30.08.2016
Schnaubelt

Analysis I, SS16 Haupt

Aufgabe 1 (a) Zeigen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert.

$$\sum_{n\geq 2}(-1)^n \exp(5n-n^2)$$

(b) Berechnen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert.

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n}{\sqrt{n^6+n+1}}x^n$$

Aufgabe 2 Berechnen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte.

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sinh(x)}-\frac{1}{x}\right) \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^x-x}{1-x+\ln(x)}$$

Erinnerung: Für $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\sinh(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$ *und für* $x>0$ *ist* $x^x=\exp(x\ln x)$.

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass die durch $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n^2-a_n+2$ rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $a_1\in[0,2]$ konvergiert. Berechnen Sie auch ihren Grenzwert.

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$y=\ln(x+1)-\frac{x^2}{2x+2}$$

für jedes $y\in[0,\ln(2)-\frac{1}{4}]$ genau eine Lösung $x\in[0,1]$ besitzt.

Aufgabe 5 Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}; \quad f_n(x)=\frac{2nx^2}{(4+n^2x^2)^2},$$

gleichmäßig konvergiert. Berechnen Sie auch ihren Grenzwert f.

Aufgabe 6 Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gelte $f(0)=f(1)=0$ sowie $f'(0),f'(1)>0$. Beweisen Sie: Es gibt $x_1,x_2,x_3\in(0,1)$ mit

$$f(x_1)=\max_{x\in[0,1]}f(x)>0, \quad f(x_2)=\min_{x\in[0,1]}f(x)<0, \quad f(x_3)=0.$$

Aufgabe 7 Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\text{(a)} \quad \int_{\pi/2}^{\pi}\sqrt{\cos^2(x)}\cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \quad \int_0^2 x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2

Lösung. (a) Zuerst bringen wir den Funktionsterm auf den Hauptnenner:

$$\frac{1}{\sinh(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sinh(x)}{x \sinh(x)} \quad \text{für } x \in (0, \infty).$$

Da $\lim_{x\to 0^+} \sinh(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} x$ konvergieren sowohl Nenner als auch Zähler gegen 0 für $x \to 0^+$. Die erste Voraussetzung für die Regel von de L'Hospital ist erfüllt. Diese besagt, dass falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert, gilt

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sinh(x)}{x \sinh(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cosh(x)}{\sinh(x) + x\cosh(x)}.$$

Wieder haben wir $\lim_{x\to 0^+}(1 - \cosh(x)) = 0 = \lim_{x\to 0^+}(\sinh(x) + x\cosh(x))$. Diesmal führt die Regel von de L'Hospital zum Ziel, denn der Grenzwert auf der rechten Seite der folgenden Gleichung existiert und wir erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sinh(x)}{x \sinh(x)} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cosh(x)}{\sinh(x) + x\cosh(x)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sinh(x)}{\cosh(x) + \cosh(x) + x\sinh(x)} = \frac{0}{2} = 0.\end{aligned}$$

(b) Da der Logarithmus stetig ist, gilt $\lim_{x\to 1^+} \ln(x) = \ln(1) = 0$. Daraus folgen, dass $\lim_{x\to 1^+}(x^x - x) = 1 - 1 = 0$ und $\lim_{x\to 1^+}(1 - x - \ln(x)) = 0$ gelten. Die erste Voraussetzung für die Regel von de L'Hospital ist erfüllt. Wenn der Grenzwert auf der rechten Seite der folgenden Gleichung existiert, dann gilt

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^x(\ln(x) + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1}.$$

Die Regel von de L'Hospital wird nochmals angewendet, denn $\lim_{x\to 1^+}(\frac{1}{x} - 1) = 0$ und $\lim_{x\to 1^+}(x^x(\ln(x) + 1) - 1) = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^x(\ln(x) + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^x(\ln(x) + 1)^2 + x^x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1(0+1)^2 + 1}{-1} = -2.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3

Lösung. Wir zeigen, dass (a_n) wachsend und beschränkt ist. Die erste Behauptung ist leicht zu sehen: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+1} \geq a_n \iff \tfrac{1}{2}a_n^2 - 2a_n + 2 = \tfrac{1}{2}(a_n - 2)^2 \geq 0.$$

Die Aussage auf der rechten Seite ist sicherlich wahr. Somit ist (a_n) wachsend.

Jetzt zeigen wir mit vollständiger Induktion, dass $a_n \in [0,2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Induktionsanfang ist trivial, da $a_1 \in [0,2]$ per Voraussetzung. Gilt $a_n \in [0,2]$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann gilt auch

$$a_{n+1} \leq 2 \iff \tfrac{1}{2}a_n^2 - a_n = \tfrac{1}{2}a_n(a_n - 2) \leq 0 \impliedby 0 \leq a_n \leq 2.$$

Andererseits folgt aus der Monotonie $a_{n+1} \geq a_n \geq 0$. Insgesamt haben wir $a_{n+1} \in [0,2]$. Der Konvergenzsatz für monotone Folgen liefert die Konvergenz von (a_n). Der Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} a_n \in [0,2]$ erfüllt die Gleichung

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (\tfrac{1}{2}a_n^2 - a_n + 2) = \tfrac{1}{2}a^2 - a + 2.$$

Eine analoge Umformung wie oben zeigt $\frac{1}{2}(a-2)^2 = 0$ oder äquivalent $a = 2$. □

Aufgabe 6

Lösung. Per Voraussetzung ist auch f' stetig. Also gibt es $0 < r_1 < r_2 < 1$ so, dass $f'(x) > 0$ für $x \in [0, r_1] \cup [r_2, 1]$. Wir wissen also, dass f strikt wächst auf $[0, r_1]$ sowie auf $[r_2, 1]$. Insbesondere sind $0 = f(0) < f(r_1)$ und $f(r_2) < f(1) = 0$.

Als stetige Funktion nimmt f ihr Maximum und ihr Minimum auf der kompakten Menge $[0,1]$ an. Also gibt es $x_1, x_2 \in [0,1]$ mit

$$f(x_1) = \max_{x\in[0,1]} f(x) \geq f(r_1) > 0 \quad \text{und} \quad f(x_2) = \min_{x\in[0,1]} f(x) \leq f(r_2) < 0.$$

Das bedeutet aber $x_1, x_2 \in (0,1)$

Der Zwischenwertsatz besagt, dass es ein x_3 zwischen x_1 und x_2 gibt mit $f(x_3) = 0$. Das Intervall mit den Endpunkten x_1 und x_2 ist enthalten in $(0,1)$ und folglich gilt $x_3 \in (0,1)$. □

Aufgabe 7

Lösung. (a) Wir verwenden die Substitution $u(x) = \cos^2(x)$. Es ist $u'(x) = -2\cos(x)\sin(x)$ und $u(\frac{\pi}{2}) = 0$, $u(\pi) = (-1)^2 = 1$. Die Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{\cos^2(x)} \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi/2}^{\pi} \tfrac{1}{2}\sqrt{\cos^2(x)}2\cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = -\left[\tfrac{1}{3}u^{3/2}\right]_0^1 = -\tfrac{1}{3}.\end{aligned}$$

(b) Wir wenden zuerst die Substitutionsregel auf $u(x) = x^2$ an und integrieren dann partiell. Offenbar ist $u'(x) = 2x$ und $u(0) = 0$, $u(2) = 4$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^3 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\int_0^2 x^2\mathrm{e}^{-x^2}\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^4 u\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\left[u(-1)\mathrm{e}^{-u}\right]_0^4 - \tfrac{1}{2}\int_0^4 (-1)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\tfrac{4}{2}\mathrm{e}^{-4} - \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-u}\right]_0^4 = (-\tfrac{4}{2} - \tfrac{1}{2})\mathrm{e}^{-4} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^0 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2}\mathrm{e}^{-4}.\end{aligned}$$

□

Auifgabe 4

Lösung. Wir zeigen, dass die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x^2}{2x+2}$ strikt wachsend und damit injektiv ist. Dann gibt es für jedes $y \in f([0,1])$ genau ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) = y$. Da $f(0) = 0$ und $f(1) = \ln(2) - \frac{1}{4}$, folgt aus der Monotonie von f mit Hilfe des Zwischenwertsatzes auch $f([0,1]) = [0, \ln(2) - \frac{1}{4}]$.

Der Logarithmus ist differenzierbar auf $[1,2]$, also ist $x \mapsto \ln(x+1)$ differenzierbar auf $[0,1]$. Auch die durch $\frac{x^2}{2x+2}$ gegebene rationale Funktion ist differenzierbar auf $[0,1]$, denn die einzige Nullstelle des Nenners ist -1 und diese liegt nicht in $[0,1]$. Die Ableitungsregeln liefern

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2x(2x+2) - x^2 \cdot 2}{4(x+1)^2} = \frac{x+1}{(x+1)^2} - \frac{\frac{1}{2}x^2 + x}{(x+1)^2} = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2}{(x+1)^2}.$$

Für alle $x \in [0,1]$ gilt offenbar

$$f'(x) > 0 \iff 1 - \tfrac{1}{2}x^2 > 0 \iff x^2 < 2.$$

Die rechte Aussage ist wahr für alle $x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Da $[0,1] \subseteq \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 5

Lösung. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Weil alle auftretenden Terme nichtnegativ sind, gilt $f_n(x) \geq 0$ und insbesondere $|f_n(x)| = f_n(x)$ für alle $x \in [0,\infty)$. Wir betrachten die Teilintervalle $[1,\infty)$ und $[0,1]$.

Für $x \in [1,\infty)$ haben wir $f_n(x) \leq \frac{2nx^2}{(n^2x^2)^2} = 2\frac{1}{n^3x^2} \leq \frac{2}{n^3}$. Das zeigt, dass (f_n) auf $[1,\infty)$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, da $\frac{2}{n^3} \to 0$ für $n \to \infty$.

Weil der Nenner $(4 + n^2x^2)^2$ strikt positiv ist, ist f_n differenzierbar. Insbesondere ist f_n stetig und nimmt somit auf der kompakten Menge $[0,1]$ ihr Maximum an. Die Quotientenregel liefert

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{4nx(4+n^2x^2)^2 - 2nx^2 \cdot 2 \cdot (4+n^2x^2) \cdot 2n^2x}{(4+n^2x^2)^4} \\ &= \frac{4nx(4+n^2x^2 - 2n^2x^2)}{(4+n^2x^2)^3} = \frac{4nx(4-n^2x^2)}{(4+n^2x^2)^3}. \end{aligned}$$

Da $n \geq 0$ und $x \geq 0$, haben wir

$$\begin{aligned} f_n'(x) = 0 &\iff 4nx(4-n^2x^2) = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x^2 = \tfrac{4}{n^2} \\ &\iff x = 0 \text{ oder } x = \tfrac{2}{n}. \end{aligned}$$

Um die Maximalstelle von f_n zu bestimmen kann man die Funktionswerte

$$f_n(0) = 0, \qquad f_n(\tfrac{2}{n}) = \frac{1}{8n}, \qquad f_n(1) = \frac{2n}{(4+n^2)^2} \leq \frac{2}{n^3}$$

vergleichen. Man sieht jedoch auch so, dass $\max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \leq \max\{\frac{1}{8n}, \frac{2}{n^3}\} \to 0$ für $n \to \infty$. Also konvergiert (f_n) auch auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Insgesamt haben wir gezeigt, dass (f_n) auf $[0,\infty)$ gleichmäßig gegen die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = 0$ konvergiert.

Alternative: Es gilt $f_n(0) < f_n(1) < f_n(\frac{2}{n})$. Die erste Ungleichung ist klar. Die zweite sieht man so:

$$f_n(1) = f_n(\tfrac{2}{n}) \iff 16n^2 < 16 + 8n^2 + n^4 \iff 16 - 8n^2 + n^4 = (4-n^2)^2 > 0.$$

Nun haben wir $|f_n(x)| = f_n(x) \leq f_n(\frac{2}{n}) = \frac{1}{8n} \to 0$ für $n \to \infty$ für alle $x \in [0,1]$. Also konvergiert (f_n) auch auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Insgesamt ... (siehe oben). $\square$

Aufgabe 1

Lösung. (a) Wir verwenden das Leibnizkriterium. Es ist zu zeigen, dass die Folge mit den Gliedern $a_n = \exp(5n - n^2)$ für $n \geq 2$ eine fallende Nullfolge ist. Nach Vorlesung ist die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strikt wachsend und besitzt den Funktionsgrenzwert

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0.$$

Somit reicht es zu zeigen, dass die Folge mit den Gliedern $b_n = 5n - n^2$ für $n \geq 2$ eine fallende Folge ist mit $b_n \to -\infty$ für $n \to \infty$.

Für $n \geq 10$ ist $5 \leq \frac{1}{2}n$ und somit

$$b_n = 5n - n^2 \leq \tfrac{1}{2}n^2 - n^2 = -\tfrac{1}{2}n^2.$$

Es ist klar, dass $-\frac{1}{2}n^2 \to -\infty$ für $n \to \infty$ und somit $b_n \to -\infty$ für $n \to \infty$. Da $n \geq 2$ gilt andererseits

$$b_{n+1} - b_n = 5n + 5 - n^2 - 2n - 1 - 5n + n^2 = 4 - 2n = 2(2 - n) \leq 0.$$

Also ist $(b_n)_{n\geq 2}$ fallend. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n\geq 2}(-1)^n a_n$.

Tatsächlich konvergiert die Reihe sogar absolut. Das zeigen Quotienten- oder Wurzelkriterium, denn es gilt

$$\begin{aligned} \left|\frac{(-1)^{n+1}a_{n+1}}{(-1)^n a_n}\right| &= \exp(4 - 2n) \to 0 < 1 \quad \text{für } n \to \infty, \\ \sqrt[n]{|(-1)^n a_n|} &= \exp(5 - n) \to 0 < 1 \quad \text{für } n \to \infty. \end{aligned}$$

(b) Zuerst berechnen wir den Konvergenzradius $\rho = (\limsup_{n\to\infty} c_n)^{-1}$, wobei (c_n) die Folge mit den Gliedern

$$c_n := \sqrt[n]{\left|\frac{n}{\sqrt{n^6 + n + 1}}\right|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt{\sqrt[n]{n^6 + n + 1}}}$$

ist. Es ist bekannt, dass $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$. Mit dem Einschließungskriterium zeigen wir, dass auch der Nenner für $n \to \infty$ gegen 1 konvergiert. Für alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir $0 \leq 1 \leq n \leq n^6$ und folglich

$$\left(\sqrt[n]{n}\right)^6 \leq \sqrt[n]{n^6 + n + 1} \leq \sqrt[n]{3n^6} = \sqrt[n]{3}\left(\sqrt[n]{n}\right)^6.$$

Weiter ist bekannt, dass $\sqrt[n]{3} \to 1$ für $n \to \infty$. Aus der Stetigkeit der Wurzelfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \sqrt{x}$ erhalten wir schließlich $\limsup_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ und damit $\rho = \frac{1}{1} = 1$.

Wir wissen also, dass die Reihe für alle $x \in (-1, 1)$ absolut konvergiert und, dass sie für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergiert. Es bleibt der Fall $|x| = 1$ zu untersuchen. In diesem Fall konvergiert die Reihe ebenfalls absolut, denn

$$\left|\frac{n}{\sqrt{n^6 + n + 1}}x^n\right| = \frac{n}{\sqrt{n^6 + n + 1}}|x|^n = \frac{n}{\sqrt{n^6 + n + 1}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^6}} = n^{-2}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} n^{-2}$ konvergiert. Das Majorantenkriterium liefert die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{\sqrt{n^6+n+1}}x^n$ für $|x| = 1$. Insgesamt konvergiert die Potenzreihe also genau für die $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1$, das heißt für $x \in [-1, 1]$. □