Analysis I

Lösungsvorschlag zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Vollständige Induktion I)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1$.

(b) Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig sei.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1

(a) **Behauptung**: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage

$$A(n): \quad \sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1.$$

Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang (IA): Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} kk! = 1 \cdot 1! = 1 = (1+1)! - 1.$$

Also ist $A(1)$ wahr.

Induktionsvoraussetzung (IV): Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt (IS): Unter der (IV) erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} kk! = \left(\sum_{k=1}^{n} kk!\right) + (n+1)(n+1)!$$
$$\overset{\text{(IV)}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = ((n+1)+1)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1.$$

Also ist auch $A(n+1)$ wahr.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) **Behauptung**: Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Aussage

$$B(m,n): \quad \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}.$$

Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.

Hierzu halten wir ein beliebig gewähltes $n \in \mathbb{N}_0$ fest und führen die Induktion bezüglich $m \in \mathbb{N}_0$ durch.
Induktionsanfang (IA): Es gilt

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n+k}{k} = \binom{n}{0} = 1 = \binom{n+0+1}{0}.$$

Also ist $B(0, n)$ wahr.
Induktionsvoraussetzung (IV): Es gelte $B(m, n)$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$.
Induktionsschritt (IS): Wir erhalten unter Verwendung von Gleichung (1.4) und der (IV) des Vorlesungskriptes

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{n+k}{k} = \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k}\right) + \binom{n+m+1}{m+1} \overset{\text{(IV)}}{=} \binom{n+m+1}{m} + \binom{n+m+1}{m+1} \overset{(1.4)}{=} \binom{n+m+2}{m+1}.$$

Also ist auch $B(m+1, n)$ wahr.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist $B(m, n)$ wahr für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Da $n \in \mathbb{N}_0$ zuvor beliebig gewählt war, ist damit $B(m, n)$ wahr für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$. Dies war zu zeigen.

Aufgabe 2 (K) (Vollständige Induktion II)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$,

(b) $\displaystyle\prod_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ (wobei hier $n \geq 2$),

(c) $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{2n} (-1)^{\ell+1} \frac{1}{\ell} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$,

(d) 133 ist ein Teiler von $11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

(a) <u>**Behauptung**</u>: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage

$$A(n): \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

<u>**Beweis**</u>: Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang (IA): Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{1}{4} 1^2 (1+1)^2.$$

Also ist $A(1)$ wahr.
Induktionsvoraussetzung (IV): Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt (IS): Unter der (IV erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{1}{4} (n+1)^2 \left(n^2 + 4(n+1)\right)$$

$$=\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2.$$

Also ist auch $A(n+1)$ wahr.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) **Behauptung**: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt die Aussage

$$B(n): \quad \prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{1}{j^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang (IA): Es gilt

$$\prod_{j=2}^{2}\left(1-\frac{1}{j^2}\right)=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}.$$

Also ist $B(2)$ wahr.
Induktionsvoraussetzung (IV): Es gelte $B(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.
Induktionsschritt (IS): Unter der (IV erhalten wir

$$\begin{aligned}\prod_{j=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{j^2}\right)&=\left(\prod_{j=2}^{n}\left(1-\frac{1}{j^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\overset{\text{(IV)}}{=}\frac{n+1}{2n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\&=\frac{n+1}{2n}\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=\frac{1}{2n}\frac{n^2+2n}{(n+1)}=\frac{n+2}{2(n+1)}.\end{aligned}$$

Also ist auch $B(n+1)$ wahr.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist $B(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

(c) **Behauptung**: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage

$$C(n): \quad \sum_{\ell=1}^{2n}(-1)^{\ell+1}\frac{1}{\ell}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$$

Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang (IA): Es gilt

$$\sum_{\ell=1}^{2\cdot 1}(-1)^{\ell+1}\frac{1}{\ell}=(-1)^{1+1}\frac{1}{1}+(-1)^{2+1}\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{1+k}.$$

Also ist $C(1)$ wahr.
Induktionsvoraussetzung (IV): Es gelte $C(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt (IS): Unter der (IV) erhalten wir

$$\sum_{\ell=1}^{2(n+1)}(-1)^{\ell+1}\frac{1}{\ell}=\sum_{\ell=1}^{2n}(-1)^{\ell+1}\frac{1}{\ell}+(-1)^{2n+2}\frac{1}{2n+1}+(-1)^{2n+3}\frac{1}{2n+2}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{(IV)}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{n+n+1} + \frac{1}{n+n+2} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}.
\end{aligned}$$

Also ist auch $C(n+1)$ wahr.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist $C(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) **Behauptung**: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage

$$D(n): \quad 133 \text{ teilt } 11^{n+1} + 12^{2n-1}.$$

Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang (IA): Es ist $11^{1+1} + 12^{2\cdot 1-1} = 121 + 12 = 133$ und daher gilt:

$$133 \text{ teilt } 11^{1+1} + 12^{2\cdot 1-1}.$$

Also ist $D(1)$ wahr.
Induktionsvoraussetzung (IV): Es gelte $D(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt (IS): Wir schreiben

$$\begin{aligned}
11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1} &= 11 \cdot 11^{n+1} + 12^2 \cdot 12^{2n-1}\\
&= 11 \cdot 11^{n+1} + (11 + (12^2 - 11)) \cdot 12^{2n-1}\\
&= 11 \cdot (11^{n+1} + 12^{2n-1}) + (12^2 - 11) \cdot 12^{2n-1}\\
&= 11 \cdot \underbrace{(11^{n+1} + 12^{2n-1})}_{\text{nach (IV) durch 133 teilbar}} + 133 \cdot 12^{2n-1}
\end{aligned}$$

Da $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ nach (IV) durch 133 teilbar, gilt dies natürlich auch für $11 \cdot (11^{n+1} + 12^{2n-1})$. Weiterhin ist offensichtlich $133 \cdot 12^{2n-1}$ durch 133 teilbar. Also ist $11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)-1}$ eine Summe aus durch 133 teilbaren natürlichen Zahlen und damit selbst durch 133 teilbar. Wir sehen also, dass $D(n+1)$ wahr ist.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist $D(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (Geometrische Summenformel, binomischer Lehrsatz)

(a) Berechnen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Summe $\sum_{k=0}^{n} \left(1 + \sum_{\ell=0}^{2k-1} 2^\ell\right)$.

(b) Für $p \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$ sei $S_p(n) := \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$ die Summe der ersten n p-ten Potenzen. Zeigen Sie

$$\sum_{p=0}^{m} \binom{m+1}{p} S_p(n) = (n+1)^{m+1} - 1 \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Durch zweimalige Anwendung der geometrischen Summenformel (Satz 1.3 im Vorlesungsskript) erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{n}\left(1+\sum_{\ell=0}^{2k-1}2^{\ell}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(1+\frac{2^{2k}-1}{2-1}\right)=\sum_{k=0}^{n}4^k=\frac{4^{n+1}-1}{4-1}=\frac{1}{3}\left(4^{n+1}-1\right).$$

(b) **Behauptung**: Für alle $m,n \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage

$$B(m,n): \quad \sum_{p=0}^{m}\binom{m+1}{p}S_p(n)=(n+1)^{m+1}-1.$$

Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.

Hierzu halten wir ein beliebig gewähltes $m \in \mathbb{N}$ fest und führen die Induktion bezüglich $n \in \mathbb{N}$ durch.

Induktionsanfang (IA): Es gilt

$$\sum_{p=0}^{m}\binom{m+1}{p}\underbrace{S_p(1)}_{=1}=\sum_{p=0}^{m}\binom{m+1}{p}=\sum_{p=0}^{m+1}\binom{m+1}{p}-\binom{m+1}{m+1}=(1+1)^{m+1}-1,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $\sum_{p=0}^{m+1}\binom{m+1}{p}=(1+1)^{m+1}$ nach dem binomischen Lehrsatz gilt. Also ist $B(m,1)$ wahr.

Induktionsvoraussetzung (IV): Es gelte $B(m,n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt (IS): Da $S_p(n+1)=S_p(n)+(n+1)^p$ für alle $p \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt, erhalten wir unter der (IV) und mit dem binomischen Lehrsatz (BL)

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{m}\binom{m+1}{p}S_p(n+1) &= \sum_{p=0}^{m}\binom{m+1}{p}S_p(n)+\sum_{p=0}^{m}\binom{m+1}{p}(n+1)^p \\
&\overset{\text{(IV)}}{=}(n+1)^{m+1}-1+\sum_{p=0}^{m}\binom{m+1}{p}(n+1)^p \\
&=(n+1)^{m+1}-1+\sum_{p=0}^{m+1}\binom{m+1}{p}(n+1)^p-\binom{m+1}{m+1}(n+1)^{m+1} \\
&\overset{\text{(BL)}}{=}(n+1)^{m+1}-1+((n+1)+1))^{m+1}-\binom{m+1}{m+1}(n+1)^{m+1} \\
&=(n+2)^{m+1}-1.
\end{aligned}$$

Also ist auch $B(m,n+1)$ wahr.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist $B(m,n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $m \in \mathbb{N}$ zuvor beliebig gewählt war, ist damit $B(m,n)$ wahr für alle $m,n \in \mathbb{N}$. Dies war zu zeigen.

Alternativ lässt sich die Identität ohne Induktion zeigen: Seien hierfür $m,n \in \mathbb{N}$. Dann gilt unter Anwendung des binomischen Lehrsatzes (BL)

$$\sum_{p=0}^{m}\binom{m+1}{p}S_p(n)=\sum_{p=0}^{m}\binom{m+1}{p}\sum_{k=1}^{n}k^p=\sum_{p=0}^{m}\sum_{k=1}^{n}\binom{m+1}{p}k^p\overset{(*)}{=}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{m}\binom{m+1}{p}k^p$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{p=0}^{m+1}\binom{m+1}{p}k^p-\binom{m+1}{m+1}k^{m+1}\right)\overset{\text{(BL)}}{=}\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{m+1}-k^{m+1}\right)=(n+1)^{m+1}-1,$$

wobei wir in $(*)$ ausgenutzt, dass Doppelsummen vertauschbar sind, d.h., $\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{m} a_{k,p} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{m} a_{k,p}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und Zahlen $a_{k,p} \in \mathbb{Q}$, $k \in \{1,\dots,n\}$, $p \in \{1,\dots,m\}$ gilt (dies kann man mit Induktion zeigen). Weiterhin haben wir für die letzte Gleichheit ausgenutzt, dass die zuletzt auftretende Summe eine *Teleskopsumme* ist, d.h., eine Summe der Form

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_n + a_n - \cdots - a_2 + a_2 - a_1 = a_{n+1} - a_1$$

(dass diese naheliegende Gleichheit tatsächlich für beliebige $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt, kann man rigoros mit vollständiger Induktion zeigen).

Bemerkung: Mit obiger Identiät kann man sukzessiv Formeln für die Potenzsummen $S_p(n)$ finden. Dies wollen wir kurz demonstrieren: Nach Vorlesung und Übung gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
S_0(n) &= \sum_{k=1}^{n} k^0 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n,\\
S_1(n) &= \sum_{k=1}^{n} k^1 = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},\\
S_2(n) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Mit Aufgabe 3 (b) können wir eine Formel für $S_3(n)$ bestimmen; nach Aufgabe 3 (b) gilt nämlich für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
(n+1)^4 - 1 &= \sum_{p=0}^{3} \binom{3+1}{p} S_p(n)\\
&= S_0(n) + 4S_1(n) + 6S_2(n) + 4S_3(n)\\
&= n + 4\frac{n(n+1)}{2} + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4S_3(n)\\
&= 2n^3 + 5n^2 + 4n + 4S_3(n).
\end{aligned}$$

Auflösen nach $S_3(n)$ ergibt

$$S_3(n) = \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - 2n^3 - 5n^2 - 4n - 1\right) = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

in Übereinstimmung mit Aufgabe 2 (a). Analog lassen sich sukzessiv Summenformeln für $S_4(n), S_5(n), \dots$ bestimmen.

Aufgabe 4 (K) (Vollständige Induktion III, Mengenoperationen)

(a) Finden Sie eine Summenformel für $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$ $(n \in \mathbb{N})$ und beweisen Sie diese induktiv.

(b) Es seien X eine Menge und $M, N \subseteq X$ Teilmengen von X.

(1) Zeigen Sie $X \backslash (M \cup N) = (X \backslash M) \cap (X \backslash N)$.

(2) Gilt $(X\backslash M)\backslash N = X\backslash (M\backslash N)$? Beweisen oder widerlegen Sie.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Um eine Formel für s_n zu finden, müssen wir verstehen, wie s_n von n abhängt. Dazu berechnen wir $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ für $n \in \{1,2,3,4\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
s_1 &= \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2},\\
s_2 &= \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3},\\
s_3 &= \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4},\\
s_4 &= \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Die Berechnung der ersten vier Werte legt nahe, dass $s_n = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die obige Berechnung der vier Werte ist natürlich **kein** Beweis der Summenformel. Dass die Summenformel wahr ist, d.h., für *alle* $n \in \mathbb{N}$ gilt, beweisen wir durch vollständige Induktion.

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage

$$A(n): \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang (IA): Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1}.$$

Also ist $A(1)$ wahr.

Induktionsvoraussetzung (IV): Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt (IS): Unter der (IV) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&\overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2},
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die binomische Formel verwendet haben. Wir sehen also, dass auch $A(n+1)$ wahr ist.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Es seien X eine Menge und $M, N \subseteq X$ Teilmengen von X.

(1) **Behauptung:** Es gilt $X \backslash (M \cup N) = (X \backslash M) \cap (X \backslash N)$.

Beweis: Wir beweisen die Aussage durch „doppelte Inklusion", d.h., wir zeigen $X \backslash (M \cup N) \subseteq (X \backslash M) \cap (X \backslash N)$ und $X \backslash (M \cup N) \supseteq (X \backslash M) \cap (X \backslash N)$.

„$\subseteq$": Sei $x \in X \backslash (M \cup N)$. Dann gilt $x \notin M \cup N$, also muss nach Definition der Mengenvereinigung $x \notin M$ und $x \notin N$ gelten. Mit anderen Worten ist also $x \in X \backslash M$ und $x \in X \backslash N$, und nach der Definition des Mengendurchschnittes daher auch $x \in (X \backslash N) \cap (X \backslash M)$.

„$\supseteq$": Sei nun umgekehrt $x \in (X \backslash M) \cap (X \backslash N)$. Dann gilt nach Definition des Mengendurchschnittes $x \in X \backslash M$ und $x \in X \backslash N$; aus der Definition der Mengendifferenz folgt $x \notin M$ und $x \notin N$, und daher nach Definition der Mengenvereinigung $x \notin M \cup N$. Dies bedeutet aber gerade $x \in X \backslash (M \cup N)$.

Damit haben wir die gewünschte Mengengleichheit $X \backslash (M \cup N) = (X \backslash M) \cap (X \backslash N)$ bewiesen.

(2) Die Aussage ist im Allgemeinen falsch. Ist z.B. $X := \{1, 2\}$, $M := \emptyset$, $N := \{1\}$, so gilt

$$
\begin{aligned}
&(X \backslash M) \backslash N = (\{1,2\} \backslash \emptyset) \backslash \{1\} = \{1,2\} \backslash \{1\} = \{2\}, \text{ aber} \\
&X \backslash (M \backslash N) = \{1,2\} \backslash (\emptyset \backslash \{1\}) = \{1,2\} \backslash \emptyset = \{1,2\}.
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Tatsächlich gilt $(X \backslash M) \backslash N = X \backslash (M \cup N)$. Den Beweis dieser Aussage überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Fachschaftsveranstaltungen für Erstis

Du interessierst dich für die Arbeit der Fachschaft und möchtest dich vielleicht gerne selbst engagieren? Schau einfach vorbei am **26. Oktober um 19:00 Uhr** beim **Semesterauftakttreffen**. Hier zeigen wir dir, wie die Fachschaft organisiert ist, was ihre Aufgaben sind und wie du dich bei uns einbringen kannst.

Außerdem haben wir einen **Einstiegs-Fachschaftsrat** für den **3. November um 17:30 Uhr** geplant. Dort kannst du erfahren, wie die Fachschaft Entscheidungen trifft und selbst mitentscheiden.