Analysis I, H13

Aufgabe 1

(a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k^2}}{k^{3/2}+2}$$

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2+1}} x^k \quad ?$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie jeweils den angegebenen Grenzwert:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{\cosh(x) - 1}$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\log(1 + (x^3+5)^{1/7}) - \dfrac{3}{7} \log(2x) \right)$

Aufgabe 3

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := f(x)(1 - f(x)) \qquad \text{für } x \in [0,1].$$

Zeigen Sie:

(a) $\max\{g(x) : x \in [0,1]\}$ existiert.

(b) Im Fall $f(0) \leq 0, f(1) \geq 1$ gilt $\max\{g(x) : x \in [0,1]\} = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 4

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Lipschitz-stetige Funktion mit Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$. Zeigen Sie:

(a) f^{-1} ist Lipschitz-stetig $\Leftrightarrow$ Es existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| \geq \delta |x - y|$ für alle $x, y \in I$.

(b) Ist f^{-1} Lipschitz-stetig und ist f differenzierbar in $\xi \in I$, dann gilt $f'(\xi) \neq 0$.

Aufgabe 5

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen (f_n) mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n(x) = \cos((1+\frac{1}{n})^n x)$ für $x \in [0,1]$

(b) $f_n(x) = |1-nx| - nx$ für $x \in [0,1]$

Aufgabe 6

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgenden Abschätzungen:

(a) $|\tanh(x) - \tanh(y)| \leq |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(b) $|\arcsin(x)| \leq \frac{|x|}{1-|x|} \quad \forall x \in (-1,1)$

Aufgabe 7

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^3 e^{x^2} x^3 \, dx.$$

(b) Untersuchen Sie das folgende uneigentliche Integral auf Konvergenz:

$$\int_0^1 \frac{\sinh(t)}{t^2} \, dt$$

Aufgabe 1

(a) Nach dem Majorantenkriterium liegt absolute Konvergenz und damit auch Konvergenz vor, denn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\frac{(-1)^{k^2}}{k^{3/2}+2}\right| = \frac{1}{k^{3/2}+2} \leq \frac{1}{k^{3/2}}$$

und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ ist absolut konvergent.

(b) Für den Konvergenzradius r der angegebenen Potenzreihe gilt

$$\frac{1}{r} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2+1}}\right|} = \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k^2+1}\right)^{\frac{1}{2k}} = 1,$$

denn $\frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{k^2+1} \leq 1$ und

$$\limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2k^2}\right)^{\frac{1}{2k}} = \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2k}} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = 1 \cdot 1 = 1, \qquad \limsup_{k\to\infty} 1^{\frac{1}{2k}} = 1.$$

Daher konvergiert die Reihe (absolut) für $|x| < 1$ und sie divergiert für $|x| > 1$.

Für $x = 1$ folgt die Konvergenz der Reihe aus dem Leibniz-Kriterium, denn $(\frac{1}{\sqrt{k^2+1}})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monotone Nullfolge wegen

$$\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{l^2+1}} \quad \Leftrightarrow \quad k^2+1 \geq l^2+1 \quad \overset{k,l\geq 0}{\Leftrightarrow} \quad k \geq l.$$

Im Fall $x = -1$ divergiert die Reihe nach dem Minorantenkriterium, denn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}k}$ divergiert und

$$\frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2+1}} \cdot (-1)^k = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{k^2+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}k}.$$

Aufgabe 2

(a) Nach dem Satz von Bernoulli-l'Hôpital gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\cosh(x)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{\sinh(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{\cosh(x)} = \frac{-1}{1} = -1.$$

(b) Für $x \to \infty$ gilt aufgrund der Stetigkeit des Logarithmus auf $(0, \infty)$

$$\begin{aligned}
\log(1+(x^3+5)^{1/7}) - \frac{3}{7}\log(2x) &= \log(1+(x^3+5)^{1/7}) - \log((2x)^{3/7}) \\
&= \log\left(\frac{1+(x^3+5)^{1/7}}{(2x)^{3/7}}\right) \\
&= \log\left(\frac{1}{(2x)^{3/7}} + \left(\frac{x^3+5}{(2x)^3}\right)^{1/7}\right) \\
&\to \log\left(0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{3/7}\right) \\
&= -\frac{3}{7}\log(2).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) Die Funktion g ist als Produkt auf $[0,1]$ stetiger Funktionen stetig auf $[0,1]$, $[0,1]$ ist kompakt. Daher besitzt g auf $[0,1]$ ein Maximum.

(b) Es gilt $g(x) \leq \frac{1}{4}$, denn für alle $x \in [0,1]$ ist

$$g(x) = f(x)(1 - f(x)) = -f(x)^2 + f(x) = -\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}.$$

Im Fall $f(0) \leq 0, f(1) \geq 1$ existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [0,1]$ mit $f(\xi) = \frac{1}{2}$ und somit

$$g(\xi) = f(\xi)(1 - f(\xi)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Daher ist in diesem Fall

$$\max_{x \in [0,1]} g(x) = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 4 *f Lipschitz-stetig braucht man nicht.*

(a) "$\Rightarrow$": Sei zunächst f^{-1} Lipschitz-stetig auf $f(I)$. Dann existiert ein $M > 0$ mit

$$|f^{-1}(\alpha) - f^{-1}(\beta)| \leq M|\alpha - \beta| \qquad \forall \alpha, \beta \in f(I)$$

Für $x, y \in I$ gilt $f(x), f(y) \in f(I)$ und folglich

$$|x - y| = |f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(y))| \leq M|f(x) - f(y)|$$

und die Behauptung der rechten Seite folgt für $\delta = \frac{1}{M}$.

"$\Leftarrow$": Es gelte nun die Behauptung der rechten Seite für $\delta > 0$. Dann gilt für alle $\alpha, \beta \in f(I)$ die Aussage $f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta) \in I$ und damit

$$|\alpha - \beta| = |f(f^{-1}(\alpha)) - f(f^{-1}(\beta))| \geq \delta |f^{-1}(\alpha) - f^{-1}(\beta)|,$$

d.h. f^{-1} ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $\leq \frac{1}{\delta}$.

(b) Nach (a) existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in I$ die Abschätzung

$$\left|\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}\right| \geq \delta$$

gilt. Für $x \to \xi$ erhalten wir aufgrund der Stetigkeit des Betrags

$$|f'(\xi)| = \left|\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}\right| = \lim_{x \to \xi} \left|\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}\right| \geq \delta,$$

insbesondere also $f'(\xi) \neq 0$.

Aufgabe 5

(a) Für alle $x \in [0,1]$ gilt $(1+\frac{1}{n})^n x \to ex$ für $n \to \infty$. Aus der Stetigkeit des Kosinus folgt daher $f_n(x) \to \cos(ex) =: f(x)$ punktweise für alle $x \in [0,1]$. Die Konvergenz ist gleichmäßig, denn für ein $\xi_n \in ((1+\frac{1}{n})^n, e)$ gilt

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &= \left|\cos\left((1+\frac{1}{n})^n x\right) - \cos(ex)\right| \\ &= \left|-\sin(\xi_n x) \cdot \left((1+\frac{1}{n})^n x - ex\right)\right| \\ &= \left|\sin(\xi_n x) x \cdot \left((1+\frac{1}{n})^n - e\right)\right| \\ &\leq \left|(1+\frac{1}{n})^n - e\right|\end{aligned}$$

und die rechte Seite ist eine von x unabhängige Nullfolge. Daher konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.

(b) Es gilt $f_n(0) = 1$ und $f_n(x) \to -1$ im Fall $x \in (0,1]$, denn für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{x}$ gilt

$$f_n(x) = |1 - nx| - nx = (nx - 1) - nx = -1$$

Daher konvergiert (f_n) auf $[0,1]$ punktweise gegen die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{, falls } x \in (0,1], \\ 1 & \text{, falls } x = 0. \end{cases}$$

Da alle f_n stetig sind und f unstetig ist, kann keine gleichmäßige Konvergenz vorliegen.

Aufgabe 6

(a) Es gilt für alle $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|\tanh'(z)| &= \left|\frac{\cosh(z)}{\cosh(z)} - \frac{\sinh^2(z)}{\cosh^2(z)}\right| \\ &= \left|\frac{\cosh^2(z) - \sinh^2(z)}{\cosh^2(z)}\right| \\ &= \frac{1}{\cosh^2(z)} \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Für $x, y \in \mathbb{R}$ existiert nach dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen x und y mit

$$\tanh(x) - \tanh(y) = \tanh'(\xi)(x - y).$$

Insbesondere folgt

$$|\tanh(x) - \tanh(y)| = |\tanh'(\xi)(x - y)| \leq |x - y|.$$

b) Für $z \in (-1,1)$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \leq \frac{1}{1-|z|} \Leftrightarrow 1 - |z| \leq \sqrt{1-z^2} \Leftrightarrow 1 - 2|z| + |z|^2 \leq 1 - z^2 \Leftrightarrow |z| \leq 1 \Leftrightarrow \text{WAHR}.$$

Daher ist

$$|\arcsin'(z)| = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \leq \frac{1}{1-|z|} \quad \forall z \in (-1,1).$$

Für $x \in (-1,1)$ existiert nach dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen x und 0 mit

$$\arcsin(x) = \arcsin(x) - \arcsin(0) = \arcsin'(\xi)x.$$

Insbesondere folgt

$$|\arcsin(x)| = |\arcsin'(\xi)x| \leq \frac{|x|}{1-|\xi|} \leq \frac{|x|}{1-|x|}.$$

Aufgabe 7

(a)

$$\begin{aligned}\int_1^3 e^{x^2} x^3\,dx &= \int_1^9 e^t t^{3/2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int_1^9 e^t t\,dt\\ &= \frac{1}{2}\left[(t-1)e^t\right]_1^9\\ &= 4e^9.\end{aligned}$$

b) Die Funktion

$$g(t) := \begin{cases}\frac{\sinh(t)}{t} & ,t\in(0,1]\\ 1 & ,t=0\end{cases}$$

ist wegen $\lim_{t\to 0}\frac{\sinh(t)}{t}=1$ stetig und zudem positiv, denn $2\sinh(t)=e^t-e^{-t}>0$ für alle $t>0$. Daher gilt $m:=\min_{t\in[0,1]} g(t)>0$ und es folgt für alle $\varepsilon>0$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\sinh(t)}{t^2}\,dt = \int_\varepsilon^1 \frac{g(t)}{t}\,dt \geq m\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t}\,dt = m\ln(\varepsilon^{-1}) \to \infty \quad (\varepsilon\to 0).$$

Daher divergiert das uneigentliche Integral.