KIT
Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
[redacted]

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Analysis I

27.09.2018

Aufgabe 1:
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := -1, \qquad a_{n+1} := \frac{9+a_n^2}{6} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $a_n \in [\frac{5}{3}, 3]$ für alle $n \geq 2$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(i) _Behauptung:_ Für alle $n \geq 2$ gilt $a_n \in [\frac{5}{3}, 3]$.

Beweis: Die Behauptung kann mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.

IA: Es gilt $a_2 = \frac{9+a_1^2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \in [\frac{5}{3}, 3]$.
IV: Die Aussage gelte bereits für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, d.h. für eine $n \geq 2$ gelte bereits $a_n \in [\frac{5}{3}, 3]$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Nach Induktionsvoraussetzung gilt $1 \leq \frac{5}{3} \leq a_n \leq 3$. Damit erhält man

$$a_{n+1} = \frac{9+a_n^2}{6} \underset{\text{IV}}{\geq} \frac{9+1^2}{6} = \frac{5}{3} \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{9+a_n^2}{6} \underset{\text{IV}}{\leq} \frac{9+3^2}{6} = \frac{18}{6} = 3,$$

d.h. es gilt $a_{n+1} \in [\frac{5}{3}, 3]$. □

(ii) _Behauptung:_ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 3.

Beweis: Zunächst gilt wegen Teil (i) $a_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn auch $a_1 = -1 \leq 3$. Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{9+a_n^2}{6} - a_n = \frac{9+a_n^2-6a_n}{6} = \frac{(a_n-3)^2}{6} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_n \leq a_{n+1}.$$

Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt und somit konvergent. Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann muss a die folgende Gleichung erfüllen

$$a = \frac{9+a^2}{6} \quad \Leftrightarrow \quad (a-3)^2 = 9+a^2-6a = 0,$$

also gilt $a = 3$. □

Aufgabe 2:
(i) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{2}{n}\right)^n.$$

(ii) Bestimmen Sie sämtliche $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{8^n(n^2+1)}(x-1)^{3n}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) _Behauptung:_ $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{2}{n}\right)^n$ konvergiert absolut.

Beweis: Es sei $a_n := n!\left(\frac{2}{n}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit erhält man

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!2^n} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{2}{e} < 1 \quad (n \to \infty).$$

Somit konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{2}{n}\right)^n$ absolut nach dem Quotientenkriterium. □

(ii) _Behauptung:_ Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{8^n(n^2+1)}(x-1)^{3n}$ konvergiert für alle $x \in [-1, 3)$ und divergiert für $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 3)$.

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$a_k := \begin{cases} \frac{2n}{8^n(n^2+1)}, & k = 3n,\ n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{8^n(n^2+1)}(x-1)^{3n} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-1)^k$. Für $k = 3n$ erhält man

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[3n]{\frac{2n}{8^n(n^2+1)}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt[n]{2n}}{\sqrt[n]{n^2+1}}\right)^{\frac{1}{3}} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty).$$

Damit erhält man den Konvergenzradius

$$r = \left(\limsup_{k\to\infty} |a_k|\right)^{-1} = 2,$$

d.h. die Potenzreihe konvergiert absolut für $|x-1| < 2$ und divergiert für $|x-1| > 2$.

Für $x = -1$ erhält man die folgende Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n}{n^2+1}$. Es gilt $\frac{2n}{n^2+1} = \frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \to 0$ für $n \to \infty$ und

$$\frac{2n}{n^2+1} - \frac{2(n+1)}{(n+1)^2+1} = \frac{2n(n^2+2n+2) - 2(n+1)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} = \frac{2n^2+2n-2}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$$
$$\geq \frac{2n^2+2n-2n}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} = \frac{2n^2}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} \geq 0,$$

d.h. $(\frac{2n}{n^2+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge und somit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n}{n^2+1}$ nach dem Leibnizkriterium.

Für $x = 3$ erhält man die folgende Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Da die harmonische Reihe divergiert, divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$ nach dem Minorantenkriterium. □

Aufgabe 3:
Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge definiert durch

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) := \arctan(n\,g(x)).$$

(i) Sei zunächst $g(x) := |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann punktweise auf $\mathbb{R}$ konvergiert und geben Sie die Grenzfunktion an. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmäßig?

(ii) Nun sei g gegeben durch

$$g(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann punktweise auf $\mathbb{R}$ konvergiert und geben Sie die Grenzfunktion an. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmäßig?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(i) *Behauptung:* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n = \arctan(n\,|x|)$, d.h für $x = 0$ gilt $f_n(x) = \arctan(0) = 0 \to 0$ $(n \to \infty)$. Für $x \neq 0$ gilt $f_n(x) = \arctan(n\,|x|) \to \frac{\pi}{2}$ $(n \to \infty)$. Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Da f_n stetig ist für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie die punktweise Grenzfunktion f unstetig ist, konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig. $\square$

(ii) *Behauptung:* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_n(x) = \begin{cases} \arctan(n\frac{x}{|x|}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

d.h. $x = 0$ gilt $f_n(x) = 0 \to 0$ $(n \to \infty)$. Für $x > 0$ gilt $\frac{x}{|x|} = 1$ und somit $f_n(x) = \arctan(n) \to \frac{\pi}{2}$ $(n \to \infty)$. Für $x < 0$ gilt $\frac{x}{|x|} = -1$ und somit $f_n(x) = \arctan(-n) \to -\frac{\pi}{2}$ $(n \to \infty)$. Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

Um die gleichmäßige Konvergenz zu zeigen, sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existieren zunächst $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\arctan(n) - \frac{\pi}{2}\right| \leq \varepsilon\ \forall_{n \geq n_1} \qquad \text{und} \qquad \left|\arctan(-n) + \frac{\pi}{2}\right| \leq \varepsilon\ \forall_{n \geq n_2}.$$

Setzte $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Für $x = 0$ gilt dann $|f_n(x) - f(x)| = 0 \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Weiter gilt für $x > 0$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\arctan(n) - \frac{\pi}{2}\right| \leq \varepsilon \quad \forall_{n \geq n_0},$$

und für $x < 0$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\arctan(-n) + \frac{\pi}{2}\right| \leq \varepsilon \quad \forall_{n \geq n_0}.$$

Insgesamt erhält man also

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \forall_{n \geq n_0}\colon\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

d.h. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f. $\square$

Aufgabe 4:
Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$\cos^3(x) \geq -1 + \frac{3}{2}(x - \pi)^2 - \frac{7}{2}\pi^3$$

für alle $0 \leq x \leq \pi$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
Behauptung: Für alle $x \in [0, \pi]$ gilt $\cos^3(x) \geq -1 + \frac{3}{2}(x - \pi)^2 - \frac{7}{2}\pi^3$.

Beweis: Definiere $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \cos^3(x)$ für alle $x \in [0, \pi]$. Dann gilt $f \in C^\infty([0, \pi])$ nach der Kettenregel und für $x \in [0, \pi]$ gilt

$$f'(x) = -3\cos^2(x)\sin(x),\ f''(x) = 6\cos(x)\sin^2(x) - 3\cos^3(x) \text{ und } f'''(x) = 21\sin(x)\cos^2(x) - 6\sin^3(x).$$

Damit erhält man

$$T_2(x; \pi) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(\pi)}{k!}(x - \pi)^k = -1 + \frac{3}{2}(x - \pi)^2.$$

Nach dem Satz von Taylor existiert für alle $x \in [0, \pi]$ ein $\xi \in (x, \pi)$ mit

$$\cos^3(x) = f(x) = T_2(x; \pi) + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - \pi)^3 = T_2(x; \pi) + \frac{1}{6}(21\sin(\xi)\cos^2(\xi) - 6\sin^3(\xi))(x - \pi)^3.$$

Wegen $(x - \pi)^3 \leq 0$ für $x \in [0, \pi]$ und $\sin(\xi)\cos^2(\xi) \leq 1$, bzw. $0 \leq \sin^3(\xi)$ erhält man

$$\begin{aligned} \cos^3(x) &= -1 + \frac{3}{2}(x - \pi)^2 + \frac{1}{6}(21\underbrace{\sin(\xi)\cos^2(\xi)}_{\leq 1} - 6\underbrace{\sin^3(\xi)}_{\geq 0})\underbrace{(x - \pi)^3}_{\leq 0} \\ &\geq -1 + \frac{3}{2}(x - \pi)^2 + \frac{21}{6}\underbrace{(x - \pi)^3}_{\geq -\pi^3} = -1 + \frac{3}{2}(x - \pi)^2 - \frac{7}{2}\pi^3. \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 5:
Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \sin(x), & x \in (-\infty, 0], \\ x + \alpha, & x \in (0, 1), \\ e^{1+\beta x}, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie sämtliche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Bestimmen Sie für die Werte α, β aus (i) alle $x \in \mathbb{R}$ in denen f differenzierbar ist. Geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(i) *Behauptung:* f ist stetig auf $\mathbb{R}$ genau dann, wenn $\alpha = 0$ und $\beta = -1$.

Beweis: Da 0 und 1 Häufungspunkte von $\mathbb{R}$ sind, ist f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ genau dann, wenn gilt

$$\begin{aligned} 0 = \sin(0) &= \lim_{x \to 0-} f(x) \overset{!}{=} \lim_{x \to 0+} = \alpha, \\ 1 + \alpha &= \lim_{x \to 1-} f(x) \overset{!}{=} \lim_{x \to 1+} = \mathrm{e}^{1+\beta}, \end{aligned}$$

also genau dann, wenn gilt

$$\alpha = 0 \quad \text{und} \quad 1 = \mathrm{e}^{1+\beta} \Leftrightarrow 0 = \log(1) = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1.$$

$\square$

(ii) *Behauptung:* f ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Beweis: Auf den offenen Intervallen $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, \infty)$ ist f differenzierbar. Für $h > 0$ erhält man

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sin(h) - \sin(0)}{h} \to (\sin(x))'\big|_{x=0} = \cos(0) = 1 \quad (h \to 0)$$

und für $h < 0$ gilt

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h - \sin(0)}{h} = 1 \to 1 \quad (h \to 0),$$

also ist f differenzierbar in 0 mit Ableitung 1. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \to 0-} \frac{(1+h) - 1}{h} = 1 \\ &\neq -1 = -\mathrm{e}^0 = \left(\mathrm{e}^{-x}\right)'\big|_{x=0} = \lim_{h \to 0+} \frac{\mathrm{e}^{-h} - \mathrm{e}^0}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}, \end{aligned}$$

d.h. f ist in 1 nicht differenzierbar. Insgesamt gilt also f ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit Ableitung

$$f' \colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \; f'(x) = \begin{cases} \cos(x), & (-\infty, 0], \\ 1, & x \in (0, 1), \\ -\mathrm{e}^{1-x}, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

$\square$

Aufgabe 6:
Es sei $f \colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig, der Grenzwert $\lim_{x \to \infty} f(x)$ existiere und sei endlich. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig auf $[0, \infty)$ ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:
Behauptung: f ist gleichmäßig stetig auf $[0, \infty)$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert $c := \lim_{x \to \infty} f(x) < \infty$, d.h. es existiert ein $x_0 = x_0(\varepsilon) \in [0, \infty)$ mit

$$|f(x) - c| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall_{x \geq x_0}. \tag{1}$$

Da f stetig, sowie $[0, x_0]$ beschränkt und abgeschlossen ist, ist f auf $[0, x_0]$ insbesondere gleichmäßig stetig (siehe Vorlesung), d.h. es existiert $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sodass $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ gilt für alle $x, y \in [0, x_0]$ mit $|x - y| \leq \delta$. Außerdem gilt nach (1) für alle $x, y \in [x_0, \infty)$ (unabhängig von δ):

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - c| + |f(y) - c| \leq \varepsilon.$$

Insgesamt gilt also für alle $x, y \in [0, \infty)$:

$$|x - y| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq \delta,$$

d.h. f ist gleichmäßig stetig auf $[0, \infty)$.

$\square$

Aufgabe 7:
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\, dx$, (ii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x) \mathrm{e}^{|\cos(x)|}\, dx$, (iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\, dx$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Funktion

$$F \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x(\log(x) - 1)$$

eine Stammfunktion von log ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

(i) *Behauptung:* Es gilt $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\, dx = \frac{\log(2)}{2}$.

Beweis: Für $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ gilt $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\, dx \\ &= -\left[\log(|\cos(x)|)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \log(\underbrace{|\cos(0)|}_{=1}) - \log(\underbrace{|\cos(\tfrac{\pi}{4})|}_{=\frac{\sqrt{2}}{2}}) \\ &= -\log(\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\log(\frac{1}{2})}{2} = \frac{\log(2)}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\int_0^{\pi} \sin(x) \mathrm{e}^{|\cos(x)|}\, dx = 2(\mathrm{e} - 1)$.

Beweis: Für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt $\cos(x) \geq 0$, also $|\cos(x)| = \cos(x)$. Für $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ gilt $\cos(x) \leq 0$, also $|\cos(x)| = -\cos(x)$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin(x) \mathrm{e}^{|\cos(x)|}\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \mathrm{e}^{\cos(x)}\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x) \mathrm{e}^{-\cos(x)}\, dx \\ &= -\left[\mathrm{e}^{\cos(x)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\mathrm{e}^{-\cos(x)}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -(\mathrm{e}^{\cos(0)} - \mathrm{e}^{\cos(\frac{\pi}{2})}) + (\mathrm{e}^{-\cos(\frac{\pi}{2})} - \mathrm{e}^{-\cos(\pi)}) \\ &= 2(\mathrm{e} - 1). \end{aligned}$$

$\square$

(iii) *Behauptung:* Es gilt $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx = 2 - \log(4)$.

Beweis: Wir verwenden die Substitution $y = \sqrt{x}$. Damit erhalten wir mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\, dx &= \int_0^1 \frac{1}{1 + y} 2y\, dy = 2\left(\left[y \log(1 + y)\right]_0^1 - \int_0^1 \log(1 + y)\, dy\right) \\ &= 2\left(\log(2) - \left[(1 + y)(\log(1 + y) - 1)\right]_0^1\right) \\ &= 2\left(\log(2) - 2(\log(2) - 1) + (\log(1) - 1)\right) \\ &= 2(1 - \log(2)) = 2 - \log(4). \end{aligned}$$

$\square$