Institut für Analysis
Prof. Dr. Dorothee Frey
Yonas Mesfun, M.Sc.

WS 21/22
12.11.2021

Analysis I

4. Übungsblatt

Abgabe bis 19.11.2021, 12:00 Uhr

Aufgabe 13 (Potenzen mit rationalen Exponenten I)

Seien $x, y \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{Q}_+$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Zeigen Sie:

$$\text{(a)} \quad \sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}, \qquad \text{(b)} \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x+y},$$

$$\text{(c)} \quad \sqrt[n]{x+y} < \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}, \qquad \text{(d)} \quad x^p < y^p \iff x < y.$$

Wann gilt Gleichheit in (b)?

Aufgabe 14 (K) (Potenzen mit rationalen Exponenten II)

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie:

(a) $a^{\frac{1}{m}} < a^{\frac{1}{n}}$, falls $m < n$ und $0 < a < 1$,

(b) $a^{\frac{1}{m}} > a^{\frac{1}{n}}$, falls $m < n$ und $a > 1$,

(c) $b^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}} < (b-a)^{\frac{1}{n}}$, falls $a < b$ und $n \geq 2$.

Hinweis: Aufgabe 13 (c) und (d) können nützlich sein.

Aufgabe 15 (Komplexe Zahlen I)

(a) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

(i) $A := \{z \in \mathbb{C} \colon |z-1| \leq |z+1|\}$,

(ii) $B := \{z \in \mathbb{C} \colon |z+1| \leq |z-i| \leq |z-1|\}$,

(iii) $C := \{z \in \mathbb{C} \colon 3z\overline{z} - 6z - 6\overline{z} + 9 = 0\}$.

(b) Berechnen Sie

$$\text{(i)} \quad \left|\frac{1+2i}{3-4i}\right|, \qquad \text{(ii)} \quad \frac{1}{2+i} - \frac{i}{1+3i}, \qquad \text{(iii)} \quad i^{2021}.$$

(c) Bestimmen Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 + (-10+4i)z + 70 - 20i = 0$.

Aufgabe 16 (K) (Komplexe Zahlen II)

(a) Beweisen Sie die *Parallelogramm-Identität*: Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

(b) Für $z \in \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ sei

$$f(z) := \sqrt{|z|}\,\frac{z+|z|}{|z+|z||}.$$

Zeigen Sie $f(z)^2 = z$. Bestimmen Sie ferner alle Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $w^2 = z$.

(c) Es seien $A \coloneqq \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \colon |z - i| < 1\}$ und $f \colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$. Bestimmen und skizzieren Sie die Bildmenge $f(A) \coloneqq \{f(z) \colon z \in A\}$.