Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Dorothee Frey
Yonas Mesfun, M.Sc.

WS 21/22
22.10.2021

Analysis I

1. Übungsblatt

Abgabe bis 29.10.2021, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (Vollständige Induktion I)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k k! = (n+1)! - 1$.

(b) Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig sei.

Aufgabe 2 (K) (Vollständige Induktion II)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$,

(b) $\prod_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ (wobei hier $n \geq 2$),

(c) $\sum_{\ell=1}^{2n} (-1)^{\ell+1} \frac{1}{\ell} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$,

(d) 133 ist ein Teiler von $11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

Aufgabe 3 (Geometrische Summenformel, binomischer Lehrsatz)

(a) Berechnen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Summe $\sum_{k=0}^{n} \left(1 + \sum_{\ell=0}^{2k-1} 2^\ell\right)$.

(b) Für $p \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$ sei $S_p(n) := \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$ die Summe der ersten n p-ten Potenzen. Zeigen Sie

$$\sum_{p=0}^{m} \binom{m+1}{p} S_p(n) = (n+1)^{m+1} - 1 \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 4 (K) (Vollständige Induktion III, Mengenoperationen)

(a) Finden Sie eine Summenformel für $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$ $(n \in \mathbb{N})$ und beweisen Sie diese induktiv.

(b) Es seien X eine Menge und $M, N \subseteq X$ Teilmengen von X.

(1) Zeigen Sie $X \backslash (M \cup N) = (X \backslash M) \cap (X \backslash N)$.

(2) Gilt $(X \backslash M) \backslash N = X \backslash (M \backslash N)$? Beweisen oder widerlegen Sie.

Fachschaftsveranstaltungen für Erstis

Du interessierst dich für die Arbeit der Fachschaft und möchtest dich vielleicht gerne selbst engagieren? Schau einfach vorbei am **26. Oktober um 19:00 Uhr** beim **Semesterauftakttreffen**. Hier zeigen wir dir, wie die Fachschaft organisiert ist, was ihre Aufgaben sind und wie du dich bei uns einbringen kannst.
Außerdem haben wir einen **Einstiegs-Fachschaftsrat** für den **3. November um 17:30 Uhr** geplant. Dort kannst du erfahren, wie die Fachschaft Entscheidungen trifft und selbst mitentscheiden.