Analysis 1 – Sommer 2016 7

Aufgabe 1 Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2 = \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n.$$

Lösung. Beweis mit vollständiger Induktion:

IA $n = 1$: Offenbar gilt $\sum_{k=0}^{0}(2k+1)^2 = 1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}$.

IS: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2 &= \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2 + (2n+1)^2 \\ &\overset{\text{IV}}{=} \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + 4n^2 + 4n + 1 \\ &= \frac{4}{3}n^3 + \frac{4}{3}3n^2 + \frac{4}{3}3n + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}n \\ &= \frac{4}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{3}(n+1).\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2 Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = -\frac{3}{2} \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = -a_n^2 - 2a_n - 2 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $a_n \in (-2, -1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung. Wenn (a_n) einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ hat, dann gilt

$$\begin{aligned} a = -a^2 - 2a - 2 &\iff a^2 + 3a + 2 = 0 \\ &\iff a \in \left\{-\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{\sqrt{9-8}}{2}\right\} = \{-2, -1\}.\end{aligned}$$

Beh: $a_n \in (-2, -1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweis mit vollständiger Induktion. Die Behauptung ist klar für $n = 1$.
Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$a_{n+1} = -a_n^2 - 2a_n - 2 = -(a_n^2 + 2a_n + 1) - 1 = -(a_n + 1)^2 - 1.$$

Nach IV ist $a_n \in (-2, -1) \implies a_n + 1 \in (-1, 0) \implies (a_n + 1)^2 \in (0, 1) \implies -(a_n + 1)^2 - 1 \in (-2, -1)$.

Beh: (a_n) ist wachsend.
Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} &a_n \le a_{n+1} = -a_n^2 - 2a_n - 2 \\ \iff \quad & 0 \ge a_n^2 + 3a_n + 2 = a_n^2 + 2\tfrac{3}{2}a_n + \tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{4} + \tfrac{8}{4} = (a_n + \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

Da $a_n \in (-2,-1)$ folgt

$$a_n + \tfrac{3}{2} \in (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \implies (a_n + \tfrac{3}{2})^2 \in [0, \tfrac{1}{4}) \implies (a_n + \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{1}{4} \in [-\tfrac{1}{4}, 0).$$

Da (a_n) beschränkt ist und monoton, liefert das Monotoniekriterium die Konvergenz der Folge gegen ein $a \in \{-1,-2\}$. Da (a_n) wachsend ist und $a_1 > -2$, folgt $a = -1$. □

Aufgabe 3 (a) Zeigen Sie, dass die folgende Reihe nicht konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} 2^n$$

(b) Prüfen Sie ob die folgende Reihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4+(-1)^n)^n} 2^n$$

(c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für welche die folgende Potenzreihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^{2n}} \frac{x^n}{n+1}$$

Lösung. (a) Die Reihe konvergiert nicht, da $\left(\frac{2^n}{(3+(-1)^n)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist. Es gilt nämlich

$$\frac{2^{2k+1}}{(3+(-1)^{2k+1})^{2k+1}} = \frac{2^{2k+1}}{2^{2k+1}} = 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

(b) Die Reihe konvergiert. Wir verwenden das Wurzelkriterium: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{(4+(-1)^n)^n}\right|} = \frac{2}{4+(-1)^n} = \begin{cases} \frac{2}{5}, & n \text{ gerade} \\ \frac{2}{3}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Es folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{(4+(-1)^n)^n}\right|} = \frac{2}{3} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe absolut.

(c) Bestimme den Konvergenzradius:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{(\pi^2)^n} \frac{1}{n+1}\right|} = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \begin{cases} \leq \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{\pi^2} \\ \geq \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{\pi^2} \end{cases} \implies \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{(\pi^2)^n} \frac{1}{n+1}\right|} = \frac{1}{\pi^2}.$$

Der Konvergenzradius ist $r = \pi^2$.

Für $x = r$ haben wir

$$\frac{(-1)^n}{(\pi^2)^n} \frac{(\pi^2)^n}{n+1} = (-1)^n \frac{1}{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es ist klar, dass $\frac{1}{n+1}$ eine fallende Nullfolge ist. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert die Potenzreihe für $x = r$.

Für $x = -r$ gilt

$$\frac{(-1)^n}{(\pi^2)^n} \frac{(-1)^n (\pi^2)^n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n}$ divergiert, divergiert auch die Potenzreihe für $x = -r$.

Insgesamt konvergiert die Potenzreihe genau dann, wenn $x \in (-\pi^2, \pi^2]$. □

Aufgabe 4 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \sin(x), & x \in (-\infty, 0] \cup [\frac{\pi}{2}, \infty). \end{cases}$$

Geben Sie Zahlen a und b an für die f stetig ist. Ist f dann auch differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung. Die Funktion ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0, \frac{\pi}{2}\}$. Insbesondere ist sie stetig in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{\pi}{2}\}$. Weil 0 und $\frac{\pi}{2}$ Häufungspunkte von $\mathbb{R}$ sind, ist f stetig in diesen Punkten, wenn

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = f(\tfrac{\pi}{2}) = 1.$$

Betrachte jeweils den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert. Weil Sinus und Polynome stetig sind, gelten

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \sin(0) = 0 = f(0), \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= a \cdot 0 + b = b, \\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= a\tfrac{\pi}{2} + b, \\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \sin(\tfrac{\pi}{2}) = 1 = f(\tfrac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Also ist f stetig in 0, wenn $0 = b$ und f ist stetig in $\frac{\pi}{2}$, wenn $a = \frac{2}{\pi}(1 - b)$. Zusammengenommen ist f genau dann stetig auf $\mathbb{R}$, wenn $b = 0$ und $a = \frac{2}{\pi}$.
Für diese Parameter ist f aber nicht differenzierbar in 0, denn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h}(f(h) - f(0)) \quad \text{existiert nicht.}$$

In der Tat sind die linksseitigen und die rechtsseitigen Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^-} \tfrac{1}{h}(f(h) - f(0)) &= \lim_{h \to 0^-} \tfrac{1}{h}(\sin(h) - \sin(0)) = \sin'(0) = \cos(0) = 1 \\ \lim_{h \to 0^+} \tfrac{1}{h}(f(h) - f(0)) &= \lim_{h \to 0^+} \tfrac{1}{h}(\tfrac{2}{\pi}h) = \tfrac{2}{\pi} \end{aligned}$$

nicht identisch. □

Aufgabe 5 Zeigen Sie die Ungleichung

$$\cosh(x) > \frac{x^2}{2} + 1 \quad \text{für alle } x \in (0, \infty).$$

Hinweis: Es gilt $\cosh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ *für* $x \in \mathbb{R}$.

Lösung. Definiere $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \cosh(x) - \frac{x^2}{2} - 1$. Dann ist f beliebig oft differenzierbar und es gelten

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \sinh(x) - x, \\ f''(x) &= \cosh(x) - 1 = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - 1 \end{aligned}$$

für alle $x \in (0, \infty)$. Wir behaupten, dass $f''(x) > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$. Das sieht man so: Für $x \in (0, \infty)$ haben wir

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - 1 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{2x} + 1 - 2\mathrm{e}^x = (\mathrm{e}^x - 1)^2 > 0$$

und die rechte Seite ist wahr für alle $x \in (0, \infty)$.
Wir schließen, dass f' strikt wachsend ist auf $[0, \infty)$. Mit $f'(0) = 0$ folgt, dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$. Somit ist auch f strikt wachsend. Mit $f(0) = 0$ folgt, dass $f(x) > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$. Das ist gleichbedeutend mit der Aussage aus der Behauptung. □

Aufgabe 6 Untersuchen Sie die angegebenen Funktionenfolgen (f_n) und (g_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

$$\text{(a) } f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}; \quad f_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n} + n!x}$$

$$\text{(b) } g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}; \quad g_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n} + nx^2}$$

Lösung. (a) Es gilt $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in (0, 1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$0 \leq f_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n} + n!x} \leq \frac{x}{n!x} = \frac{1}{n!} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Die Folge auf der rechten Seite ist unabhängig von x. Also konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = 0$. Insbesondere konvergiert die Folge punktweise.

(b) Wieder gilt $g_n(0) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Ist $x \in (0, 1]$, dann gilt

$$0 \leq g_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n} + nx^2} \leq \frac{x}{nx^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{x} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Somit konvergiert (g_n) punktweise gegen $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$; $g(x) = 0$. Setzen wir $x_n = \frac{1}{n}$, erhalten wir jedoch

$$|g_n(x_n) - g(x_n)| = g_n(\tfrac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + n\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n}}{2\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \not\to 0.$$

Hieraus folgt, dass (g_n) auf $[0, 1]$ nicht gleichmäßig gegen g konvergiert. □

Aufgabe 7 (a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int e^{3x} \sin(2x)\, dx.$$

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{7\tan(x)}}{\cos^2(x)}\, dx.$$

Hinweis: $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *für* $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *und* $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})$.

Lösung. (a) Mit partieller Integration:

$$\int \underset{\uparrow}{e^{3x}} \underset{\downarrow}{\sin(2x)}\, dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin(2x) - \int \frac{1}{3}e^{3x} 2\cos(2x) dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin(2x) - \frac{2}{3}\int \underset{\uparrow}{e^{3x}} \underset{\downarrow}{\cos(2x)}\, dx$$
$$= \frac{1}{3}e^{3x}\sin(2x) - \frac{2}{9}e^{3x}\cos(2x) - \frac{4}{9}\int e^{3x}\sin(2x)\, dx.$$

Es folgt

$$\int e^{3x}\sin(2x)\, dx = \left(1 + \frac{4}{9}\right)^{-1}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\sin(2x) - \frac{2}{9}e^{3x}\cos(2x)\right)$$
$$= \frac{3}{13}e^{3x}\sin(2x) - \frac{2}{13}e^{3x}\cos(2x).$$

(b) Wir substituieren $u = \tan(x)$ (damit ist "$du = \frac{1}{\cos^2(x)} dx$"). Da $\tan(0) = 0$ und $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, erhalten wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{7\tan(x)}}{\cos^2(x)}\, dx = \int_0^1 \sqrt{7u}\, du = \left[\tfrac{2}{3}(7u)^{3/2} \cdot \tfrac{1}{7}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\frac{(\sqrt{7})^3}{(\sqrt{7})^2} = \frac{2}{3}\sqrt{7}. \qquad \square$$