# Analysis I

## Lösungsvorschlag zum 5. Übungsblatt

### Aufgabe 17 (Konvergenz, Grenzwertsätze I)

Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n := \sqrt{n^2+1} - n \quad (n \in \mathbb{N})$, (b) $a_n := \dfrac{(n-1)^3-(n+2)^3}{4+3n^2+2n} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(c) $a_n := (1+(-1)^n)^n \quad (n \in \mathbb{N})$, (d) $a_n := \dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{1+2+\cdots+n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 17

(a) *Voraussetzung:* Definiere $a_n := \sqrt{n^2+1} - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
*Behauptung:* $a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

*Beweis.* Sei $\varepsilon > 0$. Aus dem Satz von Archimedes folgt dann die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$, d.h., $\frac{1}{N} \leq \varepsilon$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ folgt dann

$$|a_n - 0| = a_n = \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{(\sqrt{n^2+1}+n)} = \frac{(\sqrt{n^2+1})^2 - n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon.$$

Also konvergiert $(a_n)$ gegen 0 für $n \to \infty$. □

(b) *Voraussetzung:* Definiere $a_n := \frac{(n-1)^3-(n+2)^3}{4+3n^2+2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
*Behauptung:* $a_n \to -3$ für $n \to \infty$.

*Beweis.* Unter Verwendung der Grenzwertsätze erhalten wir

$$a_n = \frac{(n-1)^3-(n+2)^3}{4+3n^2+2n} = \frac{n^3-3n^2+3n-1-(n^3+6n^2+12n+8)}{4+3n^2+2n}$$
$$= \frac{-9n^2-9n-9}{4+3n^2+2n} = -9\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n^2}+3+\frac{2}{n}} \to -9\frac{1+0+0}{0+3+0} = -3 \quad (n \to \infty).$$

□

(c) *Voraussetzung:* Definiere $a_n := (1+(-1)^n)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
*Behauptung:* $(a_n)$ ist divergent.

*Beweis.* Wir zeigen, dass $(a_n)$ unbeschränkt ist Es ist

$$a_{2n} = (1 + (-1)^{2n})^{2n} = 2^{2n} = 4^n > n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei die letzte Ungleichung leicht per vollständiger Induktion folgt. Damit ist $(a_n)$ unbeschränkt, denn: Für jedes $r > 0$ existiert nach dem Satz von Archimedes ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > r$. Zusammen mit der obigen, abgesetzten Ungleichung erhalten wir

$$a_{2n} > n > r.$$

Dies ist genau die Negation der Beschränktheit einer Folge. Aus der Unbeschränktheit von $(a_n)$ folgt insbesondere die Divergenz von $(a_n)$ (denn aus der Vorlesung ist bekannt, dass aus der Konvergenz die Beschränktheit einer Folge folgt; per Kontraposition folgt dann aus der Unbeschränktheit die Divergenz einer Folge). □

(d) *Voraussetzung:* Definiere $a_n := \frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{1+2+\cdots+n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
*Behauptung:* $(a_n) \to 2$ für $n \to \infty$.
*Beweis.* Nach der bekannten Gaußschen Summenformel gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

und weiter

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \cdots + (2n-1) &= (1 + 2 + \cdots + 2n) - (2 + 4 + \cdots + 2n) \\ &= (1 + 2 + \cdots + 2n) - 2\,(1 + 2 + \cdots + n) \\ &= \frac{(2n)(2n+1)}{2} - 2\frac{n(n+1)}{2} = n(2n+1) - n(n+1) = n^2. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Grenzwertsätze folgern wir

$$a_n = \frac{1 + 3 + \cdots + (2n-1)}{1 + 2 + \cdots + n} = \frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = 2\frac{n}{n+1} = 2\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 2\frac{1}{1+0} = 2 \quad (n \to \infty).$$

□

**Aufgabe 18 (K) (Konvergenz, Grenzwertsätze II)**

Untersuchen Sie die Folgen mit den Gliedern

(a) $a_n = \left(1 + \left(\frac{1-i}{2}\right)^n\right) \cdot \left(2 - \frac{3n^2 + 2i}{(2n+1)^2}\right)$, (b) $b_n = \frac{n^4 - 2i}{n^2 + 4} + \frac{n^3(3 - n^2)}{n^3 + 1}$,

(c) $c_n = \sqrt{n}\,(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, (d) $d_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \binom{n}{n-2}$,

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert für $n \to \infty$. In (d) sei $n \geq 2$.

**Lösungsvorschlag zu Aufgabe 18**

(a) Wir betrachten zunächst die Teile der Folgenglieder, über die wir etwas aussagen können, getrennt. Da

$$\left|\frac{1-i}{2}\right| = \frac{|1-i|}{|2|} = \frac{\sqrt{1^2+(-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

gilt, folgern wir mit Aufgabe 21 (c)

$$\left(\frac{1-i}{2}\right)^n \to 0, \ (n \to \infty).$$

Weiter erhalten wir mit Hilfe der Grenzwertsätze

$$\begin{aligned}\frac{3n^2+2i}{(2n+1)^2} = \frac{3n^2+2i}{4n^2+4n+1} &= \frac{n^2(3+2n^{-2}i)}{n^2(4+4n^{-1}+n^{-2})} \\ &= \frac{3+2n^{-2}i}{4+4n^{-1}+n^{-2}} \longrightarrow \frac{3+0}{4+0+0} = \frac{3}{4}, \ (n\to\infty).\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Grenzwertsätze können wir jetzt den Grenzwert der Folge $(a_n)$ bestimmen: Es gilt

$$a_n = \left(1 + \left(\frac{1-i}{2}\right)^n\right) \cdot \left(2 - \frac{3n^2+2i}{(2n+1)^2}\right) \longrightarrow (1+0)\cdot\left(2-\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4} \quad (n\to\infty).$$

(b) Die Summanden in der Definition der Glieder von $(b_n)$ bilden keine konvergente Folgen. Deshalb können wir die Grenzwertsätze nicht direkt anwenden. Wir fassen deshalb zunächst die Summanden zu einem Bruch zusammen und erhalten

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{n^4-2i}{n^2+4} + \frac{n^3(3-n^2)}{n^3+1} = \frac{(n^4-2i)(n^3+1)+n^3(3-n^2)(n^2+4)}{(n^3+1)(n^2+4)} \\ &= \frac{n^7+n^4-2n^3i-2i+3n^5+12n^3-n^7-4n^5}{n^5+n^2+4n^3+4} \\ &= \frac{-n^5+n^4+(12-2i)n^3-2i}{n^5+4n^3+n^2+4} = \frac{-1+\frac{1}{n}+\frac{12-2i}{n^2}-\frac{2i}{n^5}}{1+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{4}{n^5}} \to \frac{-1+0+0-0}{1+0+0+0} = -1, \ (n\to\infty).\end{aligned}$$

Dabei haben wir die höchste Potenz von $n$ des Nenners in Zähler und Nenner ausgeklammert, und dann die Grenzwertsätze angewendet.

(c) Zuerst führen wir dieselbe Transformation wie in der Übung durch:

$$c_n = \sqrt{n}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Nach Aufgabe 21 b) gilt $\sqrt{1+n^{-1}} \to \sqrt{1} = 1$ für $n\to\infty$. Aus den Grenzwertsätzen folgt nun

$$c_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad (n\to\infty).$$

(d) Diese Folge konvergiert nicht. Als erstes formen wir die Folgenglieder um. Es gilt

$$d_n = \frac{(-1)^n}{n^2}\binom{n}{n-2} = (-1)^n \frac{n!}{n^2(n-2)!2!} = (-1)^n \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{(-1)^n}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \qquad (1)$$

An dem Ausdruck auf der rechten Seite von (1) kann man erkennen, warum $(d_n)$ nicht konvergent sein kann; grob gesprochen könnte man sagen: „Da $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n}) \to \frac{1}{2}$ für $n \to \infty$ und $(-1)^n$ für gerade bzw. ungerade $n$ zwischen den Werten $-1$ und $+1$ springt, „häufen" sich die Folgenglieder mit geradem Index um $+\frac{1}{2}$ und die mit ungeradem Index um $-\frac{1}{2}$; da sich konvergente Folgen nur um einen Wert „häufen" können, nämlich um ihren Grenzwert, kann nicht $(d_n)$ konvergent sein."

Nach dem derzeitigen Stand der Vorlesung ist dies allerdings noch *kein* zulässiger Beweis, da mathematisch nicht präzise definierte Begriffe verwendet werden! (Was heißt „sich häufen" genau?)

Wir wollen deshalb einen Widerspruchsbeweis führen. Dazu fällt uns auf, dass die Folge $(d_n)$ (hinsichtlich des hin und her springenden Charakters) der Folge $((-1)^n)$ ähnelt, von der wir aus der Vorlesung *wissen*, dass sie nicht konvergiert. Um einen Widerspruch zu erzeugen, wollen wir daher aus der Konvergenz von $(d_n)$ die Konvergenz von $((-1)^n)$ folgern:

Angenommen, die Folge wäre konvergent gegen ein $d \in \mathbb{C}$. Aus (1) sehen wir aber

$$(-1)^n = 2d_n + \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach den Grenzwertsätzen müsste dann also $(-1)^n \to 2d + 0 = 2d$ für $n \to \infty$ gelten, im Widerspruch dazu, dass $((-1)^n)$ divergent ist. Also muss unsere Annahme falsch gewesen sein und $(d_n)$ ist divergent.

### Aufgabe 19 (Beschränktheit, Konvergenz, Approximation des Supremums)

(a) Beweisen Sie die folgende Bemerkung aus der Vorlesung: Für eine nichtleere Teilmenge $A$ von $\mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) $A$ ist beschränkt im Sinne von Definition 3.4.

(ii) Es existiert ein $r > 0$, sodass $|z| \leq r$ für alle $z \in A$ gilt.

(b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch die „verschobene" Folge $(a_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(c) Es sei nun $A$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ gibt, die gegen $\sup A$ konvergiert.

### Lösungsvorschlag zu Aufgabe 19

(a) Es sei $A \subseteq \mathbb{C}$ nichtleer.

„(i)$\Longrightarrow$(ii)": Es sei $A$ beschränkt gemäß Definition 3.4. Dann existiert ein $M > 0$ mit $|z - w| \leq M$ für alle $z, w \in A$. Da $M$ nichtleer ist, existiert ein $z_0 \in A$. Wir setzen $r := |z_0| + M > 0$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgern wir dann

$$|z| = |z_0 + (z - z_0)| \leq |z_0| + |z - z_0| \leq |z_0| + M = r \quad \text{für alle } z \in A,$$

was (ii) zeigt.

„(i)$\Longleftarrow$(ii)": Es existiere nun $r > 0$ mit $|z| \leq r$ für alle $z \in A$. Wir setzen $M := 2r > 0$. Dann folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|z - w| \leq |z| + |w| \leq r + r = 2r = M \quad \text{für alle } z, w \in A,$$

was (i) zeigt.

(b) *Voraussetzung:* Die Folge $(a_n)$ sei konvergent und es sei $k \in \mathbb{N}$.
*Behauptung:* Dann konvergiert auch die Folge $(a_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$.

*Beweis.* Es seien $(a_n)$ konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$. Ferner sei $\varepsilon > 0$. Da $(a_n)$ gegen $a$ für $n \to \infty$ gegen $a$ konvergiert, gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| \le \varepsilon \quad \text{für alle } n \ge N.$$

Da aber $n + k > n \ge N$ für alle $n \ge N$ gilt, folgt insbesondere

$$|a_{n+k} - a| \le \varepsilon \quad \text{für alle } n \ge N.$$

Letzteres impliziert, dass $(a_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit Grenzwert $a$. □

(c) *Voraussetzung:* Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt.
*Behauptung:* Dann existiert eine reelle Folge $(a_n)$, die für $n \to \infty$ gegen $\sup A$ konvergiert.

*Beweis.* Da $A$ nach Voraussetzung nichtleer und nach oben beschränkt ist, ist nach der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ die reelle Zahl $a := \sup A$ wohldefiniert. Nach der Charakterisierung (SUP') aus der 3.Übung (mit $\varepsilon := \frac{1}{n}$) existiert dann zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Element $a_n \in A$ mit

$$a - \frac{1}{n} < a_n \le a, \quad \text{also } |a_n - a| < \frac{1}{n}.$$

Die Folge $(a_n) \subseteq A$ konvergiert dann gegen $a$: Denn für gegebenes $\varepsilon > 0$ existiert dann nach dem Satz von Archimedes ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \ge \frac{1}{\varepsilon}$, d.h., $\frac{1}{N} \le \varepsilon$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge N$ folgt dann

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} \le \frac{1}{N} \le \varepsilon.$$

Dies zeigt, dass $(a_n)$ für $n \to \infty$ gegen $a$ konvergiert. □

## Aufgabe 20 (K) (Konvergenz)

Seien $(a_n)$, $(b_n)$ Folgen. Zeigen Sie:

(a) Ist $(a_n)$ eine Nullfolge und $(b_n)$ eine beschränkte Folge, dann konvergiert auch $(a_n b_n)$.

(b) Gelten $a_n \ge 0$, $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n b_n^{-1} \to 1$ für $n \to \infty$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{2} b_n \le a_n \le \frac{3}{2} b_n$ für alle $n \ge N$.

## Lösungsvorschlag zu Aufgabe 20

(a) **Behauptung**: Seien $(a_n)$ eine Nullfolge und $(b_n)$ eine beschränkte Folge. Dann ist auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

**Beweis**: Seien $(a_n)$ eine Nullfolge und $(b_n)$ eine beschränkte Folge. Wir müssen zeigen, dass $(a_n b_n)$ eine Nullfolge ist, d.h., zu gegebenem Abstand $\varepsilon > 0$ müssen wir einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ finden, sodass

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| \le \varepsilon \qquad \text{für alle } n \ge N_\varepsilon. \tag{2}$$

Dies wollen wir nun zeigen. Sei also $\varepsilon > 0$. Da nach Voraussetzung $(b_n)$ beschränkt ist, existiert ein $r > 0$, sodass

$$|b_n| \le r \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Nun können wir die Konvergenz von $(a_n)$ gegen Null ausnutzen: Nach Definition der Konvergenz finden wir dann zu $\varepsilon_0 := \frac{\varepsilon}{r} > 0$ ein $N_{\varepsilon_0} \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n| = |a_n - 0| \leq \varepsilon_0 \qquad \text{für alle } n \geq N_{\varepsilon_0}. \tag{4}$$

Wir setzen nun $N_\varepsilon := N_{\varepsilon_0}$. Dann erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_\varepsilon$

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n||b_n| \overset{(3)}{\leq} |a_n| r \overset{(4)}{\leq} \varepsilon_0 r = \frac{\varepsilon}{r} r = \varepsilon,$$

was genau (2) ist. Also ist $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.
Die Behauptung gilt *nicht*, falls $(a_n)$ gegen einen anderen Wert als 0 konvergiert. Dazu setzen wir $a_n := 1$ und $b_n := (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)$ als konstante Folge konvergent (mit Grenzwert 1) und $(b_n)$ wegen $|b_n| = |(-1)^n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt, aber $(a_n b_n) = (b_n)$ ist nach der Vorlesung divergent.

(b) **Behauptung**: Seien $(a_n)$, $(b_n)$ Folgen mit $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n b_n^{-1} \to 1$ für $n \to \infty$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2} b_n$ für alle $n \geq N$.
**Beweis**: Seien $(a_n)$, $(b_n)$ Folgen mit $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n b_n^{-1} \to 1$ für $n \to \infty$. Setzen wir $\varepsilon := \frac{1}{2}$ in der Definition der Konvergenz, sehen wir, dass es ein $N := N_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_n b_n^{-1} - 1| \leq \frac{1}{2} \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Obige Ungleichung ist äquivalent zu $\frac{1}{2} \leq a_n b_n^{-1} \leq \frac{3}{2}$. In der Tat, nach Satz 2.6 (iv) gilt

$$\begin{aligned} |a_n b_n^{-1} - 1| \leq \frac{1}{2} &\overset{2.6\text{ (iv)}}{\iff} -\frac{1}{2} \leq a_n b_n^{-1} - 1 \leq \frac{1}{2} \\ &\underset{\pm 1}{\overset{(\mathrm{O}+)}{\iff}} \frac{1}{2} < a_n b_n^{-1} \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Da $b_n > 0$ gilt, erhalten wir nach Multiplikation mit $b_n$ wie gewünscht

$$\frac{1}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2} b_n \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

## Aufgabe 21 (Übung)

*Diese Aufgabe wird u.a. in der Übung vorgerechnet.*

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(\sqrt[n]{n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert.

(b) Sei $(a_n)$ eine konvergente Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $a \geq 0$ ihr Grenzwert. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(\sqrt{a_n})$ konvergiert.

(c) Sei $z \in \mathbb{C}$. Untersuchen Sie die Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz.
*Hinweis: Beweisen Sie zunächst die Bernoulli-Ungleichung: Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ gilt $(1+a)^n \geq 1+na$. Wenden Sie diese Ungleichung im Fall $|z| > 1$ mit $a := |z|-1$ an.*