Analysis I

7. Übungsblatt

Abgabe bis 10.12.2021, 12:00 Uhr

Aufgabe 27 (Cauchyfolgen, Bolzano-Weierstraß, Limes superior, Limes inferior)

(a) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen oder widerlegen Sie.

(i) Eine Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

(ii) (a_n) ist eine Cauchyfolge, falls $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(iii) Jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = 2^n(1 + (-1)^n) + 1$. Man bestimme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n, \quad \liminf_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n), \quad \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Aufgabe 28 (K) (Cauchyfolgen)

Sei (a_n) rekursiv definiert durch $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1 = 2$.

(a) Zeigen Sie $\frac{3}{2} \le a_n \le 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist.

(c) Begründen Sie, dass (a_n) konvergiert, und bestimmen sie den Grenzwert von (a_n).

Hinweis zu (b): Beachten Sie Aufgabe 31 (a)(iii).

Aufgabe 29 (Eigenschaften des Limes superior und Limes inferior)

(a) Es sei (a_n) eine beschränkte reelle Folge. Wir setzen $\alpha := \liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\beta := \limsup_{n\to\infty} a_n$. Zeigen Sie die folgende Bemerkung aus der Vorlesung: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass

$$\alpha - \varepsilon \le a_n \le \beta + \varepsilon \quad \text{für alle } n \ge N_\varepsilon.$$

(b) Es seien $(a_n), (b_n)$ beschränkte reelle Folgen.

(i) Es existiere ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \le b_n$ für alle $n \ge N$. Zeigen Sie

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

(ii) Zeigen Sie

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \ge \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

Zeigen Sie auch, dass in den obigen Ungleichungen Gleichheit gilt, falls (a_n) oder (b_n) konvergent ist.

Aufgabe 30 (K) (Limes superior, Limes inferior)

(a) Es sei $(a_n) \subseteq (0, \infty)$ eine Folge, sodass $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit Grenzwert $a > 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit Grenzwert a.

(b) Folgern Sie aus (a), dass die Folge $\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Hinweis zu (a): Zeigen Sie zunächst: Aus $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a > 0$ $(n \to \infty)$ folgt, dass für jedes $\varepsilon \in (0, a)$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ und $c, d > 0$ existieren mit

$$(a - \varepsilon)\sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq (a + \varepsilon)\sqrt[n]{d} \quad \textit{für alle } n \geq N_\varepsilon.$$

Nutzen Sie dann Aufgabe 29 (b)(i) und Korollar 3.27.

Aufgabe 31 (Cauchyfolgen, Banachscher Fixpunktsatz (einfache Version))

Diese Aufgabe wird u.a. in der Übung diskutiert.

(a) Sei (a_n) eine Folge mit $|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|$ für ein $q \in [0, 1)$ und alle $n \geq 2$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

  (i) $|a_{k+1} - a_k| \leq q^{k-1}|a_2 - a_1|$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

  (ii) $|a_n - a_m| \leq \frac{q^{m-1}}{1-q}|a_2 - a_1|$ für alle $n \geq m \geq 1$.

  (iii) Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist.

  Hinweis zu (ii): Schreiben Sie $a_n - a_m = \sum_{k=0}^{n-1-m}(a_{m+1+k} - a_{m+k})$, nutzen Sie (i) und anschließend die geometrische Summenformel.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *Kontraktion*, d.h., es existiere ein $q \in [0, 1)$ mit

$$|f(y) - f(z)| \leq q\,|y - z| \quad \text{für alle } y, z \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die durch

$$a_1 \coloneqq x, \quad a_{n+1} \coloneqq f(a_n) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

rekursiv definierte Folge (a_n) gegen einen Fixpunkt von f, d.h., gegen ein $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = a$.