Institut für Analysis
Prof. Dr. Dorothee Frey
Yonas Mesfun, M.Sc.

WS 21/22
29.10.2021

Analysis I

2. Übungsblatt

Abgabe bis 05.11.2021, 12:00 Uhr

Es sei K stets ein geordneter Körper. Wir schreiben $x^2 := x \cdot x$ und $\frac{x}{y} := x/y := x \cdot y^{-1}$ für $x \in K, y \in K\backslash\{0\}$. Ferner schreiben wir $2 := 1 + 1 \in K$.

Aufgabe 5 (Rechenregeln in geordneten Körpern I)

(a) Zeigen Sie: Für $x, y \in K$ gelten:

$$\text{(i)} \ -(-x) = x, \qquad \text{(ii)} \ (-1) \cdot (-1) = 1, \qquad \text{(iii)} \ (-x) \cdot (-x) = x^2.$$

(b) Zeigen Sie die folgenden Aussagen für $a, x, y \in K$.

(i) Wenn $x < y$ und $a < 0$, so gilt $ax > ay$.
(ii) $x^2 > 0$ für $x \in K\backslash\{0\}$; inbesondere gilt $1 > 0$.
(iii) Aus $x > 0$ folgt $x^{-1} > 0$.

Aufgabe 6 (K) (Rechenregeln in geordneten Körpern II)

(a) Es seien $a, c \in K$ und $b, d \in K\backslash\{0\}$. Leiten Sie aus den Körperaxiomen und den bisher bewiesenen Rechenregeln die folgenden Rechenregeln her.

$$\text{(i)} \ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \text{(ii)} \ \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}, \qquad \text{(iii)} \ \frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \text{ wobei hier } c \neq 0.$$

(b) Es seien $a, b, c, d \in K$. Beweisen Sie:

(i) Wenn $0 > b > a$, dann gilt $0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
(ii) Wenn $c > a > 0$ und $0 > d > b$, dann gilt $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.
(iii) Wenn $b > 0$, $d > 0$ und $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, dann gelten $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Aufgabe 7 (Minimum und Maximum, Betrag)

(a) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in K$ gelten

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2} \qquad \text{und} \qquad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

(b) Zeigen Sie die *umgekehrte Dreiecksungleichung*: Für alle $x, y \in K$ gilt

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$

(c) Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{Q}$, für die die folgenden Ungleichungen gelten.

$$(1) \quad |2x - 10| \leq 6, \qquad (2) \quad |x + 2| > |x - 3|.$$

Aufgabe 8 (K) (Betragsungleichungen, Ungleichungen)

(a) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{Q}$, für die die Ungleichung $||x+1|-2| \leq x$ gelten.

(b) (i) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in K$ gelten die Ungleichungen

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}.$$

(ii) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$. Zeigen Sie: Gilt $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, so folgt

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2$ für alle $x > 0$ und führen Sie anschließend einen Induktionsbeweis.