Analysis I

6. Übungsblatt

Abgabe bis 03.12.2021, 12:00 Uhr

Aufgabe 22 (Sandwichkriterium, Monotoniekriterium)

(a) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$.

(b) Sei $a > 0$ und (a_n) definiert durch $a_n := \frac{a^n}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.
Hinweis: Finden Sie $c > 0$, $q \in (0,1)$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a_n \leq cq^n$ für alle $n \geq N$.

(c) Sei (a_n) rekursiv definiert durch $a_{n+1} := \frac{3+5a_n}{20}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1 := 1$. Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 23 (K) (Rekursiv definierte Folgen)

(a) Es sei (a_n) definiert durch

$$a_1 = 1, \;\; a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert von (a_n).

(b) Bestimmen Sie die Anfangswerte $b_1 \in [0, \infty)$, für welche die durch

$$b_{n+1} = 1 + \frac{b_n^2}{4} \quad (n \in \mathbb{N})$$

rekursiv definierte Folge (b_n) konvergiert. Berechnen Sie auch die jeweiligen Grenzwerte.

Aufgabe 24 (Häufungspunkte, Teilfolgen, Exponentialfolge)

(a) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folge (a_n), wobei

$$a_n := (1 + \sqrt[n]{e}) \left(\frac{1}{2}\right)^{1+(-1)^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(b) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{k}{n})^n = e^k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Aufgabe 25 (K) (Sandwichkriterium, Teilfolgen)

(a) Es seien $k \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Folge (a_n) durch

$$a_n := \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^n\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|x_1|^n + |x_2|^n + \cdots + |x_k|^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass (a_n) gegen $a := \max\{|x_j| \colon 1 \leq j \leq k\}$ konvergiert.

(b) Sei (a_n) eine Folge. Zeigen Sie: Die Folge (a_n) konvergiert genau dann, wenn jede der Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
Gilt die Aussage auch, wenn nur die Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, aber nicht $(a_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ als konvergent angenommen werden?

Aufgabe 26 (Cesàro-Mittel)

Sei (a_n) eine Folge. Dann definieren wir die Folge der *Cesàro-Mittel* (c_n) durch

$$c_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Das Folgenglied c_n ist also das arithmetische Mittel von $a_1, \dots, a_n$.

(a) Zeigen Sie: Konvergiert (a_n) gegen ein $a \in \mathbb{C}$, dann konvergiert auch (c_n) gegen a.

(b) Geben Sie eine divergente Folge (a_n) an, deren Folge von Cesàro-Mitteln konvergiert. Beweisen Sie die Konvergenz.

Anmeldung für den Übungsschein

Die Anmeldung für den Übungsschein ist jetzt freigeschaltet. Sie haben **bis zum 13.02.2022, 23:59 Uhr,** Zeit, sich im Campus Management System für den Übungsschein anzumelden. Das Campus Management System ist abrufbar unter

`https://campus.studium.kit.edu/`.

Damit wir Ihnen (bei Erfüllen der Kriterien) den Übungsschein später verbuchen können, ist es zwingend erforderlich, dass Sie sich vorher für den Übungsschein angemeldet haben.