Prof. Dr. Bernd Pilawa, Dr. Jan Nicolas Voss - voss@kit.edu

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: Wasserstoffatom: Wahrscheinlichkeitsdichten

Das Elektron eines Wasserstoffatoms befindet sich in dem Zustand ($n = 2$, $l = 1$, $m = +1$). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ... :

a) ... das Elektron innerhalb eines Winkels von $\pm 30°$ zur x-y-Ebene und bei beliebigem Radius gefunden wird.

b) ... sich das Elektron im Radius-Intervall von $2a_0 < r < 6a_0$ befindet.

c) ... sich das Elektron innerhalb eines Winkels von $\pm 30°$ zur x-y-Ebene und im Radius-Intervall von $2a_0 < r < 6a_0$ befindet.

Hinweis:

$$
\begin{aligned}
Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \, e^{i\phi} \quad \text{und} \\
R_{21} &= \frac{1}{(2a_0)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{r}{\sqrt{3}a_0} \cdot e^{-\frac{r}{2a_0}}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Aufgabe 2: Stern-Gerlach-Experiment mit Wasserstoffatomen

Für ein Stern-Gerlach Experiment werden Wasserstoffatome im Grundzustand präpariert. Diese bewegen sich x-Richtung mit einer Geschwindigkeit von $v_x = 14.5\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Dieser Atomstrahl durchläuft eine Region mit einem magnetischen Feldgradienten von $\frac{dB}{dz} = 600\,\mathrm{T\,m^{-1}}$, der in z-Richtung ausgerichtet ist. Die Kraft F_z, die in dem magnetischen Feldgradienten auf die Wasserstoffatome wirkt, ist durch die folgende Gleichung gegeben:

$$
F_z = \mu_z \cdot \frac{dB_z}{dz}, \tag{2}
$$

wobei μ_z die z-Komponente des magnetischen Moments der Atome ist.

a) Bestimmen Sie die maximale Beschleunigung der Wasserstoffatome.

b) Wie groß ist die maximale Distanz zwischen den linienförmigen Teilstrahlen in der Detektionsebene. Nehmen Sie an, dass das magnetische Feld auf eine Region von $\Delta x \approx 75\,\mathrm{cm}$ in Strahlrichtung begrenzt ist. Im Anschluss an die Region mit dem Magnetfeld durchläuft der Strahl eine Distanz von $1.25\,\mathrm{m}$ bis zur Detektionsebene.

c) Wie groß ist die maximale Distanz, wenn Silberatome mit einer Geschwindigkeit von $v_x = 250\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ im gleichen Experiment verwendet werden?

Aufgabe 3: Spin-Orbit-Kopplung

Spin-Orbit-Kopplung bedeutet, dass der orbitale Drehimpuls $\vec{L}$ des Elektrons und der Spin-Eigendrehimpuls $\vec{s}$ des Elektrons zu einem Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$ gekoppelt werden. Als Beispiel ist ein Wasserstoffatom im $2p$-Zustand gegeben.

a) Wie lauten die möglichen Gesamtdrehimpulsquantenzahlen? Sind diese Zustände entartet?

b) Eine Näherung für die Energiekorrektur, die aufgrund der Spin-Orbit Kopplung zu erwarten ist, ist durch die Eigenwerte des Hamilton-Operators $\hat{\mathbf{H}}_{sL}$ gegeben. Der Hamilton-Operator $\hat{\mathbf{H}}_{sL}$ ist dabei der Operator für die Spin-Orbit Kopplung eines Elektrons in einem Zentralfeld:

$$\hat{\mathbf{H}}_{sL} = \xi \frac{\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{L}}}{\hbar^2}. \tag{3}$$

Die Kopplungskonstante ξ ist für den angeregten Zustand mit den Quantenzahlen n und l durch das folgende Integral gegeben:

$$\xi = \frac{e^2 \mu_0 \hbar^2}{8\pi m_e^2} \int_0^\infty R_{n,l}(r) \left(\frac{1}{r^3}\right) R_{n,l}(r) r^2 \, dr. \tag{4}$$

Berechnen Sie die Kopplungskonstante für das $2p$-Orbital. Die radiale Wellenfunktion hat die folgende Form:

$$R_{2,1}(r) = \frac{1}{(2a_B)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{r}{\sqrt{3} a_B} \cdot e^{-\frac{r}{2a_B}}. \tag{5}$$

c) Berechnen Sie nun die Eigenwerte von $\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{L}}$. Das Produkt kann dazu durch die Eigenwerte der Betragsquadrate der Drehimpulsoperatoren $\hat{\mathbf{s}}$, $\hat{\mathbf{L}}$ und $\hat{\mathbf{J}}$ ausgedrückt werden. Berechnen Sie auf diesem Weg den Energieunterschied zwischen den Zuständen mit den Quantenzahlen $j = \frac{1}{2}$ und $j = \frac{3}{2}$.