Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Dorothee Frey
Yonas Mesfun, M.Sc.

WS 21/22
05.11.2021

# Analysis I

## 3. Übungsblatt

**Abgabe bis 12.11.2021, 12:00 Uhr**

**Aufgabe 9 (Suprema und Infima I)**

(a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen ein Infimum, Supremum, Minimum bzw. Maximum haben, und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte:

$$\text{(i) } A := \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \colon x \geq 1, y \geq 1 \right\}, \qquad \text{(ii) } B := \left\{ \frac{|x|x^2}{1+x^2} \colon x \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Es seien nun $A$ und $B$ nichtleere, nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wir definieren die Menge

$$A + B := \{a + b \colon a \in A, b \in B\}.$$

Zeigen Sie:

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

**Aufgabe 10 (K) (Suprema und Infima II, Dichtheit von $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)**

(a) Bestimmen Sie, sofern existent, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der folgenden Mengen.

$$\text{(i)} \quad A := \left\{ \frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad \text{(ii)} \quad B := \left\{ x + \frac{1}{x} \colon x \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

(b) Zeigen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert eine Zahl $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ mit $a < x < b$.
*Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\alpha + \beta\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ für alle $\alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, und wählen Sie dann $\alpha$ und $\beta$ so, dass $\alpha + \beta\sqrt{2}$ in $(a, b)$ liegt. Hierbei bezeichnet $\sqrt{2}$ die Zahl $x \in \mathbb{R}_+$ mit $x^2 = 2$.*

**Aufgabe 11 (Suprema und Infima III)**

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für Teilmengen $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Sei $A$ nach unten beschränkt mit $\inf A > 0$ und setze $B := \{a^{-1} \mid a \in A\}$. Dann ist $B$ nach oben beschränkt und es gilt $\sup B = (\inf A)^{-1}$.

(b) Wenn $a \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt, dann existiert ein $s \in \mathbb{R}$ mit $a \leq s \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

**Aufgabe 12 (K) (Ordnungsvollständigkeit)**

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wachsend[1] und es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ferner gelten $f(a) > a$ und $f(b) < b$. Beweisen Sie, dass $f$ mindestens einen Fixpunkt besitzt, d.h., dass es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = x$.
*Hinweis*: Betrachten Sie $z := \sup\{y \in \mathbb{R} \colon a \leq y \leq b \text{ und } y \leq f(y)\}$ und $f(z)$.

[1] Dies bedeutet, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ auch $f(x) \leq f(y)$ gilt.