbeit der Elektronen?
d) Wie groß ist die maximale Wellenlänge λ_{max}, mit der die Elektronenemission gerade noch möglich ist?

a) Die Energie der Photonen ist

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\,3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{500 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 3{,}98 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}.$$

b) Die maximale kinetische Energie der Elektronen ist

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 9 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} (2{,}6 \cdot 10^5\,\mathrm{ms}^{-1})^2 = 3{,}4 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J}$$

c) Die Austrittsarbeit ist

$$W_{\mathrm{A}} = E_\gamma - E_{\mathrm{kin}} = (39{,}8 - 3{,}4) \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J} = 36{,}4 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J}$$

d) Für die maximale Wellenlänge gilt

$$W_{\mathrm{A}} = \frac{hc}{\lambda_{\mathrm{max}}}$$

also

$$\lambda_{\mathrm{max}} = \frac{hc}{W_{\mathrm{A}}} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\,3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{36{,}4 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J}} = 546\,\mathrm{nm}$$

6. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 17) (4 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einem eindimensionalen Potential $V(x) = \frac{1}{2}Dx^2$. Die Wellenfunktion im Grundzustand ist $\psi_0 = Ae^{-ax^2}$.

a) Wie lautet die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung des Teilchens?
b) Berechnen Sie den Parameter a und die Energie des Teilchen im Grundzustand.
c) Wie lautet die Wellenfunktion des Teilchens im ersten angeregten Zustand?

a) Die zeitunabhängige Schrödinger Gleichung des Teilchens ist

$$E_n\psi_n = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_n + \frac{1}{2}Dx^2\psi_n$$

mit den Quantenzahlen $n = 0, 1, 2, ...$

b) Die Ableitungen der Wellenfunktion ψ_0 sind

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial x} = -2ax\psi_0$$

und

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} = -2a\psi_0 + 4a^2x^2\psi_0$$

Einsetzen in die Schrödinger-Gleichung ergibt

$$E_0\psi_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}(-2a\psi_0 + 4a^2x^2\psi_0) + \frac{1}{2}Dx^2\psi_0.$$

Damit ergibt sich für den Parameter a der Wert

$$-\frac{\hbar^2}{2m}4a^2 + \frac{1}{2}D = 0 \rightarrow a = \frac{\sqrt{Dm}}{2\hbar}$$

und für die Energie

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{m}a = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{D}{m}}$$

c) Die Wellenfunktion des 1. angeregten Zustands hat einen Nulldurchgang

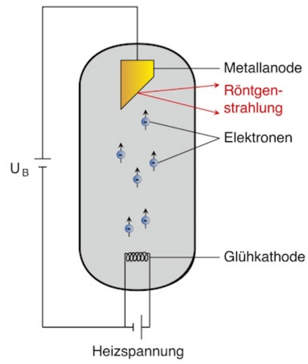
$$\psi_1 \propto xe^{-a_1x^2}$$

(Die Rechnung zeigt $a_1 = a$)

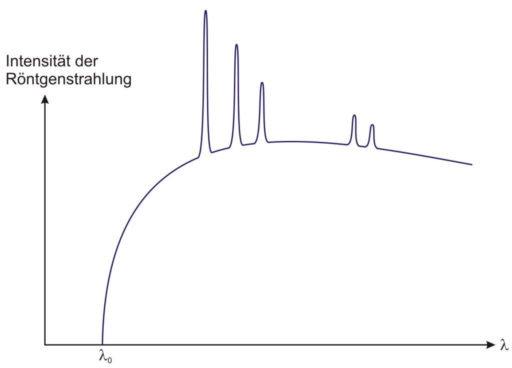
7. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 15, 17 und 18) (4 Punkte)

a) Erklären Sie anhand einer Skizze die Erzeugung von Röntgenstrahlen mittels einer Röntgenröhre und benennen Sie alle relevanten Komponenten.
b) Skizzieren Sie ein Röntgenspektrum.
c) Geben Sie eine Formel zur Berechnung der kleinsten möglichen Wellenlänge der Röntgenstrahlen einer Röntgenröhre an.
d) Was ist die Ursache für die charakteristische Strahlung einer Röntgenröhre und wie lautet das Moseleysche Gesetz, mit dem die Wellenlänge der charakteristischen Strahlung berechnet werden kann?

a) Elektronen werden an der Glühkathode verdampft und in Richtung der Metallanode mit der Spannung U_B beschleunigt. Dort werden sie abgebremst. Dabei entsteht elektromagnetische Strahlung.



b) Schematisches Spektrum einer Röntgenröhre. Es besteht aus dem kontinuierlichen Bremsspektrum und den Peaks der charakteristischen Strahlung



c) Bei der kleinst möglichen Wellenlänge wird die gesamte kinetische Energie der Elektronen in elektromagnetische Strahlung umgewandelt, d.h. es gilt

$$E_{\text{kin}} = eU_B = \frac{hc}{\lambda_0} \rightarrow \lambda_0 = \frac{hc}{eU_B}$$

d) Die beschleunigten Elektronen können fest gebundene Elektronen der Atome im Anodenmaterial freisetzen. Die dadurch entstandenen freien Plätze werden durch Elektronen des Atoms mit höherer Energie aufgefüllt. Dabei wird die charakteristische Strahlung ausgestrahlt. Moseley fand für die charakteristische Strahlung

$$\frac{1}{\lambda_{\mathrm{nm}}} = R_\infty \left(\frac{1}{\mathrm{n}^2} - \frac{1}{\mathrm{m}^2}\right) (\mathrm{Z} - \beta_{\mathrm{nm}})^2$$

n<m sind die Quantenzahlen des Bohrschen Atommodels, R_∞ ist die Rydbergkonstante, Z die Kernladungszahl des Atoms und β_{nm} eine Abschirmkonstante, die von jeweiligen Übergang abhängt.

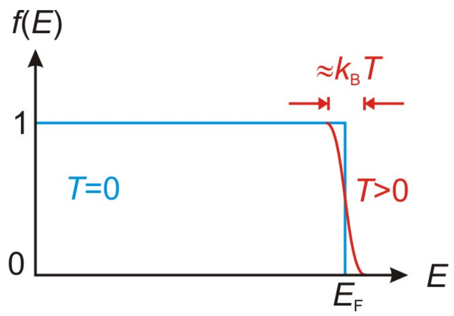
8. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 20 und 21) (4 Punkte)

a) Was besagt das Pauli-Prinzip?
b) Wie lautet die Formel für Fermi-Verteilungsfunktion?
c) Skizzieren Sie die Fermi-Verteilungsfunktion für $T = 0$ und $T \neq 0$ und erläutern Sie die Skizze.
d) Weshalb ist die Wärmekapazität eines Elektronengases sehr viel kleiner als die Wärmekapazität eines idealen klassischen Gases gleicher Teilchenzahl?
e) Wie ändert sich die Wärmekapazität eines Elektronengases mit der Temperatur?

a) Elektronen, die einen Quantenzustand besetzten, müssen sich mindestens in einer Quantenzahl unterscheiden.
b) Die Formel der Fermi-Verteilungsfunktion ist

$$\mathrm{f}(E) = \frac{1}{\mathrm{e}^{(E-\mu)/k_\mathrm{B}T} + 1}$$

Dabei bezeichnet μ das chemische Potential, das im wesentlichen der Fermi-Energie entspricht.
c) Skizze der Fermi-Verteilungsfunktion



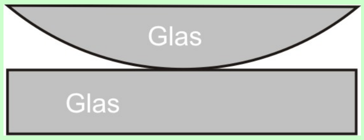
Bei $T = 0$ sind alle Elektronenzustände bis zur Fermi-Energie E_F besetzt. Da bei Festkörpern immer $k_\mathrm{B}T << E_\mathrm{F}$ gilt, weicht der Bereich um E_F für $T > 0$ nur etwas auf.
d) In Gegensatz zu einem klassischen Gas, bei dem alle Teilchen thermisch angeregt werden können, können bei einem Elektronengas nur die Elektronen angeregt werden, die sich im Energiebereich $k_\mathrm{B}T$ unterhalb der Fermi-Energie befinden.
e) Die Wärmekapazität beim Elektronengas ist proportional zur Temperatur.

1. Aufgabe (4 Punkte)

a) Wie lautet die eindimensionale Wellengleichung?
b) Zeigen Sie explizit, dass die folgenden Funktionen $\psi(x,t)$ die Wellengleichung erfüllen:
   i. $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$
   ii. $\psi(x,t) = A\sin(kx)\cos(\omega t)$.
c) Bestimmen Sie die Ausbreitungsrichtung der Wellen aus Teil b. Skizzieren Sie dazu $\psi(x,0)$ und $\psi(x,\, t = 1\text{s})$, unter der Annahme $k = \pi\,\text{cm}^{-1}$, $\omega = \pi/2\,\text{s}^{-1}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Licht der Wellenlänge 500 nm fällt senkrecht auf eine Linse mit dem Krümmungsradius $R = 2\,\text{m}$, die auf einer Glasplatte liegt (vgl. Skizze). Es kann eine Abfolge von hellen und dunklen Ringen beobachtet werden.



a) Was ist die Ursache für das Ringmuster?
b) Welche Bedingung gilt für den m-ten dunklen Ring im Falle der Reflexion, wenn m vom Mittelpunkt ($m = 0$) der Ringstruktur gezählt wird?
c) Welchen Radius hat der 2. dunkle Ring?
d) Welcher Radius ergibt sich, wenn sich statt Luft ein Immersionsöl mit dem Brechungsindex $n = 2{,}1$ zwischen der Linse und der Glasplatte befindet?

3. Aufgabe (4 Punkte)

Ein Rohr (Länge $\ell = 5\,\text{cm}$) mit Glasfenstern an den Enden befindet sich in einem der beiden Arme eines Michelson-Interferometers. Das Rohr wird mit einer Vakuumpumpe leer gepumpt und die Spiegel des Interferometers werden so eingestellt, dass in der Mitte des ringförmigen Interferograms ein Kreis maximaler Intensität beobachtet werden kann. Wird das Rohr langsam belüftet, können die Ringe abgezählt werden, die dabei das Interferogram durchwandern. Es werden $\Delta N = 49{,}6$ Ringe gezählt. Die Lichtwellenlänge im Vakuum ist $\lambda_0 = 589{,}29\,\text{nm}$.

a) Wie viele Wellenlängen passen im Rohr zwischen die Glasfenster im luftleeren und im belüfteten Zustand?
b) Welcher Wert ergibt sich damit für den Brechungsindex von Luft?

4. Aufgabe (4 Punkte)

Neutronen verlassen einen Forschungsreaktor mit einer thermischen Geschwindigkeitsverteilung, welche der Wassertemperatur des Moderators von $T = 100\ \text{K}$ entspricht. Im Maximum der Verteilung gilt $E_{\text{kin}} = k_B T$.

a) Wie groß ist de Broglie-Wellenlänge der Neutronen im Maximum der Verteilung?
b) Schreiben Sie die Laue-Bedingung auf.
c) Ein Neutronenstrahl dieser Wellenlänge wird an einem kubischen Kristall (Gitterparameter $a = 350\,\text{pm}$) gestreut. Berechnen Sie den Gitterparameter des reziproken Gitters.

d) Unter welchen Winkeln bezogen auf den einfallenden Neutronenstrahl werden die Intensitätsmaxima der gestreuten Neutronen beobachtet?

Bitte beachten Sie die Rückseite.

5. Aufgabe (4 Punkte)

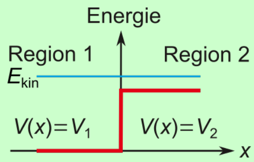
Der Compton Effekt beschreibt den Verlust der Energie eines Photons, das an einem freien Elektron gestreut wird. A. H. Compton hat für das Experiment Photonen der Wellenlänge 0,0711 nm an Nickel Einkristallen gestreut.

a) Wie groß ist die Energie der verwendeten Photonen?
b) Berechnen Sie die Wellenlänge der Photonen, die unter einem Winkel von $\theta = 180°$ (d.h. in Richtung der Quelle) an freien Elektronen gestreut werden.
c) Wie groß ist die Energie dieser rückgestreuten Photonen?
d) Die Austrittsarbeit beim Photoeffekt beträgt 5 eV. Ist die Näherung quasi freier Elektronen gerechtfertigt?

6. Aufgabe (4 Punkte)

Ein Partikelstrahl mit der kinetischen Energie E_p trifft von links auf eine Potentialschwelle der Höhe $V_0 < E_\mathrm{p}$.

a) Geben Sie die Schrödinger Gleichung für den Partikelstrahl links und rechts der Schwelle an.
b) Durch die Annahme, dass sowohl die Wellenfunktion als auch ihre Ableitung stetig sein muss, leiten Sie den Reflexionskoeffizienten R ab.
c) Für welchen Wert von E_p/V_0 gilt $R = 0{,}2$?



7. Aufgabe (4 Punkte)

Für ein Stern-Gerlach Experiment werden Silberatome (Atommasse 107,9 u) im Grundzustand präpariert. Diese bewegen sich in x-Richtung mit einer Geschwindigkeit von $v_x = 464\,\mathrm{m/s}$. Dieser Atomstrahl durchläuft eine Region mit einem magnetischen Feldgradienten $\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z} = 600\,\mathrm{T/m}$, der in z-Richtung ausgerichtet ist.

a) Beschreiben Sie das Stern-Gerlach Experiment und sein Ergebnis.
b) Bestimmen Sie die maximale Beschleunigung der Silberatome.
c) Wie groß ist die maximale Distanz zwischen den linienförmigen Teilstrahlen in der Detektionsebene. Nehmen sie an, dass das magnetische Feld auf eine Region von $\Delta x = 75$ cm in Strahlrichtung begrenzt ist. Im Anschluss an die Region mit dem Magnetfeld durchläuft der Strahl eine Distanz von 1,25 m bis zur Detektionsebene.

8. Aufgabe (4 Punkte)

a) Für die Fermi-Energie bei $T = 0$ K gilt die folgende Formel: $E_\mathrm{F} = \frac{h^2}{8m_\mathrm{e}}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}$. Berechnen Sie für das Metall Lithium die Fermienergie unter der Annahme, dass jedes Lithiumatom ein Elektron an das freie Elektronengas abgibt. Lithium hat eine Dichte von $\rho = 0{,}534\,\mathrm{g/cm^3}$ und eine Atommasse von 6,94 u.
b) Die Wärmekapazität des Elektronengases in einem metallischen Festkörper ergibt sich in der Sommerfeldtheorie zu: $C_\mathrm{V} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{\pi^2}{2}\frac{Nk_\mathrm{B}^2}{E_\mathrm{F}}T$. Klassisch ist die

Wärmekapazität für N Teilchen in einem idealen Gas gleich $C_V = \frac{3}{2}Nk_B$. Welcher Anteil der Leitungselektronen von Lithium trägt zur Wärmekapazität bei $T = 300\,\mathrm{K}$ bei?

Bitte verwenden Sie für die Konstanten die folgenden Werte:

Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^8$ m/s	Plancksche Konstante:	$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js
Boltzmann Konstante:	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$J/K	Compton-Wellenlänge:	$\lambda_C = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ m
Atomare Masseneinheit:	$u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg	Elementarladung:	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As
Ruhemasse des Elektrons:	$m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ kg	Bohrsches Magneton:	$\mu_B = 9{,}27 \cdot 10^{-24}$ J/T

1. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 5) (4 Punkte)

a) Wie lautet die eindimensionale Wellengleichung?
b) Zeigen Sie explizit, dass die folgenden Funktionen $\psi(x,t)$ die Wellengleichung erfüllen:
   i. $\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$
   ii. $\psi(x,t) = A\sin(kx)\cos(\omega t)$.
c) Bestimmen Sie die Ausbreitungsrichtung der Wellen aus Teil b. Skizzieren Sie dazu $\psi(x,0)$ und $\psi(x,\, t = 1\text{s})$, unter der Annahme $k = \pi\,\text{cm}^{-1}$, $\omega = \pi/2\,\text{s}^{-1}$.

a) Eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$$

b) i.

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2\psi(x,t)$$

und

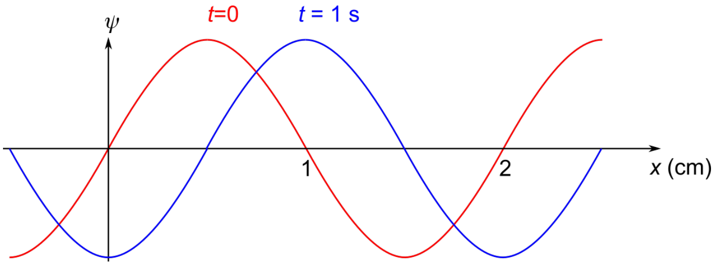
$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = -k^2\psi(x,t)$$

und damit

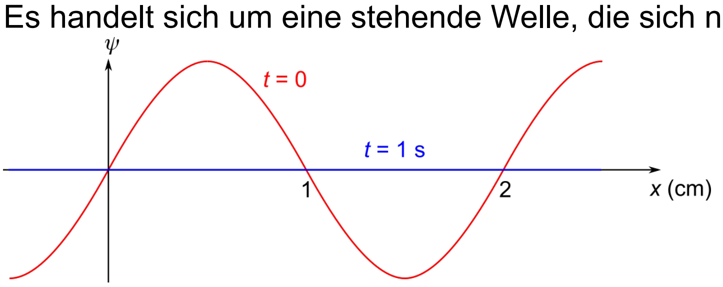
$$-\omega^2\psi(x,t) = -v^2k^2\psi(x,t) \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

ii. wie i.

c) i. Die Welle bewegt sich zu positiven x-Werten hin.

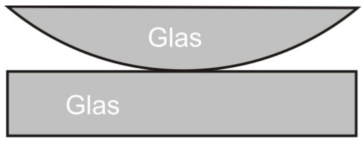


ii. Es handelt sich um eine stehende Welle, die sich nicht bewegt.



2. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 6) (4 Punkte)

Licht der Wellenlänge 500 nm fällt senkrecht auf eine Linse mit dem Krümmungsradius $R = 2\,\mathrm{m}$, die auf einer Glasplatte liegt (vgl. Skizze). Es kann eine Abfolge von hellen und dunklen Ringen beobachtet werden.



a) Was ist die Ursache für das Ringmuster?
b) Welche Bedingung gilt für den m-ten dunklen Ring im Falle der Reflexion, wenn m vom Mittelpunkt (m = 0) der Ringstruktur gezählt wird?
c) Welchen Radius hat der 2. dunkle Ring?
d) Welcher Radius ergibt sich, wenn sich statt Luft ein Immersionsöl mit dem Brechungsindex $n = 2{,}1$ zwischen der Linse und der Glasplatte befindet?

a) Zwischen der Linse und der Glasplatte befindet sich eine dünne Luftschicht. Das Licht wird an der oberen und unteren Fläche der Luftschicht reflektiert. Immer wenn der Phasenunterschied zwischen den beiden reflektierten Wellen ein Vielfaches von 2π beträgt, interferieren die Wellen konstruktiv und die Intensität wird erhöht. Ist der Phasenunterschied ein ungerades Vielfaches von π, dann interferieren die Wellen destruktiv und die Intensität verschwindet im Idealfall vollständig.

b) Bei der Reflexion an der Glasplatte tritt ein Phasensprung von π auf, da die Reflexion am optisch dichteren Medium statt findet. Für den m-ten dunklen Streifen hat man dann die Phasendifferenz zwischen Strahl 1 und 2

$$\Delta\varphi = (2m + 1)\pi \text{ und } m = 0, 1, 2, 3, ...$$

zwischen den beiden reflektierten Wellen. m = 0 entspricht dem Berührungspunkt von Linse und Glasplatte.

c) Für den 2. dunklen Ring sammelt der 2 Strahl eine Phase von 4π auf und der Abstand zwischen Linse und Glasplatte ist

$$4\pi = \frac{2\pi}{\lambda} 2 \cdot d_2 \rightarrow d_2 = \lambda$$

Mit dem Satz von Pythagoras ergibt sich für den Radius r_2

$$R^2 = r_2^2 + (R - d_2)^2 = r_2^2 + R^2 - 2Rd_2 + d_2^2$$

also

$$r_2 = \sqrt{2Rd_2} = \sqrt{2 \cdot 2\,\mathrm{m}\ 5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}} = 1{,}4\,\mathrm{mm}$$

($d_2^2 = \lambda^2 = 25 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}^2$ kann vernachlässigt werden)

d) Befindet sich ein Immersionsöl zwischen der Linse und der Glasplatte, dann verringert sich die Wellenlänge und der Abstand d_2 ist

$$d_2 = \frac{\lambda}{n}$$

und damit der Radius

$$r_2 = \frac{1{,}4\,\text{mm}}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}4\,\text{mm}}{\sqrt{2{,}1}} = 0{,}97\,\text{mm}.$$

3. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 6) (4 Punkte)

Ein Rohr (Länge $\ell = 5\,\text{cm}$) mit Glasfenstern an den Enden befindet sich in einem der beiden Arme eines Michelson-Interferometers. Das Rohr wird mit einer Vakuumpumpe leer gepumpt und die Spiegel des Interferometers werden so eingestellt, dass in der Mitte des ringförmigen Interferograms ein Kreis maximaler Intensität beobachtet werden kann. Wird das Rohr langsam belüftet, können die Ringe abgezählt werden, die dabei das Interferogram durchwandern. Es werden $\Delta N = 49{,}6$ Ringe gezählt. Die Lichtwellenlänge im Vakuum ist $\lambda_0 = 589{,}29\,\text{nm}$.

a) Wie viele Wellenlängen passen im Rohr zwischen die Glasfenster im luftleeren und im belüfteten Zustand?

b) Welcher Wert ergibt sich damit für den Brechungsindex von Luft?

a) Im Vakuum sind es

$$N_0 = \frac{\ell}{\lambda_0} = \frac{5 \cdot 10^{-2}\,\text{m}}{589{,}29 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} = 84848$$

Wellenlängen und im belüfteten Rohr, wo die Wellenlänge kürzer ist, entsprechend mehr

$$N_{\text{Luft}} = n_{\text{Luft}} \frac{\ell}{\lambda_0} = n_{\text{Luft}} N_0$$

b) Jede Veränderung um eine Wellenlänge bewirkt eine hell-dunkel-hell Variation. Da das Rohr zweimal durchlaufen wird, ergibt sich

$$\Delta N = 2(N_{\text{Luft}} - N_0) = 2N_0(n_{\text{Luft}} - 1)$$

und

$$n_{\text{Luft}} - 1 = \frac{\Delta N}{2N_0} = \frac{49{,}6}{2 \cdot 84848} = 0,0002922$$

und $n_{\text{Luft}} = 1{,}0002922$.

4. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 8 und 12) (4 Punkte)

Neutronen verlassen einen Forschungsreaktor mit einer thermischen Geschwindigkeitsverteilung, welche der Wassertemperatur des Moderators von $T = 100$ K entspricht. Im Maximum der Verteilung gilt $E_{\text{kin}} = k_{\text{B}}T$.

a) Wie groß ist de Broglie-Wellenlänge der Neutronen im Maximum der Verteilung?

b) Ein Neutronenstrahl dieser Wellenlänge wird an einem kubischen Kristall (Gitterparameter $a = 350\,\text{pm}$) gestreut. Berechnen Sie den Gitterparameter des reziproken Gitters.

c) Unter welchen Winkeln bezogen auf den einfallenden Neutronenstrahl werden die Intensitätsmaxima der gestreuten Neutronen beobachtet?

a) Der Impuls ist

$$E_{\text{kin}} = \frac{P^2}{2m_{\text{n}}} \rightarrow P = \sqrt{2m_{\text{n}}E_{\text{kin}}} = \sqrt{2m_{\text{n}}k_{\text{B}}T}$$

$$P = \sqrt{2 \cdot 1{,}675 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}\; 1{,}38 \cdot 10^{-23}(\text{Ws/K})\; 100\text{K}} = 2{,}15 \cdot 10^{-24}\,\text{kgm/s}$$

und die de Broglie-Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}\,\text{Ws}^2}{2{,}15 \cdot 10^{-24}\,\text{kgms}^{-1}} = 3{,}08 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$$

b) Die Gitterkonstante des reziproken Gitters ist

$$b = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{350 \cdot 10^{-12}\,\text{m}} = 1{,}8 \cdot 10^{10}\,\text{m}^{-1}$$

c) Die Bedingung für konstruktive Interferenz lautet

$$\sin\theta_{\text{n}} = \frac{K_{\text{n}}}{2k}.$$

θ_n bezeichnet den halben Ablenkwinkel, k die Wellenzahl der Neutronenwelle

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3,08 \cdot 10^{10}\,\text{m}} = 2{,}04 \cdot 10^{10}\,\text{m}^{-1}$$

und

$$K_{\text{hkl}} = \frac{2\pi}{a}\sqrt{\text{h}^2 + \text{k}^2 + \ell^2}$$

die Länge der reziproken Gittervektoren ($\text{h}, \text{k}, \ell = 0, \pm1, \pm2...$ bezeichnet die Millerschen Indizes).

Damit ergeben sich die Interferenzmaxima für die Winkel

$$\sin\theta_{\text{hk}\ell} = \frac{\lambda}{2\text{a}}\sqrt{\text{h}^2 + \text{k}^2 + \ell^2} = \frac{3{,}08}{2 \cdot 3{,}5}\sqrt{\text{h}^2 + \text{k}^2 + \ell^2} = 0{,}44\sqrt{\text{h}^2 + \text{k}^2 + \ell^2}$$

hkl	$\sin\theta_{hk\ell}$	$2\theta_{hk\ell}$
100	0,44	52,2°
110=200	0,62	76,6°
111=300	0,76	99°
210	0,984	159,5°

5. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 11) (4 Punkte)

Der Compton Effekt beschreibt den Verlust der Energie eines Photons, das an einem freien Elektron gestreut wird. A. H. Compton hat für das Experiment Photonen der Wellenlänge 0,0711 nm an Nickel Einkristallen gestreut.

a) Wie groß ist die Energie der verwendeten Photonen?
b) Berechnen Sie die Wellenlänge der Photonen, die unter einem Winkel von $\theta = 180°$ (d.h. in Richtung der Quelle) an freien Elektronen gestreut werden.
c) Wie groß ist die Energie dieser rückgestreuten Photonen?
d) Die Austrittsarbeit beim Photoeffekt beträgt 5 eV. Ist die Näherung quasi freier Elektronen gerechtfertigt?

a) Die Energie der Photonen ist

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\, 3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}}{0{,}0711 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 2{,}80 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}.$$

b) Mit der Compton-Formel $\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta)$ ist die Wellenlänge des rückgestreuten Photons

$$\lambda' = \lambda + 2\lambda_C = 71{,}1 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m} + 2 \cdot 2{,}43 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m} = 76 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}.$$

c) Die Energie des rückgestreuten Photonen ist

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\, 3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}}{76 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}} = 2{,}60 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}.$$

d) Die Energie des Elektrons nach dem Stoß beträgt $0{,}2 \cdot 10^{-15}$ J mit

$$0{,}2 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}/e = 0{,}2 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J}/1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As} = 1{,}25\,\mathrm{kV}.$$

Die kinetische Energie des Elektrons ist mit 1,25 keV sehr viel größer als die Austrittsarbeit von 5 eV, so dass die Näherung eines quasi freien Elektrons zumindest für den Fall der Rückstreuung gerechtfertigt ist.

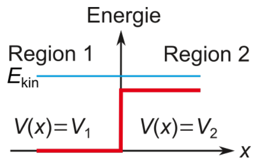
6. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 13) (4 Punkte)

Ein Partikelstrahl mit kinetischer Energie E_p trifft von links auf eine Potentialschwelle der Höhe $V_0 < E_\text{p}$.

a) Geben Sie die Schrödinger Gleichung für den Partikelstrahl links und rechts der Schwelle an.

b) Durch die Annahme, dass sowohl die Wellenfunktion als auch ihre Ableitung stetig sein muss, leiten Sie den Reflexionskoeffizienten R ab.

c) Für welchen Wert von E_p/V_0 gilt $R = 0{,}2$?



a) Die Schrödinger Gleichung links der Potentialsstufe ist mit $V(x) = 0$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_1,$$

die Schrödinger Gleichung rechts der Potentialstufe ist

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_2 + V_0\psi_2$$

b) Ansatz für die Wellenfunktionen ($p_1, p_2 > 0$)

$$\psi_1 = \psi_0 e^{\mathrm{i}(p_1 x - E_\text{p} t)/\hbar} + R\psi_0 e^{\mathrm{i}(-p_1 x - E_\text{p} t)/\hbar},$$
$$\psi_2 = T\psi_0 e^{\mathrm{i}(p_2 x - E_\text{p} t)/\hbar}.$$

Dabei bezeichnen R und T den Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten. Mit den Bedingungen

$$\psi_1(x = 0, t) = \psi_2(x = 0, t),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_1(x = 0, t) = \frac{\partial}{\partial x}\psi_2(x = 0, t)$$

ergibt sich

$$1 + R = T$$
$$p_1 - p_1 R = p_2 T.$$

Der Reflexionskoeffizient ist

$$R = \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}.$$

c) Mit den Wellenfunktionen ergeben die Schrödinger Gleichungen

$$E_\text{p}\psi_1 = \frac{p_1^2}{2m}\psi_1$$
$$E_\text{p}\psi_2 = \frac{p_2^2}{2m}\psi_2 + V_0\psi_2.$$

Also gilt

$$p_1 = \sqrt{2mE_\mathrm{p}}$$
$$p_2 = \sqrt{2m(E_\mathrm{p} - V_0)}.$$

Mit $R = 0{,}2$ ergibt sich

$$p_1 = 1{,}5\,p_2$$
$$\sqrt{2mE_\mathrm{p}} = 1{,}5\sqrt{2m(E_\mathrm{p} - V_0)}$$
$$2mE_\mathrm{p} = 2{,}25 \cdot 2m(E_\mathrm{p} - V_0)$$
$$2{,}25\,V_0 = 1{,}25\,E_\mathrm{p}$$

also $E_\mathrm{p}/V_0 = 1{,}8$.

7. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 18) (4 Punkte)

Für ein Stern-Gerlach Experiment werden Silberatome (Atommasse 107,9 u) im Grundzustand präpariert. Diese bewegen sich in x-Richtung mit einer Geschwindigkeit von $v_x = 464\,\mathrm{m/s}$. Dieser Atomstrahl durchläuft eine Region mit einem magnetischen Feldgradienten $\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z} = 600\,\mathrm{T/m}$, der in z-Richtung ausgerichtet ist.

a) Beschreiben Sie das Stern-Gerlach Experiment und sein Ergebnis.
b) Bestimmen Sie die maximale Beschleunigung der Silberatome.
c) Wie groß ist die maximale Distanz zwischen den linienförmigen Teilstrahlen in der Detektionsebene. Nehmen sie an, dass das magnetische Feld auf eine Region von $\Delta x = 75$ cm in Strahlrichtung begrenzt ist. Im Anschluss an die Region mit dem Magnetfeld durchläuft der Strahl eine Distanz von 1,25 m bis zur Detektionsebene.

a) Beim Stern-Gerlach Experiment wird ein Atomstrahl durch ein inhomogenes Magnetfeld geführt. Dadurch wird der Atomstrahl aufgrund der Drehimpulsquantisierung in mehrere Teilstrahlen aufgespalten. Bei Silber im Grundzustand wird eine Aufspaltung in zwei Teilstrahlen beobachtet.

b) Die Kraft ist
$$F_z = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z}.$$
μ_z bezeichnet das magnetische Moment in z-Richtung
$$\mu_z = -g\mu_\mathrm{B} s_\mathrm{z}/\hbar.$$
Mit dem g-Faktor $g = 2$ und den Eigenwerten für den Spin s_z: $m_\mathrm{s} = \pm\frac{1}{2}$ ergibt sich für den Betrag der Beschleunigung
$$a = \frac{F_z}{m_\mathrm{Ag}} = \frac{\mu_\mathrm{B}\frac{\partial B}{\partial z}}{m_\mathrm{Ag}} = \frac{9{,}27\cdot 10^{-24}\,\mathrm{J/T}\cdot 600\,\mathrm{T/m}}{107{,}9\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} = 31\cdot 10^3\,\mathrm{m/s^2}$$

c) Die Silberatome benötigen die Zeit
$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{0{,}75\,\mathrm{m}}{464\,\mathrm{m/s}} = 1{,}6\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s},$$
um das Magnetfeld zu durchlaufen. Dabei erfahren die Atome eine Querablenkung
$$\Delta s_1 = \pm\frac{1}{2}at^2 = \pm\frac{1}{2}31\cdot 10^3\,\mathrm{m/s^2}(1{,}6\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s})^2 = \pm 39{,}7\,\mathrm{mm}$$
und die Quergeschwindigkeit
$$v_\perp = \pm a\cdot\Delta t = \pm 31\cdot 10^3\,\mathrm{m/s^2}\,1{,}6\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s} = \pm 49{,}6\,\mathrm{m/s}.$$
Die Flugzeit bis zur Detektionsebene beträgt
$$\delta t = \frac{\ell}{v_x} = \frac{1{,}25\,\mathrm{m}}{464\,\mathrm{m/s}} = 2{,}7\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}.$$

Damit ergibt sich eine Querablenkung

$$\Delta s_2 = v_\perp \delta t = \pm 49{,}6\,\mathrm{m/s}\,2{,}7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s} = \pm 134\,\mathrm{mm}.$$

Die Aufspaltung des Strahl beträgt damit

$$\Delta s = 2(|\Delta s_1| + |\Delta s_2|) = 2 \cdot (39{,}7 + 134)\,\mathrm{mm} = 174\,\mathrm{mm}.$$

8. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 21) (4 Punkte)

a) Für die Fermi-Energie bei $T = 0$ K gilt die folgende Formel: $E_\mathrm{F} = \frac{h^2}{8m_\mathrm{e}}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}$ Berechnen Sie für das Metall Lithium die Fermienergie unter der Annahme dass jedes Lithiumatom ein Elektron an das freie Elektronengas abgibt. Lithium hat eine Dichte von $\rho = 0{,}534\,\mathrm{g/cm^3}$ und eine Atommasse von 6,94 u.

b) Die Wärmekapazität des Elektronengases in einem metallischen Festkörper ergibt sich in der Sommerfeldtheorie zu: $C_\mathrm{V} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{\pi^2}{2}\frac{Nk_\mathrm{B}^2}{E_\mathrm{F}}T$. Klassisch ist die Wärmekapazität für N Teilchen in einem idealen Gas gleich $C_\mathrm{V} = \frac{3}{2}Nk_\mathrm{B}$. Welcher Anteil der Leitungselektronen von Lithium trägt zur Wärmekapazität bei $T = 300\,\mathrm{K}$ bei?

a) Mit der Dichte von Lithium

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{N \cdot 6{,}94\,u}{V}$$

ergibt sich die Elektronendichte

$$\frac{N}{V} = \frac{\rho}{6{,}96\,u} = \frac{0{,}534 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/cm^3}}{6{,}94 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} = 4{,}64 \cdot 10^{22}\,\mathrm{cm^{-3}} = 4{,}64 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}.$$

Die Fermi-Energie ist

$$E_\mathrm{F} = \frac{h^2}{8m_\mathrm{e}}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3} = \frac{(6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js})^2}{8 \cdot 9 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}\left(\frac{3 \cdot 4{,}64 \cdot 10^{28}}{\pi m^3}\right)^{2/3} = 7{,}64 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

b) Das Verhältnis $C_{V,\,\mathrm{Elektronengas}}/C_{V,\,\mathrm{idealesGas}}$ ist mit

$$C_{V,\,\mathrm{Elektronengas}} = \frac{\pi^2}{2}\frac{Nk_\mathrm{B}^2}{E_\mathrm{F}}T = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{E_\mathrm{F}}\right)Nk_\mathrm{B}$$

und

$$C_{V,\,\mathrm{idealesGas}} = \frac{3}{2}Nk_\mathrm{B}$$

$$\frac{C_{V,\,\mathrm{Elektronengas}}}{C_{V,\,\mathrm{idealesGas}}} = \frac{\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{E_\mathrm{F}}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{E_\mathrm{F}}\right).$$

Mit der Fermi-Energie von Lithium ergibt sich

$$\frac{C_{V,\,\mathrm{Elektronengas}}}{C_{V,\,\mathrm{idealesGas}}} = \frac{\pi^2}{3}\frac{1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}\,300\,\mathrm{K}}{7{,}64 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}} = 0{,}018.$$

Nur rund 1,8 % der Elektronen tragen bei Raumtemperatur zur Wärmekapazität bei.

1. Aufgabe (4 Punkte)

Auf einem Draht läuft eine transversale Welle mit der Wellenfunktion

$$z(x,t) = z_0 \cdot \sin\left\{(2\,\mathrm{m}^{-1})x - (100\,\mathrm{s}^{-1})t\right\}.$$

Die Auslenkung ist $z_0 = 1\,\mathrm{mm}$.

a) Bestimmen Sie die Richtung und Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.
b) Mit welcher Kraft ist der Draht gespannt, wenn er aus Mangan gefertigt ist ($\rho_{\mathrm{Mn}} = 7{,}4\,\mathrm{g/cm^3}$) und einen Durchmesser von $d = 1\,\mathrm{mm}$ hat?
c) Nach der Schnittstelle mit einem dickeren Mangandraht halbiert sich die Auslenkung der transmittierten Welle. Welchen Durchmesser hat der dickere Draht?
d) Welche Amplitude hat die reflektierte Welle?

2. Aufgabe (3 Punkte)

Eine Schallwelle mit der Frequenz $\nu = 100\,\mathrm{Hz}$ läuft senkrecht auf eine Wand zu und wird reflektiert. Der Schalldruck wird ebenfalls senkrecht zur Wand mit einem Mikrophon gemessen. Die Schallgeschwindigkeit betrage $c_\mathrm{S} = 340\,\mathrm{m/s}$.

a) Vor der Wand bildet sich eine stehende Welle aus. Welchen Abstand haben benachbarte Schalldruckmaxima?
b) Skizzieren sie den Schalldruck als Funktion des Abstands zur der Wand maßstabsgetreu.
c) Welchen Abstand haben die Schalldruckmaxima, wenn die Schallwelle unter einem Winkel von 45° auf die Wand trifft?

3. Aufgabe (4 Punkte)

Licht der Wellenlänge $\lambda = 400$ nm fällt senkrecht auf ein Gitter mit 4 Spalten vernachlässigbarer Breite, die jeweils einen Abstand von 0,1 mm zueinander haben. Das am Gitter gebeugte Licht wird im großen Abstand zum Gitter beobachtet.

a) Skizzieren Sie das Beugungsbild vom zentralen Hauptmaximum bis den Hauptbeugungsmaxima 1. Ordnung.
b) Unter welchen Winkeln relativ zum zentralen Hauptmaximum werden die Hauptbeugungsmaxima 1. Ordnung beobachtet?
c) Unter welchen Winkeln relativ zu den Hauptbeugungsmaxima 1. Ordnung werden die ersten Minima der Intensität beobachtet.
d) Um welchen Betrag muss die Wellenlänge erhöht bzw. erniedrigt werden, damit das 1. Beugungsmaximum auf eines der beiden Minima der 1. Ordnung bei $\lambda = 400$ nm fällt?

4. Aufgabe (4 Punkte)

π^+-Mesonen haben die Ruhemasse $m_{\pi^+} = 24{,}8 \cdot 10^{-29}$ kg und werden in einer Höhe von 10 km über der Erde erzeugt. Ihre Halbwertszeit ist $\tau_{1/2} = 1{,}8 \cdot 10^{-8}$ s.

a) Welche Energie müssen π^+-Mesonen mindestens haben, damit wenigstens die Hälfte der erzeugten Teilchen auf der Erdoberfläche beobachtet werden kann?
b) Welche Zeit t_E benötigen π^+-Mesonen für zurückgelegte Strecke im Bezugssystem der Erde?
c) Wie hängt diese Zeit mit der Halbwertszeit von π^+-Mesonen zusammen?

5. Aufgabe (4 Punkte)

Neutronen verlassen einen Forschungsreaktor mit einer thermischen Geschwindigkeitsverteilung, welche der Wassertemperatur des Moderators von $T = 100$ K entspricht. Im Maximum der Verteilung gilt $E_{\text{kin}} = k_B T$.

a) Wie groß ist der Impuls der Neutronen im Maximum der Verteilung?
b) Wie groß ist die de Broglie-Wellenlänge dieser Neutronen?
c) Durch Streuung an einem Graphitkristall soll ein Neutronenstrahl dieser Wellenlänge geformt werden. Wie groß ist der Winkel zwischen dem einfallenden und gestreuten Neutronenstrahl bei Streuung 1. Ordnung? Der Netzebenenabstand beträgt $d = 6{,}71$ Å.

6. Aufgabe (5 Punkte)

a) Auf welche fundamentalen Prozesse führte Albert Einstein die Plancksche Strahlungsformel zurück?
b) Skizzieren Sie das Spektrum eines idealen thermischen Strahlers als Funktion der Wellenlänge.
c) Schreiben Sie das Stefan-Boltzmann-Gesetz auf und benennen Sie die darin auftretenden Größen.
d) Eine Kugel wird von der Sonne angestrahlt ($150\ \text{W/m}^2$) und absorbiert die gesamte ankommende Leistung. Auf welche Temperatur erwärmt sich die Kugel, wenn die Umgebungstemperatur 275 K beträgt?
e) Bei welcher Wellenlänge ist die Infrarotstrahlung der Kugel dann maximal?

7. Aufgabe (4 Punkte)

a) Wie lautet die Schrödinger-Gleichung für ein Elektron im Potential eines Protons?
b) Der übliche Lösungsansatz ist $\psi_{n,\ell,m}(r,\theta,\varphi) = R_{n,\ell}(r)Y_{\ell,\text{m}}(\theta,\varphi)$. Wie heißen die Quantenzahlen n, ℓ und m und welche Werte können sie annehmen?
c) Welche Bedeutung haben die Quantenzahlen ℓ und m?
d) Skizzieren Sie die Funktionen $R_{n,\ell}(r)$ für $n = 2$ und begründen Sie jeweils den Funktionsverlauf.

8. Aufgabe (4 Punkte)

a) Was besagt das Pauli-Prinzip?
b) Berechnen Sie die Dichte der Leitungselektronen von Kupfer.
Hinweis: Die Dichte von Kupfer ist $\rho_{\text{Cu}} = 8{,}96\,\text{g/cm}^3$, die Massenzahl ist $A = 63{,}55$ und es gibt ein Leitungselektron je Kupfer-Atom.
c) Berechnen Sie die Fermi-Wellenzahl von Kupfer.
d) Berechnen Sie die Fermi-Energie von Kupfer.

Bitte verwenden Sie für die Konstanten die folgenden Werte:

Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^8$ m/s
Boltzmann Konstante:	$k_B = 8{,}6 \cdot 10^{-5}$ eV/K
Plancksche Konstante:	$h = 4{,}14 \cdot 10^{-15}$ eVs $= 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Ws^2
Ruhemasse des Neutrons:	$m_n = 939\,\text{MeV}/c^2 = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ kg

Stefan-Boltzmann Konstante:	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$
Wiensche Konstante:	$b = 2{,}9\,\mathrm{mm} \cdot \mathrm{K}$
Atomare Masseneinheit:	$u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Elementarladung:	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}$
Ruhemasse des Elektrons:	$m_\mathrm{e} = 500\,\mathrm{keV}/c^2 = 9 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

1. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 5) (4 Punkte)

Auf einem Draht läuft eine transversale Welle mit der Wellenfunktion

$$z(x,t) = z_0 \cdot \sin\left\{(2\,\mathrm{m}^{-1})x - (100\,\mathrm{s}^{-1})t\right\}.$$

Die Auslenkung ist $z_0 = 1\,\mathrm{mm}$.

a) Bestimmen Sie die Richtung und Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.
b) Mit welcher Kraft ist der Draht gespannt, wenn er aus Mangan gefertigt ist ($\rho_{\mathrm{Mn}} = 7{,}4\,\mathrm{g/cm^3}$) und einen Durchmesser von $d = 1\,\mathrm{mm}$ hat?
c) Nach der Schnittstelle mit einem dickeren Mangandraht halbiert sich die Auslenkung der transmittierten Welle. Welchen Durchmesser hat der dickere Draht?
d) Welche Amplitude hat die reflektierte Welle?

a) Der Punkt mit dem Argument

$$(2\,\mathrm{m}^{-1})x - (100\,\mathrm{s}^{-1})t = 0$$

befindet sich zur Zeit $t = 0$ am Ort $x = 0$ und bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{x}{t} = \frac{100\,\mathrm{s}^{-1}}{2\,\mathrm{m}^{-1}} = 50\,\mathrm{m/s}$$

zu positiven x-Werten.

b) Mit der Querschnittsfläche $A = \pi d^2/4$ ergibt sich für den Draht die Massenbelegung

$$\mu = \frac{m}{\ell} = \rho_{\mathrm{Mn}} A = 7{,}4 \cdot 10^{-3}\,(\mathrm{kg}/10^{-6}\,\mathrm{m}^3)\frac{\pi(10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{4} = 5{,}8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/m}$$

und mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{F/\mu}$ die Kraft

$$F = v^2\mu = (50\,\mathrm{ms}^{-1})^2\,5{,}8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/m} = 14{,}5\,\mathrm{N}.$$

c) Der Transmissionskoeffizient ist

$$T = \frac{1}{2} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

und damit

$$k_2 = 3k_1.$$

Dabei bezeichnet k_1 die Wellenzahl auf dem ersten Draht und k_2 die Wellenzahl auf dem dickeren Draht. Mit $k = \omega/v$ ergibt sich für die Geschwindigkeit auf dem dickeren Draht

$$v_2 = \frac{v}{3} = \frac{50}{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Die Massenbelegung ist

$$\mu_2 = \frac{F}{v_2^2} = 9\frac{F}{v^2} = 9\mu = \rho_{\mathrm{Mn}}\frac{\pi d_2^2}{4} = 9\rho_{\mathrm{Mn}}\frac{\pi d^2}{4}$$

und

$$d_2 = 3d = 3\,\mathrm{mm}.$$

d) Aus der Randbedingung bei $z = 0$

$$z(x = 0, t) + z_\mathrm{r}(0, t) = z_\mathrm{t}(0, t)$$

folgt

$$z_0 + z_{\mathrm{r}0} = z_{\mathrm{t}0}$$

und mit $z_{\mathrm{t}0} = \frac{1}{2} z_0$

$$z_{\mathrm{r}0} = -\frac{1}{2} z_0$$

Alternativ kann auch der Reflexionskoeffizient für die Amplitude berechnet werden

$$R = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{k_1 - 3k_1}{k_1 + 3k_1} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

2. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 5 und 6) (3 Punkte)

Eine Schallwelle mit der Frequenz $\nu = 100\,\mathrm{Hz}$ läuft senkrecht auf eine Wand zu und wird reflektiert. Der Schalldruck wird ebenfalls senkrecht zur Wand mit einem Mikrophon gemessen. Die Schallgeschwindigkeit betrage $c_\mathrm{S} = 340\,\mathrm{m/s}$.

a) Vor der Wand bildet sich eine stehende Welle aus. Welchen Abstand haben benachbarte Schalldruckmaxima?

b) Skizzieren sie den Schalldruck als Funktion des Abstands zur der Wand maßstabsgetreu.

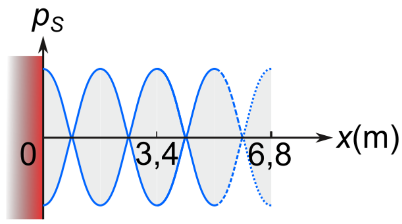
c) Welchen Abstand haben die Schalldruckmaxima, wenn die Schallwelle unter einem Winkel von 45° auf die Wand trifft?

a) Die Wellenlänge beträgt

$$\lambda = \frac{c_\mathrm{S}}{\nu} = \frac{340\,\mathrm{ms}^{-1}}{100\,\mathrm{s}^{-1}} = 3{,}4\,\mathrm{m}$$

und der Abstand der Schalldruckmaxima ist $\Delta x_0 = \lambda/2 = 1{,}7\,\mathrm{m}$.

b) Schalldruck p_S vor der Wand



c) Wird der Einfallswinkel θ zur Oberflächennormalen der Wand gemessen, die in Richtung der x Achse zeigt, dann ergibt die Überlagerung der einfallenden und reflektierten Welle in der xy-Ebene:

$$p_\mathrm{S} = p_{\mathrm{S}0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x + k_y y - \omega t)} + p_{\mathrm{S}0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-k_x x + k_y y - \omega t)}$$
$$p_\mathrm{S} = 2p_{\mathrm{S}0}\cos(k_x x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_y y - \omega t)}$$

Dabei ist $\vec{k} = (k_x, k_y) = k(\cos\theta, \sin\theta)$. Für den Abstand benachbarter Maxima gilt

$$\Delta x k_x = \pi$$

und $\Delta x = \frac{\lambda}{2\cos\theta}$. Für 45° ergibt sich

$$\Delta x(45°) = \frac{3{,}4\,\mathrm{m}}{\sqrt{2}} = 2{,}4\,\mathrm{m}.$$

3. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 6 (4 Punkte)

Licht der Wellenlänge $\lambda = 400$ nm fällt senkrecht auf ein Gitter mit 4 Spalten vernachlässigbarer Breite, die jeweils einen Abstand von 0,1 mm zueinander haben. Das am Gitter gebeugte Licht wird im großen Abstand zum Gitter beobachtet.

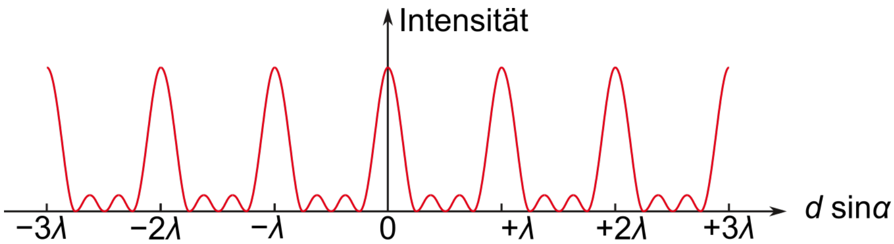
a) Skizzieren Sie das Beugungsbild vom zentralen Hauptmaximum bis den Hauptbeugungsmaxima 1. Ordnung.

b) Unter welchen Winkeln relativ zum zentralen Hauptmaximum werden die Hauptbeugungsmaxima 1. Ordnung beobachtet?

c) Unter welchen Winkeln relativ zu den Hauptbeugungsmaxima 1. Ordnung werden die ersten Minima der Intensität beobachtet.

d) Um welchen Betrag muss die Wellenlänge erhöht bzw. erniedrigt werden, damit das 1. Beugungsmaximum auf eines der beiden Minima der 1. Ordnung bei $\lambda = 400$ nm fällt?

a) Beugungsbild als Funktion des Ablenkwinkel α.



b) Die Beugungsmaxima treten links und rechts des zentralen Hauptmaximums auf. Für die ersten Hauptmaxima gilt

$$m\lambda = d \sin \alpha_1$$

mit $m = \pm 1$. Also

$$\pm\frac{\lambda}{d} = \sin \alpha_1 = \pm\frac{4 \cdot 10^{-7}}{10^{-4}} = \pm 4 \cdot 10^{-3} \approx \alpha_1$$

c) Für die 1. Minima neben dem 1. Hauptmaxima gilt

$$\frac{m'}{4}\lambda = d \sin \alpha_{m'} \approx d\, \alpha_{m'}$$

mit $m' = \pm 3$ und $m' = \pm 5$. Für das 1. Hauptmaxima mit $m = 1$ ergibt sich

$$\alpha_{m'} = \alpha_1 \frac{m'}{4} = \alpha_1 \pm \frac{\alpha_1}{4},$$

d.h.

$$\delta\alpha_1 = \pm\frac{\alpha_1}{4} = \pm 10^{-3}.$$

d) Für die geänderte Wellenlänge λ' gilt für die 1. Hauptmaxima

$$\frac{\lambda'}{d} = \alpha_1(1 \pm \frac{1}{4})$$

und mit $d\,\alpha_1 = \lambda$

$$\lambda' = \lambda(1 \pm \frac{1}{4}).$$

Es ergibt sich also $\lambda'_+ = 500\,\text{nm}$ und $\lambda'_- = 300\,\text{nm}$.

4. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 9) (4 Punkte)

π^+-Mesonen haben die Ruhemasse $m_{\pi^+} = 24{,}8 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{kg}$ und werden in einer Höhe von 10 km über der Erde erzeugt. Ihre Halbwertszeit ist $\tau_{1/2} = 1{,}8 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$.

a) Welche Energie müssen π^+-Mesonen mindestens haben, damit wenigstens die Hälfte der erzeugten Teilchen auf der Erdoberfläche beobachtet werden kann?

b) Welche Zeit t_E benötigen π^+-Mesonen für zurückgelegte Strecke im Bezugssystem der Erde?

c) Wie hängt diese Zeit mit der Halbwertszeit von π^+-Mesonen zusammen?

a) Ohne Relativität müsste die Geschwindigkeit der π^+-Mesonen mindestens

$$v = \frac{10 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}{1{,}8 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}} = 5{,}56 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m/s} >> c$$

betragen, d.h. ohne Relativität kommt die Hälfte der π^+-Mesonen am Erdboden nicht an. Für die Flugzeit muss deshalb gelten

$$t = \frac{\ell(v)}{v} < \tau_{1/2}$$

also

$$t = \frac{\ell_0\sqrt{1-(v/c)^2}}{v} < \tau_{1/2}.$$

und

$$1-(v/c)^2 < \left(\frac{v\tau_{1/2}}{\ell_0}\right)^2 = (\mathrm{v/c})^2\left(\frac{c\tau_{1/2}}{\ell_0}\right)^2$$

also

$$\left(\frac{v}{c}\right) > \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{c\tau_{1/2}}{\ell_0}\right)^2}}.$$

Für die Energie gilt

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} > \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{1}{1+\left(\frac{c\tau_{1/2}}{\ell_0}\right)^2}}} = \frac{m_0c^2}{\frac{c\tau_{1/2}}{\ell_0}}\sqrt{1+\left(\frac{c\tau_{1/2}}{\ell_0}\right)^2}.$$

mit

$$\frac{c\tau_{1/2}}{\ell_0} = \frac{3 \cdot 10^8\,\mathrm{ms^{-1}}\,1{,}8 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}}{10^4\,\mathrm{m}} = 5{,}4 \cdot 10^{-4}$$

ergibt sich

$$E > \frac{m_0c^2}{5{,}4 \cdot 10^{-4}} = 1852 \cdot m_0c^2 = \frac{24{,}8 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{kg}\,3^2 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m^2s^{-2}}}{5{,}4 \cdot 10^{-4}} = 41{,}3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{J}$$

b) Die Flugzeit beträgt im Bezugssystem der Erde mit $v \approx c$

$$t_\mathrm{E} = \frac{10\,\mathrm{km}}{c} = \frac{10^4\,\mathrm{m}}{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}} = 33{,}3\,\mu\mathrm{s}..$$

c) Die Flugzeit hängt mit der Lebensdauer über den Effekt der Zeitdilatation zusammen, d.h.

$$t_E \leq \tau_{1/2}(v) = \tau_{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Dabei bezeichnet $\tau_{1/2}(v)$ die Halbwertszeit der π^+-Mesonen, welche sich mit der Geschwindigkeit v bewegen.

5. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 12) (4 Punkte)

Neutronen verlassen einen Forschungsreaktor mit einer thermischen Geschwindigkeitsverteilung, welche der Wassertemperatur des Moderators von $T = 100$ K entspricht. Im Maximum der Verteilung gilt $E_{\mathrm{kin}} = k_{\mathrm{B}} T$.

a) Wie groß ist der Impuls der Neutronen im Maximum der Verteilung?
b) Wie groß ist die de Broglie-Wellenlänge dieser Neutronen?
c) Durch Streuung an einem Graphitkristall soll ein Neutronenstrahl dieser Wellenlänge geformt werden. Wie groß ist der Winkel zwischen dem einfallenden und gestreuten Neutronenstrahl bei Streuung 1. Ordnung? Der Netzebenenabstand beträgt $d = 6{,}71$ Å.

a)

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{P^2}{2m_{\mathrm{n}}} \rightarrow P = \sqrt{2m_{\mathrm{n}} E_{\mathrm{kin}}} = \sqrt{2m_{\mathrm{n}} k_{\mathrm{B}} T}$$

$$P = \sqrt{2 \cdot 1{,}675 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\; 1{,}38 \cdot 10^{-23} (\mathrm{Ws/K})\; 100\mathrm{K}} = 2{,}15 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{kgm/s}$$

b)

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Ws}^2}{2{,}15 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{kgms}^{-1}} = 3{,}08 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

c) Mit der Bragg-Bedingung $\mathrm{n}\lambda = 2d \sin(\theta_{\mathrm{n}})$ (θ_{n} bezeichnet den Glanzwinkel zur Netzebene und $\mathrm{n} = 1, 2, ...$ die Ordnung) ergibt sich

$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{2d} = \frac{3{,}08 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}}{2 \cdot 6{,}71 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}} = 0{,}23$$

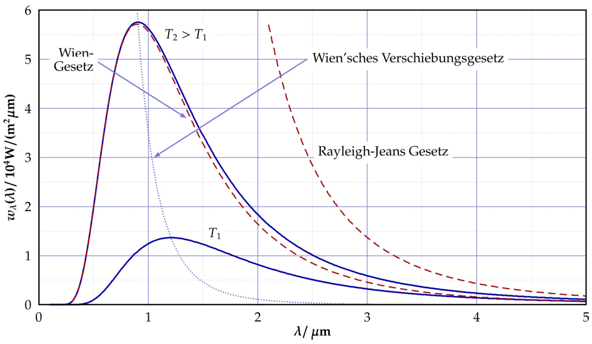
also $\theta_1 = 13{,}3°$. Der Winkel zwischen dem einfallenden und gestreuten Strahl ist $2\theta_1 = 26{,}6°$.

6. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 11 und 12) (5 Punkte)

a) Auf welche fundamentalen Prozesse führte Albert Einstein die Plancksche Strahlungsformel zurück?
b) Skizzieren Sie das Spektrum eines idealen thermischen Strahlers als Funktion der Wellenlänge.
c) Schreiben Sie das Stefan-Boltzmann-Gesetz auf und benennen Sie die darin auftretenden Größen.
d) Eine Kugel wird von der Sonne angestrahlt (150 W/m^2) und absorbiert die gesamte ankommende Leistung. Auf welche Temperatur erwärmt sich die Kugel, wenn die Umgebungstemperatur 275 K beträgt?
e) Bei welcher Wellenlänge ist die Infrarotstrahlung der Kugel dann maximal?

a) Einstein führt die Plancksche Strahlungsformel auf die Absorption, die stimulierte und die spontane Emission von Photonen zurück.

b) Das Spektrum eines idealen thermischen Strahlers als Funktion der Wellenlänge



c) Das Stefan-Boltzmann-Gesetz gibt die gesamte Strahlungsleistung eines Körpers bei der Temperatur T

$$P = \varepsilon \cdot A \cdot \sigma \cdot T^4.$$

ε ist ein Oberflächenkoeffizient und beschreibt welcher Bruchteil der Strahlung den Körper verlassen kann. A ist die Oberfläche und σ die Stefan-Boltzmann Konstante.

d) Im Gleichgewicht gilt $P_{\mathrm{Absorption}} = P_{\mathrm{Emission}}$. Für die Absorption des Sonnenlichts ist muss die Querschnittsfläche der Kugel beachtet werden $A_{\mathrm{Q}} = \pi \cdot r^2$. Für die Absorption und Emission der thermischen Strahlung muß die gesamte Kugeloberfläche $A = 4\pi \cdot r^2$. Damit ergibt sich

$$A_{\mathrm{Q}} \cdot 150\mathrm{W/m^2} = \mathrm{A} \cdot \sigma \cdot \left(\mathrm{T}^4 - (275\mathrm{K})^4\right)$$

$$T^4 = (275\,\mathrm{K})^4 + 150\,\mathrm{W/m^2}\frac{1}{4\sigma} = 8,1 \cdot 10^9\,\mathrm{K}^4 + 6,6 \cdot 10^8\,\mathrm{K}^4$$

$$\rightarrow T = 283\,\mathrm{K}$$

e) Mit dem Wienschen Verschiebungsgesetz gilt

$$\lambda_{\mathrm{max}} = \frac{b}{T} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}}{283\,\mathrm{K}} = 10\,\mu\mathrm{m}$$

7. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 17) (4 Punkte)

a) Wie lautet die Schrödinger-Gleichung für ein Elektron im Potential eines Protons?
b) Der übliche Lösungsansatz ist $\psi_{n,\ell,m}(r,\theta,\varphi) = R_{n,\ell}(r) Y_{\ell,\mathrm{m}}(\theta,\varphi)$. Wie heißen die Quantenzahlen n, ℓ und m und welche Werte können sie annehmen?
c) Welche Bedeutung haben die Quantenzahlen ℓ und m?
d) Skizzieren Sie die Funktionen $R_{n,\ell}(r)$ für $n = 2$ und begründen Sie jeweils den Funktionsverlauf.

a) Die Schrödinger-Gleichung ist

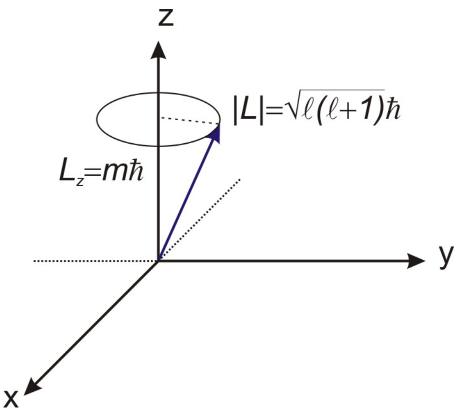
$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m_\mathrm{e}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}\right)\psi$$

(m_e bezeichnet die (reduzierte) Elektronenmasse).

b) n ist die Hauptquantenzahl, ℓ die Drehimpulsquantenzahl und m die magnetische Quantenzahl. Alle Quantenzahlen haben ganzzahlige Werte mit

$$n = 1, 2, ...$$
$$0 \le \ell < n$$
$$-\ell \le m \le \ell.$$

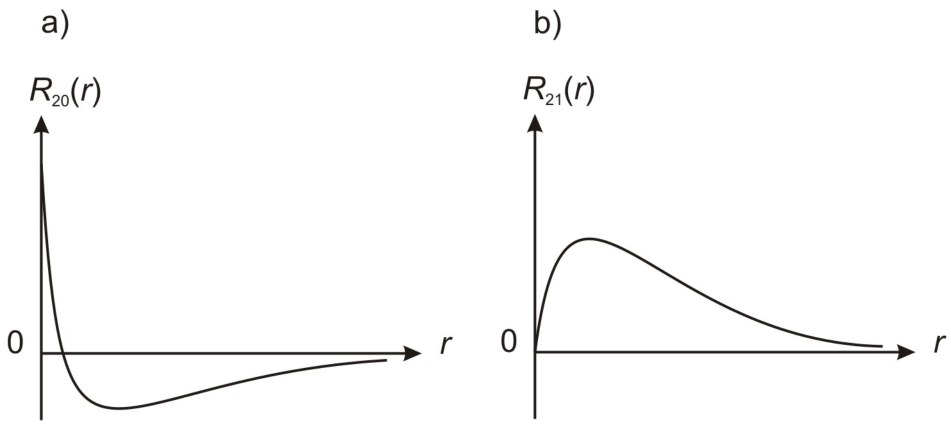
c) ℓ gibt die Länge des Drehimpulsvektors und m die Größe der Projektion des Drehimpulsvektors auf die z-Achse an



d) Für n=2 sind die Drehimpulsquantenzahlen $\ell = 0, 1$.

Für $\ell = 0$ hat man ein s-Orbital, in dem die Wellenfunktion unabhängig von der Raumrichtung ist. Für ein s-Orbital gibt es kein Zentrifugalpotential, d.h. es gilt für die Wellenfunktion $\psi(r = 0) \neq 0$. Im ersten angeregten Zustand hat die Wellenfunktion im Coulomb-Potential einen Knoten, der zum Nulldurchgang der radialen Wellenfunktion führt (vgl. die folgende Abbildung a)).

Für $\ell = 1$ hat man ein p-Orbital, das einen Nulldurchgang aufweist. Aufgrund des Zentrifugalpotential gilt $\psi(r=0)=0$ und es gibt keine weitere Nullstelle (vgl. die folgende Abbildung b)).



8. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 20 und 21) (4 Punkte)

a) Was besagt das Pauli-Prinzip?
b) Berechnen Sie die Dichte der Leitungselektronen von Kupfer.
Hinweis: Die Dichte von Kupfer ist $\rho_{\mathrm{Cu}} = 8{,}96\,\mathrm{g/cm^3}$, die Massenzahl ist $A = 63{,}55$ und es gibt ein Leitungselektron je Kupfer-Atom.
c) Berechnen Sie die Fermi-Wellenzahl von Kupfer.
d) Berechnen Sie die Fermi-Energie von Kupfer.

a) Pauli-Prinzip besagt, dass jeder Quantenzustand nur von einem Fermion (z.B. Elektron) besetzt werden kann. Bemerkung: Ein Quantenzustand, der z.B. durch eine ebene Welle beschrieben wird, kann mit zwei Elektronen besetzt werden, da sie sich in der Spin-Quantenzahl $\mathrm{m_s} = \pm 1/2$ unterscheiden.

b) Gibt es N Kupfer-Atome, dann ist die Dichte von Kupfer

$$\rho_{\mathrm{Cu}} = \frac{m}{V} = \frac{N \cdot 63{,}55u}{V}$$

und die Dichte der Leitungselektronen

$$\frac{N}{V} = \frac{\rho_{\mathrm{Cu}}}{63{,}55u} = \frac{8{,}96 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/cm^3}}{63{,}55 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} = 8{,}5 \cdot 10^{22}\,\mathrm{cm^{-3}} = 8{,}5 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}.$$

c) Die Fermi-Wellenzahl ergibt sich, wenn das Volumen der Fermi-Kugel durch das Volumen eines k-Zustands geteilt wird

$$N = 2\frac{\frac{4\pi k_{\mathrm{F}}^3}{3}}{\frac{(2\pi)^3}{\mathrm{V}}} \rightarrow k_{\mathrm{F}} = \left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{1/3} = \left(3\pi^2 8{,}5 \cdot 10^{28}\,1/\mathrm{m^3}\right)^{1/3} = 13{,}6 \cdot 10^9\,\mathrm{m^{-1}}.$$

d) Die Fermi-Energie ist

$$E_{\mathrm{F}} = \frac{\hbar^2 k_{\mathrm{F}}^2}{2m_{\mathrm{e}}} = \frac{h^2 k_{\mathrm{F}}^2}{8\pi^2 m_{\mathrm{e}}} = \frac{(4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs})^2 (13{,}6 \cdot 10^9\,\mathrm{m^{-1}})^2 (3 \cdot 10^8)^2\,\mathrm{m^2 s^{-2}}}{8\pi^2 \cdot 500 \cdot 10^3\,\mathrm{eV}}$$
$$= 7{,}2\,\mathrm{eV} = 11{,}5 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{Ws}.$$

1. Aufgabe (4 Punkte)

Auf einem Draht läuft eine transversale Welle mit der Wellenfunktion

$$z(x,t) = z_0 \cdot \exp\left[-\left\{(2\,\mathrm{m}^{-1})x - (300\,\mathrm{s}^{-1})t\right\}^2\right].$$

Die Auslenkung ist $z_0 = 1\,\mathrm{mm}$.

a) Bestimmen Sie die Richtung und Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.
b) Mit welcher Kraft ist der Draht gespannt, wenn er aus Titan gefertigt ist ($\rho_{\mathrm{Ti}} = 4{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$) und einen Durchmesser von $d = 1\,\mathrm{mm}$ hat?
c) Nach der Schnittstelle mit einem dickeren Titandraht halbiert sich die Auslenkung der transmittierten Welle. Welche Auslenkung hat die reflektierte Welle?
d) Welche Geschwindigkeit hat die Welle auf dem dickeren Draht?

2. Aufgabe (4 Punkte)

In einem geschlossenen Rohr der Länge $L = 1{,}0\,\mathrm{m}$ werden Schallwellen angeregt und es bilden sich stehende Wellen aus.

a) Zeichnen Sie für den Schalldruck maßstabsgetreu die Wellenbäuche und Knoten für die Grundschwingung und die erste Oberschwingung.
b) Welche Frequenzen haben die Grundschwingung und die erste Oberschwingung, wenn die Schallgeschwindigkeit bei $T = 300\,\mathrm{K}$ $c_{\mathrm{S}} = 340$ m/s beträgt.
c) Wie hängt die Schallgeschwindigkeit vom statischen Gasdruck ab?
Hinweis: Verwenden Sie das ideale Gasgesetz $pV = Nk_{\mathrm{B}}T$.
d) Welche Frequenz hat die Grundschwingung, wenn die Temperatur $T = 100\,\mathrm{K}$ beträgt?

3. Aufgabe (4 Punkte)

Paralleles Licht der Wellenlänge $\lambda = 600$ nm fällt senkrecht auf einen Einzelspalt der Breite $b = 4\,\mu$m. Im Abstand $\ell = 1$ m hinter dem Spalt steht ein Schirm.

a) Für welche Winkel α wird das 1. und 2. Intensitätsminimum beobachtet?
b) Wie groß ist der Abstand zwischen den beiden Minima 1. Ordnung am Schirm?
c) Für welche Winkel α wird das 1., 2. und 3. Hauptmaximum bei einem Beugungsgitter mit 5000 Spalten, einem Spaltabstand von $d = 8\,\mu$m (Spaltmitte zu Spaltmitte) und der gleichen Spaltbreite $b = d/2 = 4\,\mu$m beobachtet?
d) Skizzieren Sie die Intensitätsverteilung am Schirm.
e) Wie groß ist der Abstand zwischen den beiden Minima 1. Ordnung bei diesem Beugungsgitter am Schirm?

4. Aufgabe (4 Punkte)

K^+-Mesonen werden in einer Höhe von 10 km über der Erde erzeugt. Sie haben eine Halbwertszeit von $\tau_{1/2} = 8{,}6 \cdot 10^{-9}$ s.

a) Welche Geschwindigkeit müssen K^+-Mesonen mindestens haben, damit wenigstens die Hälfte der erzeugten Teilchen auf der Erdoberfläche beobachtet werden kann?
b) Welche Zeit t_{E} benötigen K^+-Mesonen für diese Strecke im Bezugssystem der Erde?

c) Wie hängt diese Zeit mit der Halbwertszeit von K^+-Mesonen zusammen?

5. Aufgabe (4 Punkte)

Die Geschwindigkeitsverteilung von Neutronen in einem Reaktor sei im thermischen Gleichgewicht und entspreche einer Temperatur von $T = 18$ K.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_{max} der Neutronen im Maximum der Geschwindigkeitsverteilung gemäß $E_{\mathrm{max}} = k_{\mathrm{B}}T$.
b) Berechnen Sie die de Broglie Wellenlänge der Neutronen mit der Geschwindigkeit v_{max}.
c) Diese Neutronen treffen auf ein Kristallgitter mit einer Gitterkonstante von $d = 1{,}0 \cdot 10^{-8}$ m. Berechnen Sie den Winkel bezüglich der Strahlrichtung, unter dem das Beugungsmaximum 1. Ordnung beobachtet werden kann.
d) Welche Länge hat für das Beugungsmaximum 1. Ordnung der reziproke Gittervektor?

6. Aufgabe (4 Punkte)

Beim Zerfall $^{22}\mathrm{Na} \to {}^{22}\mathrm{Ne}$ wird ein Photon mit der Energie 1,28 MeV ausgestrahlt.

a) Welcher Wellenlänge entspricht die Energie der Photonen des ^{22}Na-Zerfalls?
b) Berechnen Sie die Energie von Photonen, die an ruhenden Elektronen gestreut werden.
c) Welche kleinste Energie der Photonen ergibt sich daraus, für die Streuung der Photonen aus dem ^{22}Na-Zerfall?
d) Welche größte Energie folgt dann für die Elektronen nach dem Stoß durch die Photonen aus dem ^{22}Na-Zerfall?

7. Aufgabe (4 Punkte)

a) Berechnen Sie für das Wasserstoffatom die Energie des Grundzustands, sowie die Energie des ersten und zweiten angeregten Zustands. Ignorieren Sie dazu den Einfluss des Elektronenspins.
b) Skizzieren Sie das Energieniveauschema dieser Zustände und bezeichnen Sie die einzelnen Energieniveaus.
c) Berücksichtigen Sie nun den Elektronenspin und skizzieren Sie das Energieniveauschema der angeregten Zustände mit $n = 2$.
d) Begründen Sie die Skizze aus Teilaufgabe c).

8. Aufgabe (4 Punkte)

a) Was besagt das Pauli-Prinzip?
b) Berechnen Sie die Dichte der Leitungselektronen von Kalium.
Hinweis: Die Dichte von Kalium ist $\rho_{\mathrm{K}} = 0{,}86\,\mathrm{g/cm^3}$, die Massenzahl ist $A = 39$ und es gibt ein Leitungselektron je Kalium-Atom.
c) Berechnen Sie die Fermi-Wellenzahl von Kalium.
d) Berechnen Sie die Fermi-Energie von Kalium.

Bitte verwenden Sie für die Konstanten die folgenden Werte:

Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}$
Elementarladung:	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}$
Boltzmann Konstante:	$k_\mathrm{B} = 8{,}6 \cdot 10^{-5}\mathrm{eV/K}$
Plancksche Konstante:	$h = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}$
Ruhemasse des Elektrons:	$m_\mathrm{e} = 500\,\mathrm{keV}/c^2$
Ruhemasse des Neutrons:	$m_\mathrm{n} = 939\,\mathrm{MeV}/c^2$
Compton-Wellenlänge:	$\lambda_\mathrm{C} = 2{,}43 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}$
Rydberg-Energie:	$R = 13{,}6\,\mathrm{eV}$
Atomare Masseneinheit:	$u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

1. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 5) (4 Punkte)

Auf einem Draht läuft eine transversale Welle mit der Wellenfunktion

$$z(x,t) = z_0 \cdot \exp\left[-\left\{(2\,\mathrm{m}^{-1})x - (300\,\mathrm{s}^{-1})t\right\}^2\right].$$

Die Auslenkung ist $z_0 = 1\,\mathrm{mm}$.

a) Bestimmen Sie die Richtung und Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.
b) Mit welcher Kraft ist der Draht gespannt, wenn er aus Titan gefertigt ist ($\rho_{\mathrm{Ti}} = 4{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$) und einen Durchmesser von $d = 1\,\mathrm{mm}$ hat?
c) Nach der Schnittstelle mit einem dickeren Titandraht halbiert sich die Auslenkung der transmittierten Welle. Welche Auslenkung hat die reflektierte Welle?
d) Welche Geschwindigkeit hat die Welle auf dem dickeren Draht?

a) Der Punkt mit dem Argument

$$(2\,\mathrm{m}^{-1})x - (300\,\mathrm{s}^{-1})t = 0$$

befindet sich zur Zeit $t = 0$ am Ort $x = 0$ und bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{x}{t} = \frac{300\,\mathrm{s}^{-1}}{2\,\mathrm{m}^{-1}} = 150\,\mathrm{m/s}$$

zu positiven x-Werten.

b) Mit der Querschnittsfläche $A = \pi d^2/4$ ergibt sich für den Draht die Massenbelegung

$$\mu = \frac{m}{\ell} = \rho_{\mathrm{Ti}} A = 4{,}5 \cdot 10^{-3}\,(\mathrm{kg}/10^{-6}\,\mathrm{m}^3)\frac{\pi(10^{-3}\,\mathrm{m})^2}{4} = 3{,}53 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/m}$$

und mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{F/\mu}$ die Kraft

$$F = v^2\mu = (150\,\mathrm{ms}^{-1})^2\, 3{,}53 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/m} = 79{,}4\,\mathrm{N}.$$

c) Damit die Form der Welle stabil ist muss für alle Fourier-Komponenten von $z(x,t)$

$$v = \frac{\omega}{k}$$

gelten. An der Schnittstelle gilt für den Reflexions- und den Transmissionskoeffizienten R und T

$$1 + R = T$$

also

$$1 + \mathrm{R} = \frac{1}{2}$$

und $R = -1/2$. Die Auslenkung der reflektierten Welle halbiert sich ebenfalls und ändert zudem das Vorzeichen, d.h. $z_{0\mathrm{R}} = -0{,}5\,\mathrm{mm}$.

d) Der Transmissionskoeffizient ist

$$\mathrm{T} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}.$$

und mit $k = \omega/v$ ergibt sich

$$T = \frac{2\frac{\omega}{v_1}}{\frac{\omega}{v_1} + \frac{\omega}{v_2}} = \frac{2v_2}{v_2 + v_1}$$

also

$$\frac{1}{2} = \frac{2v_2}{v_2 + v_1}$$

und

$$v_1 = 3v_2$$

und

$$v_2 = 50\,\mathrm{m/s}.$$

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

2. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 5) (4 Punkte)

In einem geschlossenen Rohr der Länge $L = 1{,}0\,\mathrm{m}$ werden Schallwellen angeregt und es bilden sich stehende Wellen aus.

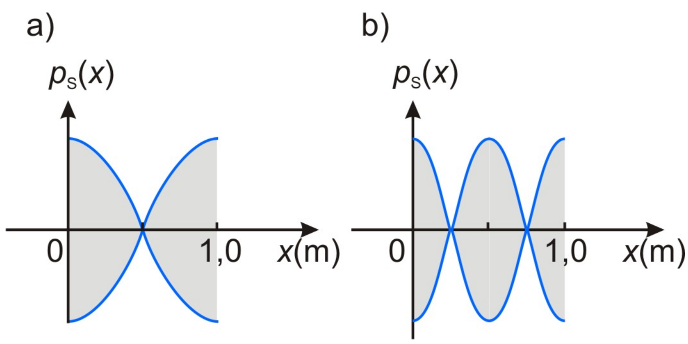
a) Zeichnen Sie für den Schalldruck maßstabsgetreu die Wellenbäuche und Knoten für die Grundschwingung und die erste Oberschwingung.

b) Welche Frequenzen haben die Grundschwingung und die erste Oberschwingung, wenn die Schallgeschwindigkeit bei $T = 300\,\mathrm{K}$ $c_\mathrm{S} = 340$ m/s beträgt.

c) Wie hängt die Schallgeschwindigkeit vom statischen Gasdruck ab?
Hinweis: Verwenden Sie das ideale Gasgesetz $pV = Nk_\mathrm{B}T$.

d) Welche Frequenz hat die Grundschwingung, wenn die Temperatur $T = 100\,\mathrm{K}$ beträgt?

a) Schalldruck im Rohr: a) Schalldruck für die Grundschwingung und b) für die erste Oberschwingung.



b) Für die Wellenlänge der stehenden Wellen gilt

$$\frac{\lambda}{2}\mathrm{n} = L.$$

Für die Grundschwingung $\mathrm{n} = 1$ ergibt sich $\lambda = 2L$ damit die Frequenz

$$\nu_0 = \frac{c_\mathrm{S}}{\lambda} = \frac{340\,\mathrm{ms}^{-1}}{2\,\mathrm{m}} = 170\,\mathrm{Hz}.$$

Für die erste Oberschwingung $\mathrm{n} = 2$ ergibt sich $\lambda = L$ und damit die Frequenz

$$\nu_1 = \frac{c_\mathrm{S}}{\lambda} = \frac{2 \cdot 340\,\mathrm{ms}^{-1}}{2\,\mathrm{m}} = 340\,\mathrm{Hz}.$$

c) Für den Schalldruck gilt

$$c_\mathrm{S} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}.$$

Dabei bezeichnet γ den Adiabatenexponenten und P_0 und ρ_0 den statischen Gasdruck bzw. die statische Dichte des Gases. Bezeichnet m die Masse der Gasteilchen, dann ist die Dichte

$$\rho_0 = \frac{N\,m}{V}$$

mit dem idealen Gasgesetz

$$\rho_0 = \frac{p_0 m}{k_B T}$$

und die Schallgeschwindigkeit

$$c_S = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

ist unabhängig von statischen Gasdruck.

d) Die Frequenz der Grundschwingung ist

$$\nu_0 = \frac{c_S(T)}{\lambda}$$

mit $c_S \propto \sqrt{T}$. Für die Frequenz bei 100 K ergibt sich damit

$$\nu_0(100\,\mathrm{K}) = \nu_0(300\,\mathrm{K})\sqrt{\frac{100}{300}} = 170\,\mathrm{Hz} \cdot \sqrt{1/3} = 98\,\mathrm{Hz}.$$

3. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 6 und 8) (4 Punkte)

Paralleles Licht der Wellenlänge $\lambda = 600$ nm fällt senkrecht auf einen Einzelspalt der Breite $b = 4\,\mu$m. Im Abstand $\ell = 1$ m hinter dem Spalt steht ein Schirm.

a) Für welche Winkel α wird das 1. und 2. Intensitätsminimum beobachtet?
b) Wie groß ist der Abstand zwischen den beiden Minima 1. Ordnung am Schirm?
c) Für welche Winkel α wird das 1., 2. und 3. Hauptmaximum bei einem Beugungsgitter mit 5000 Spalten, einem Spaltabstand von $d = 8\,\mu$m (Spaltmitte zu Spaltmitte) und der gleichen Spaltbreite $b = d/2 = 4\,\mu$m beobachtet?
d) Skizzieren Sie die Intensitätsverteilung am Schirm.
e) Wie groß ist der Abstand zwischen den beiden Minima 1. Ordnung bei diesem Beugungsgitter am Schirm?

a) Für die Minima am Spalt gilt

$$\sin\alpha_n = n\frac{\lambda}{b}$$

mit $n = \pm 1, \pm 2$ etc.. Damit hat man

$$|\sin\alpha_n| = |n|\frac{\lambda}{b} = |n|\frac{6 \cdot 10^{-7}\,\text{m}}{4 \cdot 10^{-6}\,\text{m}} = |n| 0{,}15$$

und

$$\alpha_1 = \pm 8{,}6° \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \pm 17{,}5°.$$

b) Der Abstand der Minima 1. Ordnung y_1 ergibt sich mit

$$\tan\alpha_1 = \frac{y_1}{2\ell} \rightarrow y_1 = 2\,\text{m} \cdot 0{,}15 = 0{,}3\,\text{m} = 30\,\text{cm}.$$

c) Für die Hauptmaxima beim Beugungsgitter gilt

$$\sin\alpha_n = n\frac{\lambda}{d}$$

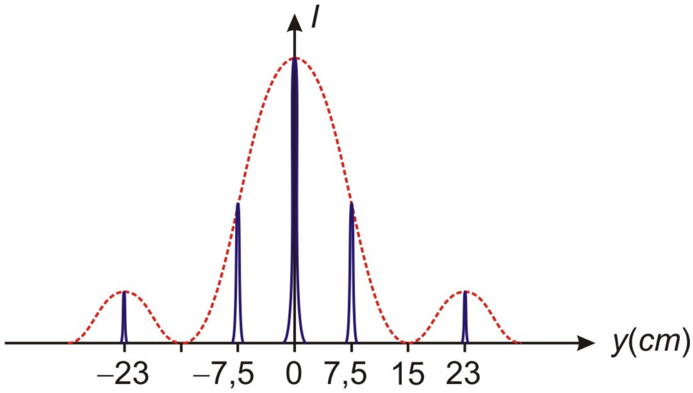
mit $n = 0, \pm 1, \pm 2$ etc.. Damit hat man

$$|\sin\alpha_n| = |n|\frac{\lambda}{d} = |n|\frac{6 \cdot 10^{-7}\,\text{m}}{8 \cdot 10^{-6}\,\text{m}} = |n| 0{,}075$$

und

$$\alpha_1 = \pm 4{,}3°, \quad \alpha_2 = \pm 8{,}6° \quad \text{und} \quad \alpha_3 = \pm 13°.$$

d) Durch die Beugung am Spalt werden die Hauptmaxima 2. Ordnung des Gitters ausgelöscht und die Nebenmaxima sind so klein und dicht, dass sie in der Skizze nicht gezeichnet werden können.



e) Die Minima beim Beugungsgitter ergeben sich für die Winkel

$$d \sin \alpha_{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{N}}\lambda.$$

N bezeichnet die Anzahl der Spalte und n darf kein Vielfaches von N sein. Mit

$$\sin \alpha_1 = \frac{6 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}}{5000 \cdot 8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}} = 1{,}5 \cdot 10^{-5} = \tan \alpha_1$$

ergibt sich für den Abstand zwischen den beiden Minima 1. Ordnung

$$\tan \alpha_1 = \frac{\mathrm{y}_1}{2\ell} \rightarrow y_1 = 2\,\mathrm{m} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-5} = 30\,\mu\mathrm{m}.$$

4. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 9) (4 Punkte)

K^+-Mesonen werden in einer Höhe von 10 km über der Erde erzeugt. Sie haben eine Halbwertszeit von $\tau_{1/2} = 8{,}6 \cdot 10^{-9}$ s.

a) Welche Geschwindigkeit müssen K^+-Mesonen mindestens haben, damit wenigstens die Hälfte der erzeugten Teilchen auf der Erdoberfläche beobachtet werden kann?

b) Welche Zeit t_E benötigen K^+-Mesonen für diese Strecke im Bezugssystem der Erde?

c) Wie hängt diese Zeit mit der Halbwertszeit von K^+-Mesonen zusammen?

a) Ohne Relativität müsste die Geschwindigkeit der K^+-Mesonen mindestens

$$v = \frac{10 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}{8{,}6 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}} = 1{,}16 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m/s} >> c$$

betragen, d.h. ohne Relativität geht es nicht. Für die Flugzeit muss deshalb gelten

$$t = \frac{\ell(v)}{v} < \tau_{1/2}$$

also

$$t = \frac{\ell_0\sqrt{1-(v/c)^2}}{v} < \tau_{1/2}.$$

und

$$1-(v/c)^2 < \left(\frac{v\tau_{1/2}}{\ell_0}\right)^2 = (\mathrm{v/c})^2\left(\frac{c\tau_{1/2}}{\ell_0}\right)^2$$

also

$$\left(\frac{v}{c}\right) > \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{c\tau_{1/2}}{\ell_0}\right)^2}}$$

bzw.

$$\mathrm{v} > \mathrm{c}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{3\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}\cdot 8{,}6\cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}}{10^4\,\mathrm{m}}\right)^2\right) = \mathrm{c}(1-3{,}125\cdot 10^{-8})$$

Bem.: Es wäre sinnvoller, statt nach der Geschwindigkeit nach der Mindestenergie der K^+-Mesonen zu fragen. Diese Komplikation wurde in der Aufgabenstellung vermieden: $E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} > m_0c^2/(c\tau_{1/2}/\ell_0) = 3{,}88 \cdot 10^3\, m_0c^2$.

b) Die Flugzeit beträgt im Bezugssystem der Erde

$$t_E = \frac{10\,\mathrm{km}}{c} = \frac{10^4\,\mathrm{m}}{3\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}} = 33{,}3\,\mu\mathrm{s}..$$

c) Die Flugzeit hängt mit der Lebensdauer über den Effekt der Zeitdilatation zusammen, d.h.

$$t_E \le \tau_{1/2}(v) = \tau_{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

5. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 12) (4 Punkte)

Die Geschwindigkeitsverteilung von Neutronen in einem Reaktor sei im thermischen Gleichgewicht und entspreche einer Temperatur von $T = 18$ K.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_{max} der Neutronen im Maximum der Geschwindigkeitsverteilung gemäß $E_{\text{max}} = k_B T$.
b) Berechnen Sie die de Broglie Wellenlänge der Neutronen mit der Geschwindigkeit v_{max}.
c) Diese Neutronen treffen auf ein Kristallgitter mit einer Gitterkonstante von $d = 1{,}0 \cdot 10^{-8}$ m. Berechnen Sie den Winkel bezüglich der Strahlrichtung, unter dem das Beugungsmaximum 1. Ordnung beobachtet werden kann.
d) Welche Länge hat für das Beugungsmaximum 1. Ordnung der reziproke Gittervektor?

a) Die kinetische Energie ist $E_{\text{kin}} = k_B T$.

$$\text{v}_{\text{max}} = c\sqrt{\frac{2k_B T}{m_n c^2}} = c\sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}6 \cdot 10^{-5}\,\text{eVK}^{-1} \cdot 18\,\text{K}}{939 \cdot 10^6\,\text{eV}}} = 1{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot c = 544\,\text{m/s}.$$

b) Die de Broglie Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{h}{p_n} = \frac{c^2 h}{m_n c^2\,\text{v}_{\text{max}}} = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{ms}^{-1} 4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\text{eVs}}{939 \cdot 10^6\,\text{eV}\, 1{,}8 \cdot 10^{-6}} = 7{,}35 \cdot 10^{-10}\,\text{m}.$$

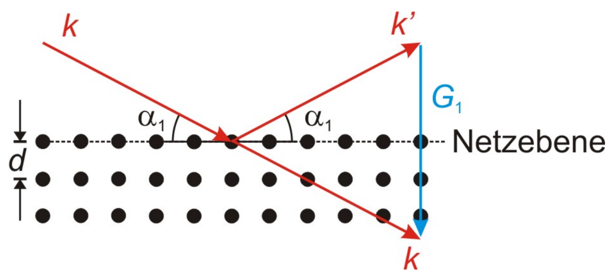
c) Das Braggsche Gesetz lautet: $\text{n}\lambda = 2d \sin \alpha_n$ und $\text{n} = 1, 2, \ldots$

$$\sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{2d} = \frac{7{,}35 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 10^{-8}\,\text{m}} = 0{,}037 = \alpha_1$$

Der Winkel bezüglich des einfallenden Neutronenstrahls ist dann $2\alpha_1 = 0{,}074$[1].

d) Die Länge ist (vgl. die Skizze und $k = k' = 2\pi/\lambda$)

$$G_1 = \frac{2\pi}{d} = \frac{2\pi}{10^{-8}\,\text{m}} = 6{,}3 \cdot 10^8\,\text{m}^{-1}$$



[1] Das Gitter wird von kristallisierten Biomolekülen (z.B. Viren) gebildet. Das Messverfahren wird SANS (Small-angle neutron scattering) genannt.

6. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 12) (4 Punkte)

Beim Zerfall $^{22}\mathrm{Na} \rightarrow {}^{22}\mathrm{Ne}$ wird ein Photon mit der Energie 1,28 MeV ausgestrahlt.

a) Welcher Wellenlänge entspricht die Energie der Photonen des ^{22}Na-Zerfalls?
b) Berechnen Sie die Energie von Photonen, die an ruhenden Elektronen gestreut werden.
c) Welche kleinste Energie der Photonen ergibt sich daraus, für die Streuung der Photonen aus dem ^{22}Na-Zerfall?
d) Welche größte Energie folgt dann für die Elektronen nach dem Stoß durch die Photonen aus dem ^{22}Na-Zerfall?

a) Die Wellenlänge für 1,28 MeV beträgt

$$E_\lambda = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{hc}{E_\lambda} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}\, 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{1{,}28 \cdot 10^6\,\mathrm{eV}} = 9{,}7 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{m}.$$

b) Die Wellenlänge wird durch die Streuung an ruhenden Elektronen gemäß der Formel

$$\lambda' - \lambda = \lambda_\mathrm{C}(1 - \cos\theta) \rightarrow \lambda' = \lambda + \lambda_\mathrm{C}(1 - \cos\theta)$$

verändert, so dass sich für die Energie des gestreuten Photons

$$E_{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda + \lambda_\mathrm{C}(1 - \cos\theta)} \rightarrow E_{\lambda'}^{-1} = E_\lambda^{-1} + \mathrm{E}_\mathrm{C}^{-1}(1 - \cos\theta)$$

ergibt. Dabei ist

$$E_\mathrm{C} = hc/\lambda_\mathrm{C} = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}\, 3 \cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1}/2{,}426 \cdot 10^{-12}\mathrm{m} = 5{,}1 \cdot 10^5\,\mathrm{eV}.$$

(das ist die Ruheenergie des Elektrons)

c) Die kleinste Energie der Photonen ergibt sich im Fall der Rückstreuung $\theta = 180°$. Mit

$$E_\mathrm{min}^{-1} = E_\lambda^{-1} + 2\mathrm{E}_\mathrm{C}^{-1}$$

ergibt sich für 1,28 MeV

$$E_\mathrm{min} = \frac{1}{E_\lambda^{-1} + 2\mathrm{E}_\mathrm{C}^{-1}} = \frac{\mathrm{MeV}}{1{,}28^{-1} + 2 \cdot 0{,}51^{-1}} = 0{,}21\,\mathrm{MeV}$$

d) Die höchste Energie der gestreuten Elektronen ist dann

$$E_\mathrm{max} = 1{,}28\,\mathrm{MeV} - 0{,}21\,\mathrm{MeV} = 1{,}07\,\mathrm{MeV}$$

7. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 13, 17 und 18) (4 Punkte)

a) Berechnen Sie für das Wasserstoffatom die Energie des Grundzustands, sowie die Energie des ersten und zweiten angeregten Zustands. Ignorieren Sie dazu den Einfluss des Elektronenspins.
b) Skizzieren Sie das Energieniveauschema dieser Zustände und bezeichnen Sie die einzelnen Energieniveaus.
c) Berücksichtigen Sie nun den Elektronenspin und skizzieren Sie das Energieniveauschema der angeregten Zustände mit $n = 2$.
d) Begründen Sie die Skizze aus Teilaufgabe c).

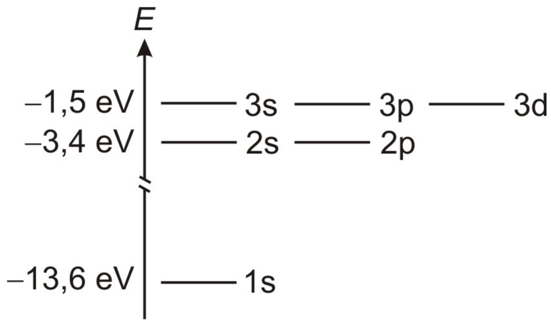
(vgl. Klausur im Frühjahr 2018 Moderne Physik für Ingenieure Aufgabe 5)

a) Mit der Rydberg-Energie und der Formel

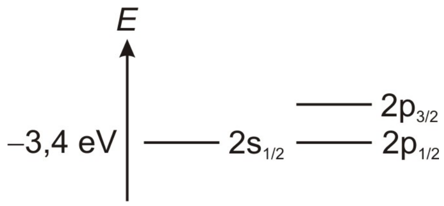
$$E_{\mathrm{n}} = -\frac{R}{\mathrm{n}^2}$$

berechnet man $E_1 = -13{,}6\,\mathrm{eV}$, $E_2 = -3{,}4\,\mathrm{eV}$ and $E_3 = -1{,}5\,\mathrm{eV}$.

b) Skizze des Energieniveauschema des H-Atoms für den Grundzustand und die ersten angeregten Zustände:



c) Das Energieniveauschema des ersten angeregten Zustands.



d) Das p-Orbital ist aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung in die Zustände zum Gesamtdrehimpuls $j = 1/2$ und $j = 3/2$ aufgespalten. Das magnetische Moment des Elektrons richtet sich im Magnetfeld aus, das durch die Bahnbewegung des Elektrons erzeugt wird. Der $2s_{1/2}$-Zustand hat keine Spin-Bahn-Kopplung und verschiebt sich nicht.Bemerkung: Weitere relativistische Einflüsse ergeben, dass sich für das $2s_{1/2}$-Niveau die gleiche Energie wie für das $2p_{1/2}$-Niveau ergibt. Genauere Messungen und Rechnungen zeigen, dass das $2s_{1/2}$-Niveau etwas schwächer als das $2p_{1/2}$-Niveau gebunden ist. Der Effekt wird Lamb-shift genannt.

8. Aufgabe (vgl. Vorlesung auf Seite 20 und 21) (4 Punkte)

a) Was besagt das Pauli-Prinzip?
b) Berechnen Sie die Dichte der Leitungselektronen von Kalium.
Hinweis: Die Dichte von Kalium ist $\rho_K = 0{,}86\,\mathrm{g/cm^3}$, die Massenzahl ist $A = 39$ und es gibt ein Leitungselektron je Kalium-Atom.
c) Berechnen Sie die Fermi-Wellenzahl von Kalium.
d) Berechnen Sie die Fermi-Energie von Kalium.

a) Pauli-Prinzip besagt, dass jeder Quantenzustand nur von einem Fermion (z.B. Elektron) besetzt werden kann.

Bemerkung: Ein Quantenzustand, der z.B. durch eine ebene Welle beschrieben wird, kann mit zwei Elektronen besetzt werden, da sie sich in der Spin-Quantenzahl $\mathrm{m_s} = \pm 1/2$ unterscheiden.

b) Mit der Anzahl N der Kalium-Atome ist die Dichte von Kalium

$$\rho_K = \frac{m}{V} = \frac{N \cdot 39u}{V}$$

und die Dichte der Leitungselektronen

$$\frac{N}{V} = \frac{\rho_K}{39u} = \frac{0{,}86 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/cm^3}}{39 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} = 1{,}33 \cdot 10^{22}\,\mathrm{cm^{-3}} = 1{,}33 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}.$$

c) Die Fermi-Wellenzahl ergibt sich mit

$$\frac{N}{2} = \frac{4\pi k_F^3 V}{3(2\pi)^3} \rightarrow k_F = \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3} = \left(3\pi^2 1{,}33 \cdot 10^{28}\,1/\mathrm{m^3}\right)^{1/3} = 7{,}3 \cdot 10^9\,\mathrm{m^{-1}}.$$

d) Die Fermi-Energie ist

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e} = \frac{h^2 k_F^2}{8\pi^2 m_e} = \frac{(4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs})^2 (7{,}3 \cdot 10^9\,\mathrm{m^{-1}})^2}{8\pi^2 \cdot 500 \cdot 10^3\,\mathrm{eV}} \frac{(3 \cdot 10^8)^2\,\mathrm{m^2 s^{-2}}}{}$$

$$= 2{,}1\,\mathrm{eV}.$$