Mathematik Fachschaft Informatik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

15.09.2015
Lamm

Analysis I, H15

Aufgabe 1

Für $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+2}$, ist die Folge (x_n) für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert durch $x_1 := 0$ und $x_{n+1} = f(x_n)$. Zeigen Sie:

1. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 \leq x_n \leq 2$;
2. (x_n) ist monoton wachsend;
3. (x_n) konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \sqrt{(1-\frac{a}{n})(1-\frac{b}{n})}\right).$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie für $x > 0$ die Werte der Reihen

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$;
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^n(x+2)^{n+2}}$.

Aufgabe 4

1. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cosh(\sin(x^2))$. (Erinnerung: $\cosh(u) = \frac{e^u+e^{-u}}{2}$)
2. Berechnen Sie das Integral $\int_0^\pi e^{-x} \cos x \, dx$.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}(\cos(x) + \sin(x))^{\frac{1}{x}}.$$

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass genau ein $x \in \mathbb{R}^+$ existiert mit

$$e^x = \frac{1}{x}.$$

Lösung von Aufgabe 1

1. Wir zeigen per Induktion die Aussage $0 \leq x_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Induktionsanfang ist $0 = x_1 \leq 2$. Es gelte nun $0 \leq x_n \leq 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt $x_{n+1} = f(x_n) \geq 0$ und $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \leq \sqrt{2+2} = 2$. Dies zeigt die Behauptung.
2. Wir zeigen die Monotonie ebenfalls per Induktion. Zuerst gilt $x_2 - x_1 = \sqrt{2} \geq 0$ und weiter
$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2 + x_n} - \sqrt{2 + x_{n-1}} = \frac{(2 + x_n) - (2 + x_{n-1})}{\sqrt{2 + x_n} + \sqrt{2 + x_{n-1}}} \geq 0,$$
per Induktionsannahme. Damit ist die Monotonie bewiesen.
3. Die Folge x_n ist monoton wachsend und nach oben beschränkt und damit existiert der Grenzwert $x = \lim_{n\to\infty} x_n \geq 0$. Da f eine stetige Funktion ist, folgt
$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + x_n} = \sqrt{2 + x}.$$
$x \geq 0$ ist damit die positive Lösung der Gleichung $x^2 = f(x)^2 = 2 + x$, bzw. $x = 2$.

Lösung von Aufgabe 2

Wir definieren, für $n > \max\{|a|, |b|\}$ die Folgen $c_n := 1 - \left(\sqrt{(1 - \frac{a}{n})(1 - \frac{b}{n})}\right)^2 = \frac{a+b}{n} - \frac{ab}{n^2}$ und $d_n = \left(1 + \sqrt{(1 - \frac{a}{n})(1 - \frac{b}{n})}\right)$. Aus der Stetigkeit der Wurzelfunktion und $\frac{a}{n}, \frac{b}{n}, \frac{ab}{n} \to 0$ für $n \to \infty$ folgt
$$\lim_{n\to\infty} nc_n = a + b \qquad \lim_{n\to\infty} d_n = 2.$$
Damit erhalten wir
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \sqrt{(1 - \frac{a}{n})(1 - \frac{b}{n})}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{nc_n}{d_n} = \frac{a+b}{2}.$$

Lösung von Aufgabe 3

Die Folge der Partialsummen ist in beiden Teilaufgaben monton wachsend, da $\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} > 0$ und $\frac{1}{(x+1)^n(x+2)^{n+2}} > 0$ für alle n. Damit existieren die Grenzwerte der Partialsummen. Es gilt zu zeigen, dass diese endlich sind und wir müssen ihren Wert bestimmen.

1. Wir nutzen $\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}$ und damit
$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{x+n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{x+n+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+m+1} \to \frac{1}{x+1} (m \to \infty).$$
Dies zeigt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+1}$.
2. Wir nutzen $0 < \frac{1}{(x+1)(x+2)} < 1$ und die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}, -1 < \lambda < 1$. Damit ergibt sich
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^n(x+2)^{n+2}} = \frac{1}{(x+2)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{((x+1)(x+2))^n}$$
$$= \frac{1}{(x+2)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{(x+1)(x+2)}} = \frac{x+1}{x+2} \frac{1}{(x+1)(x+2) - 1}$$

Lösung von Aufgabe 4

1. $f'(x) = \big(\cosh(\sin(x^2))\big)' = \sinh(\sin(x^2))\cos(x^2)2x;$
2. Wir integrieren zweimal partiell $(-e^{-x})' = e^{-x}$:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{-x}\cos x\,dx &= [-e^{-x}\cos(x)]_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi (-e^{-x})\sin(x)\,dx\\ &= (e^{-\pi}+1) + [e^{-x}\sin(x)]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi e^{-x}\cos(x)\,dx\\ &= (e^{-\pi}+1) - \int_0^\pi e^{-x}\cos(x)\,dx,\end{aligned}$$

d.h. $\int_0^\pi e^{-x}\cos x\,dx = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$.

Lösung von Aufgabe 5

Da $(\cos(x)+\sin(x))^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log(\cos(x)+\sin(x))}{x}}$ und die Abbildung $y \to e^y$ stetig ist, reicht es den Grenzwert von $\frac{\log(\cos(x)+\sin(x))}{x}$ für $x \to 0$ zu bestimmen. Nach der Regel von L'Hospital folgt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(x)+\sin(x))}{x} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)+\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}}{\lim_{x\to 0} 1} = 1.$$

Zusammen ergibt sich nun der Grenzwert als

$$\lim_{x\to 0}(\cos(x)+\sin(x))^{\frac{1}{x}} = e.$$

Lösung von Aufgabe 6

Wir definieren die Funktion $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ für $x > 0$. f ist stetig differenzierbar und $f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$, d.h. f ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}^+$. Wir haben die Grenzwerte $\lim_{x\searrow 0} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt die Existenz eines $x \in \mathbb{R}^+$ mit $f(x) = 0$ bzw. $e^x = \frac{1}{x}$. Die Eindeutigkeit folgt aus der strengen Monotonie von f.

Lösung von Aufgabe 7

Wir behaupten $f'(x)x - f(x) \geq 0$ für alle $x > 0$. Dies ist eine Folgerung aus dem Mittelwertsatz, denn $f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi)x$ für ein $0 < \xi < x$. Aus der Montonie von f' folgt nun $f'(x)x - f(x) = x(f'(x) - f'(\xi)) \geq 0$. Dies impliziert die Monotonie von g, denn

$$g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} \geq 0.$$

Aufgabe 7

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = 0$ und stetig differenzierbar auf $(0, \infty)$. f' sei monoton wachsend auf $(0, \infty)$. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{f(x)}{x}$, monoton wachsend ist.