Analysis I
Lösungsvorschlag zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 9 (Suprema und Infima I)

(a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen ein Infimum, Supremum, Minimum bzw. Maximum haben, und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte:

$$\text{(i) } A := \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \colon x \geq 1, y \geq 1 \right\}, \qquad \text{(ii) } B := \left\{ \frac{|x|x^2}{1+x^2} \colon x \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Es seien nun A und B nichtleere, nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wir definieren die Menge

$$A + B := \{a + b \colon a \in A, b \in B\}.$$

Zeigen Sie:

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 9

(a) (i) Es ist $A \neq \emptyset$. Für $x \geq 1$ und $y \geq 1$ gelten $0 < \frac{1}{x} \leq 1$ und $0 < \frac{1}{y} \leq 1$ und daher

$$-1 \leq -\frac{1}{y} < \frac{1}{x} - \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \leq 1, \tag{1}$$

also zusammenfassend

$$-1 < \frac{1}{x} - \frac{1}{y} < 1 \quad \text{für alle } x, y \geq 1.$$

Hieraus folgt, dass A durch -1 nach unten beschränkt und durch 1 nach oben beschränkt ist. Aus der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ folgt nun, dass $\sup(A)$ und $\inf(A)$ existieren. Wir zeigen im Folgenden, dass $\sup(A) = 1$ und $\inf(A) = -1$ gelten.

$\sup(A) = 1$: Wir müssen zeigen, dass 1 die kleinste obere Schranke von A ist. Da wir bereits gezeigt haben, dass 1 eine obere Schranke von A ist, müssen wir nur noch sicherstellen, dass es keine kleineren oberen Schranke gibt. Hierfür führen wir einen Widerspruchsbeweis. Sei dazu $s := \sup(A) < 1$. Zunächst einmal stellen wir fest, dass dann $s > 0$ sein muss: Setzen wir nämlich $x := y := 1$ in der Definition von A, so sehen wir, dass $0 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} \in A$ und da s eine obere Schranke von A ist, muss daher insbesondere $s > 0$ gelten. Damit ist $s \in (0,1)$ und wir setzen $\varepsilon := 1 - s \in (0,1)$. Aus Korollar 2.17 (ii) folgt dann die Existenz von $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Setzen wir nun $x := 1$ und $y := n$ in der Definition von A, so folgt

$$A \ni 1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon = 1 - (1-s) = s,$$

im Widerspruch dazu, dass s eine obere Schranke von A ist. Also gibt es keine oberen Schranken von A, die kleiner sind als 1. Mit anderen Worten ist also $\sup(A) = 1$. Insgesamt folgt $\sup(A) = 1$.
$\inf(A) = -1$: Dies kann analog zu $\sup(A) = 1$ beweisen. Wir benutzen stattdessen Proposition 3.9 (c) aus der Übung zusammen mit dem bereits Bewiesenen: Da $-A = A$ ist, gilt

$$\inf(A) = \inf(-A) = -\sup(A) = -1.$$

Es existieren weder $\max A$ noch $\min A$, denn: Würden $\max A$ bzw. $\min A$ existieren, so würden $\max A = \sup(A) = 1$ bzw. $\min A = \inf(A) = -1$ gelten. Es ist aber per Definition $\max A \in A$ bzw. $\min A \in A$, und daher nach (1) auch $\max A < 1$ und $-1 < \min A$. Somit erhielten wir den Widerspruch

$$1 = \sup(A) = \max A < 1 \qquad \text{bzw.} \qquad -1 < \min A = \inf(A) = -1.$$

(ii) Es ist $B \neq \emptyset$. Für $x > 1$ gilt

$$\frac{|x|x^2}{1+x^2} = \frac{|x|}{\frac{1}{x^2}+1} > \frac{|x|}{1+1} = \frac{x}{2}.$$

Für gegebenes $s > 1$ liegt also $b_s := \frac{|2s|\,(2s^2)}{1+(2s^2)}$ in B und erfüllt

$$B \ni b_s > \frac{2s}{2} = s.$$

Also ist B nach oben unbeschränkt, sodass A weder Supremum noch Maximum haben kann. Für $x \in \mathbb{R}$ sind $|x|, x^2, (1+x^2)^{-1}$ nichtnegativ, sodass wir mit (O$\cdot$)

$$0 \leq \frac{|x|x^2}{1+x^2} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

folgern. Also ist B durch 0 nach unten beschränkt. Setzen wir $x := 0$ in der Definition von B, so sehen wir, dass $0 \in B$ gilt und damit 0 das Minimum von B ist. Insbesondere gilt dann $\inf(A) = \min A = 0$.

(b) Zunächst einmal stellen wir fest, dass A und B nach Voraussetzung nichtleer und nach oben beschränkt sind, sodass nach der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ die reellen Zahlen $s := \sup(A)$ und $t := \sup(B)$ existieren. Wir zeigen im Folgenden, dass dann auch $\sup(A+B)$ existiert und dass $\sup(A+B) = s+t$ gilt. Letzteres beweisen wir, indem wir die folgende aus der Übung bekannte Charakterisierung benutzen: Für eine nichtleere nach oben beschränkte Menge M und $r \in \mathbb{R}$ gilt

$$r = \sup(M) \Leftrightarrow r \textit{ ist eine obere Schranke von } M \textit{ und } \forall \varepsilon > 0\colon \exists m \in M\colon r - \varepsilon < m. \quad (2)$$

„$\sup(A) + \sup(B)$ *ist eine obere Schranke von* $A + B$“: Zunächst einmal stellen wir fest, dass $A + B$ nichtleer ist, da nach Voraussetzung A und B nichtleer sind. Da ferner s eine obere Schranke von A und t eine obere Schranke von B ist, gelten für $a \in A$ und $b \in B$ die Ungleichungen $a \leq s$ und $b \leq t$. Aus Satz 2.4 (ii) folgt daher

$$\begin{aligned} a + b &\leq s + t \quad \text{für alle } a \in A, b \in B, \text{ also} \\ c &\leq s + t \quad \text{für alle } c \in A + B. \end{aligned}$$

Also ist $A + B$ durch $s + t$ nach oben beschränkt
„$\forall \varepsilon > 0\colon \exists c \in A + B\colon s + t - \varepsilon < c$“: Sei $\varepsilon > 0$. Da s das Supremum von A ist, existiert

dann ein $a \in A$ mit $a > s - \frac{\varepsilon}{2}$. Da genauso t das Supremum von B ist, existiert ein $b \in B$ mit $b > t - \frac{\varepsilon}{2}$. Wir setzen $c := a + b$. Dann folgt wieder mit Satz 2.4 (ii)

$$c = a + b > \left(s - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(t - \frac{\varepsilon}{2}\right) = s + t - \varepsilon.$$

Mit (2) folgern wir $\sup(A + B) = s + t$. Dies ist aber die zu zeigende Identität, da per Definition $s = \sup(A)$ und $t = \sup(B)$ gelten.

Aufgabe 10 (K) (Suprema und Infima II, Dichtheit von $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)

(a) Bestimmen Sie, sofern existent, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der folgenden Mengen.

$$\text{(i)} \quad A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad \text{(ii)} \quad B := \left\{x + \frac{1}{x} : x \in \mathbb{R}_+\right\}.$$

(b) Zeigen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert eine Zahl $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ mit $a < x < b$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\alpha + \beta\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ für alle $\alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, und wählen Sie dann α und β so, dass $\alpha + \beta\sqrt{2}$ in (a, b) liegt. Hierbei bezeichnet $\sqrt{2}$ die Zahl $x \in \mathbb{R}_+$ mit $x^2 = 2$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 10

(a) (i) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n \geq 1 > 0$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1. \tag{3}$$

Daher ist 1 eine obere Schranke von A und, da 1 in A liegt, gilt $\max A = \sup A = 1$. Aus (3) folgt ferner, dass A durch 0 nach unten beschränkt ist. Wir wollen zeigen, dass $\inf(A) = 0$ ist. Dazu benutzen wir die Charakterisierung (INF') aus der Übung: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Korollar 2.17 (ii) existiert dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Da $\frac{1}{n}$ in A liegt, folgt aus der Charakterisierung (INF') aus der Übung sofort $\inf(A) = 0$. Da ferner $0 \notin A$ gilt, hat M kein Minimum (denn anderenfalls gälte $\min A = \inf A = 0$, im Widerspruch zu $0 \notin A$).
(ii) Für $x > 0$ ist

$$x + \frac{1}{x} > x$$

und damit B nach oben unbeschränkt. Insbesondere existieren weder Supremum noch Maximum von B. Aus dem Hinweis von Aufgabe 8 wissen wir, dass

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \text{für alle } x > 0$$

gilt. Also ist B durch 2 nach unten beschränkt. Tatsächlich gilt sogar $2 \in A$ (man setze $x := 1$ in der Definition von B). Also ist 2 das Minimum von B und es gilt $\inf(B) = \min B = 2$.

(b) Es seien zunächst $\alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$. Dann ist $\alpha + \beta\sqrt{2}$ irrational, d.h., liegt in $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, denn: Läge $q := \alpha + \beta\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}$, so auch $\sqrt{2} = \frac{q-\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, was bekannterweise nicht sein kann. Also ist tatsächlich $\alpha + \beta\sqrt{2}$ für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\beta\backslash\{0\}$ irrational.
Seien nun $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt (Satz 2.16), existiert dann eine rationale Zahl q_1 mit $a < q_1 < b$ und wiederum eine eine weitere rationale Zahl q_2 mit $q_1 < q_2 < b$. Dann haben wir insgesamt $a < q_1 < q_2 < b$. Wir wählen eine weitere rationale Zahl q_3 mit $0 < q_3 < \frac{q_2-q_1}{\sqrt{2}}$ (dies geht vermöge der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). Aus der letzten Ungleichung folgern wir $a < q_1 < q_1 + q_3\sqrt{2} < q_2 < b$. Also ist $q_1 + q_3\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl in (a, b).

Aufgabe 11 (Suprema und Infima III)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für Teilmengen $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Sei A nach unten beschränkt mit $\inf A > 0$ und setze $B := \{a^{-1} \mid a \in A\}$. Dann ist B nach oben beschränkt und es gilt $\sup B = (\inf A)^{-1}$.

(b) Wenn $a \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt, dann existiert ein $s \in \mathbb{R}$ mit $a \leq s \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 11

(a) Es sei $s := \inf A > 0$. Wir wollen zeigen, dass $\sup(B)$ existiert und dass $\sup(B) = s^{-1}$ gilt. Dafür stelllen wir zunächst fest, dass $a \geq s > 0$ für alle $a \in A$ gilt, da s als Infimum von A insbesondere eine untere Schranke von A ist. Mit Satz 2.4 (viii), (ix) folgern wir hieraus

$$\begin{aligned} 0 < a^{-1} \leq s^{-1} &\quad \text{für alle } a \in A, \text{ also} \\ 0 < b \leq s^{-1} &\quad \text{für alle } b \in B. \end{aligned}$$

Somit ist s^{-1} eine obere Schranke von B. Wir zeigen, dass es keine kleineren oberen Schranken von B gibt. Sei hierfür $t < s^{-1}$ eine obere Schranke von B. Wegen $b > 0$ für alle $b \in B$ und t eine obere Schranke von B ist, muss dann $0 < b \leq t$ für alle $b \in B$ gelten. Hieraus folgern wir mit Satz 2.4 (viii), (ix)

$$\begin{aligned} 0 < t^{-1} \leq b^{-1} &\quad \text{für alle } b \in B, \\ \Longrightarrow 0 < t^{-1} \leq a \quad &\quad \text{für alle } a \in A. \end{aligned}$$

Somit ist t^{-1} eine untere Schranke von A, und da s per Definition die größte untere Schranke von A ist, folgt unmittelbar $0 < t^{-1} \leq s$. Hieraus folgt wiederum aus Satz 2.4 (ix), dass $s^{-1} \leq t$, im Widerspruch zu unserer Annahme, dass $t < s^{-1}$ ist. Also gibt es keine oberen Schranken von B, die kleiner sind als s^{-1}. Dies zeigt $\sup(B) = s^{-1} = (\inf(A))^{-1}$.

(b) Sei $b_0 \in B$ beliebig, aber zunächst fest. Da nach Voraussetzung $a \leq b_0$ für alle $a \in A$ gilt, ist b_0 eine obere Schranke von A. Dies bedeutet, dass A nach oben beschränkt (und nach Voraussetzung nichtleer) ist.
Auf Grund der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ existiert somit $\sup A$. Wir setzen $s := \sup A$. Weil jedes $b \in B$ eine obere Schranke von A ist (wir haben b_0 oben beliebig gewählt) und s nach Definition die kleinste obere Schranke von A ist, gilt $s = \sup A \leq b$ für alle $b \in B$.[1] Weiterhin ist das Supremum per Definition eine obere Schranke; also gilt $a \leq s$ für alle $a \in A$. Somit erhalten wir insgesamt, dass $a \leq s \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt.

[1] Das zeigt, dass B nach unten beschränkt ist mit $\inf B \geq \sup A$. Das brauchen wir aber nicht.

Aufgabe 12 (K) (Ordnungsvollständigkeit)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wachsend[2] und es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ferner gelten $f(a) > a$ und $f(b) < b$. Beweisen Sie, dass f mindestens einen Fixpunkt besitzt, d.h., dass es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = x$.

Hinweis: Betrachten Sie $z := \sup\{y \in \mathbb{R}\colon a \leq y \leq b \text{ und } y \leq f(y)\}$ und $f(z)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 12

Es seien $M := \{y \in \mathbb{R}\colon a \leq y \leq b \text{ und } y \leq f(y)\}$. Dann ist $a \in M$, da nach Voraussetzung $a < f(a)$ gilt. Also ist $M \neq \emptyset$. Weiterhin ist per Definition die Menge M durch b nach oben beschränkt. Aus der Ordnungsvollständigkeit folgt nun, dass $z := \sup M \in \mathbb{R}$ existiert. Da $a \in M$ gilt und b eine obere Schranke von M ist, folgt sofort $a \leq z \leq b$. Wir zeigen im Folgenden, dass z ein Fixpunkt von f ist. Dazu gehen wir in 3 Schritten vor:

Behauptung 1: Es gilt $a < z < b$.

Beweis: Zunächst einmal schließen wir aus, dass $z = b$ gilt: Angenommen, es gälte $z = b$. Da nach Voraussetzung $f(b) < b$ gilt und b (wegen $z = b$) das Supremum von M wäre, müsste $z' \in M$ mit $f(b) < z' < b$ existieren. Dann folgt einerseits $f(z') \leq f(b)$, da f wachsend und $z' < b$ ist, und andererseits $z' \leq f(z')$, da $z' \in M$ gilt. Aus den Ungleichungen folgt der Widerspruch

$$z' \leq f(z') \leq f(b) < z'.$$

Also muss $z < b$ gelten. Genauso kann auch $z = a$ nicht gelten, denn: Nach Voraussetzung ist $a < f(a)$, also können wir ein $z' \in (a, f(a))$ wählen. Dann folgt einerseits $f(a) \leq f(z')$, da f wachsend und $a < z'$ ist. Andererseits gilt auch $f(z') < z'$, da $z = a$ als Supremum von M insbesondere eine obere Schranke von M ist und daher $z' \notin M$ wegen $z' > a$ gelten muss. Es folgt dann der Widerspruch

$$z' < f(a) \leq f(z') < z'.$$

Es muss also tatsächlich $z \in (a, b)$ gelten.

Behauptung 2: Es gilt $f(z) \leq z$.

Beweis: Sei $z' \in [a, b]$ mit $z < z'$. Da z obere Schranke von M ist, gilt dann $z' \notin M$, also $f(z') < z'$. Weiter gilt $f(z) \leq f(z')$, da f wachsend ist. Fügen wir die letzten beiden Ungleichungen zusammen, erhalten wir

$$f(z) \leq f(z') < z',$$

und da $z' \in [a, b]$ mit $z' > z$ beliebig gewählt war, folgern wir

$$f(z) < z' \quad \text{für alle } z' \in (z, b].$$

Somit ist $f(z)$ eine untere Schranke von $(z, b]$ und daher $f(z) \leq \inf(z, b] = z$.

Behauptung 3: Es gilt $f(z) \geq z$.

Beweis: Sei nun $z' \in [a, b]$ mit $z' < z$. Da z das Supremum von M ist, gibt es dann ein $z'' \in M$ mit $z' < z'' \leq z$. Da f wachsend ist, erhalten wir aus der letzten Ungleichungskette insbesondere $f(z'') \leq f(z)$, und da $z'' \in M$ ist, gilt weiter $z'' \leq f(z'')$. Fügen wir die letzten beiden Ungleichungen und die Ungleichung $z' < z''$ zusammen, erhalten wir

$$z' < z'' \leq f(z'') \leq f(z),$$

[2]Dies bedeutet, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ auch $f(x) \leq f(y)$ gilt.

und da $z' \in [a,b]$ mit $z' < z$ beliebig gewählt war, folgern wir

$$z' < f(z) \quad \text{für alle } z' \in [a,z).$$

Also ist $f(z)$ eine obere Schranke von $[a,z)$ und damit $z = \sup[a,z) \leq f(z)$.
Aus den bewiesenen Behauptungen 2 und 3, folgen die Ungleichungen $f(z) \leq z$ und $f(z) \geq z$ und (daher aus der Antisymmetrie der Ordnung) $f(z) = z$. Also ist z ein Fixpunkt von f.