Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Dorothee Frey
Yonas Mesfun, M.Sc.

WS 21/22
19.11.2021

# Analysis I

## 5. Übungsblatt

**Abgabe bis 26.11.2021, 12:00 Uhr**

### Aufgabe 17 (Konvergenz, Grenzwertsätze I)

Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n := \sqrt{n^2+1} - n \quad (n \in \mathbb{N})$, (b) $a_n := \dfrac{(n-1)^3 - (n+2)^3}{4 + 3n^2 + 2n} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(c) $a_n := (1 + (-1)^n)^n \quad (n \in \mathbb{N})$, (d) $a_n := \dfrac{1 + 3 + \cdots + (2n-1)}{1 + 2 + \cdots + n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

### Aufgabe 18 (K) (Konvergenz, Grenzwertsätze II)

Untersuchen Sie die Folgen mit den Gliedern

(a) $a_n = \left(1 + \left(\dfrac{1-i}{2}\right)^n\right) \cdot \left(2 - \dfrac{3n^2 + 2i}{(2n+1)^2}\right)$, (b) $b_n = \dfrac{n^4 - 2i}{n^2 + 4} + \dfrac{n^3(3 - n^2)}{n^3 + 1}$,

(c) $c_n = \sqrt{n}\,(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, (d) $d_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}\dbinom{n}{n-2}$,

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert für $n \to \infty$. In (d) sei $n \geq 2$.

### Aufgabe 19 (Beschränktheit, Konvergenz, Approximation des Supremums)

(a) Beweisen Sie die folgende Bemerkung aus der Vorlesung: Für eine nichtleere Teilmenge $A$ von $\mathbb{C}$ sind äquivalent:

  (i) $A$ ist beschränkt im Sinne von Definition 3.4.

  (ii) Es existiert ein $r > 0$, sodass $|z| \leq r$ für alle $z \in A$ gilt.

(b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch die „verschobene" Folge $(a_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(c) Es sei nun $A$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ gibt, die gegen $\sup A$ konvergiert.

### Aufgabe 20 (K) (Konvergenz)

Seien $(a_n)$, $(b_n)$ Folgen. Zeigen Sie:

(a) Ist $(a_n)$ eine Nullfolge und $(b_n)$ eine beschränkte Folge, dann konvergiert auch $(a_n b_n)$.

(b) Gelten $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n b_n^{-1} \to 1$ für $n \to \infty$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2} b_n$ für alle $n \geq N$.

**Aufgabe 21 (Übung)**

*Diese Aufgabe wird u.a. in der Übung vorgerechnet.*

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert.

(b) Sei $(a_n)$ eine konvergente Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $a \geq 0$ ihr Grenzwert. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(\sqrt{a_n})$ konvergiert.

(c) Sei $z \in \mathbb{C}$. Untersuchen Sie die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

*Hinweis: Beweisen Sie zunächst die Bernoulli-Ungleichung: Für* $n \in \mathbb{N}$ *und* $a \in \mathbb{R}$ *mit* $a \geq 0$ *gilt* $(1+a)^n \geq 1+na$. *Wenden Sie diese Ungleichung im Fall* $|z| > 1$ *mit* $a := |z|-1$ *an.*