Analysis I

Lösungsvorschlag zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 27 (Cauchyfolgen, Bolzano-Weierstraß, Limes superior, Limes inferior)

(a) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen oder widerlegen Sie.

(i) Eine Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

(ii) (a_n) ist eine Cauchyfolge, falls $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(iii) Jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = 2^n(1 + (-1)^n) + 1$. Man bestimme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n, \quad \liminf_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n), \quad \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 27

(a) (i) Die Aussage ist wahr und folgt aus der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$.

(ii) Die Aussage ist falsch. Man betrachte beispielsweise $(a_n) = (\sqrt{n})$. Dann ist nach Beispiel 5.12 der Übung die Folge $(a_{n+1}-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Aber (a_n) ist unbeschränkt und damit insbesondere divergent. Da Cauchyfolgen in $\mathbb{C}$ konvergieren, kann also (a_n) keine Cauchyfolge sein.

(iii) Die Aussage ist falsch. Man betrachte z.B. die Folge $(a_n) = (n)$. Dann ist jede Teilfolge von (a_n) unbeschränkt und damit insbesondere divergent.

Bemerkung: Der wichtige *Satz von Bolzano-Weierstraß* sagt, dass jede *beschränkte* Folge eine konvergente Teiilfolge besitzt.

(b) (i) Bestimmung von $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$: Es ist

$$a_n = \begin{cases} 2^{n+1} + 1 & \text{für gerades } n, \\ 1 & \text{für ungerades } n. \end{cases} \tag{1}$$

Da $2^{n+1} + 1 \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgern wir $c_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 1.$$

(ii) Bestimmung von $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$: Aus (1) folgt, dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}+1} & \text{für gerades } n, \\ 2^{n+2} + 1 & \text{für ungerades } n. \end{cases}$$

Da $2^{n+2} + 1 \geq \frac{1}{2^{n+1}+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{1}{2^{n+1}+1} \to 0$ für $n \to \infty$ gilt, folgt

$$c_n := \inf\left\{\frac{a_{k+1}}{a_k} \mid k \geq n\right\} = 0$$

Damit ist $(c_n) = (0)$ konstant und wir folgern $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

(iii) Bestimmung von $\liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$: Wir zeigen zunächst, dass die Teilfolgen $(\sqrt[2k]{a_{2k}})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\sqrt[2k-1]{a_{2k-1}})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent sind. Es gilt

$$2 = \sqrt[n]{2^n} \leq \sqrt[n]{2^{n+1}+1} \leq \sqrt[n]{2^{n+1}+2^{n+1}} = 2\sqrt[n]{4} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4} = 1$ gilt (s. das Beispiel auf S. 30 des Vorlesungsskriptes), folgern wir aus der obigen Ungleichung und dem Sandwichkriterium, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n+1}+1} = 2$ ist. Nach (1) ist $(\sqrt[2k]{a_{2k}})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(\sqrt[n]{2^{n+1}+1})$, also gilt auch $\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{a_{2k}} = 2$ nach Lemma 3.15 des Vorlesungsskriptes. Weiterhin folgt unmittelbar aus (1), dass $(\sqrt[2k-1]{a_{2k-1}})_{k\in\mathbb{N}} = (1)_{k\in\mathbb{N}}$ und damit $\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{a_{2k-1}} = 1$ gilt. Somit sind die Teilfolgen $(\sqrt[2k]{a_{2k}})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\sqrt[2k-1]{a_{2k-1}})_{k\in\mathbb{N}}$ tatsächlich konvergent und ihre Grenzwerte 1 und 2 sind nach Satz 3.17 Häufungspunkte von $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Nach Lemma 6.17 der Übung gilt $H((\sqrt[n]{a_n})) = \{1, 2\}$. Da der Limes superior der größte Häufungspunkt und der Limes inferior der kleinste Häufungspunkt einer Folge sind, folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \text{ und } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2.$$

Aufgabe 28 (K) (Cauchyfolgen)

Sei (a_n) rekursiv definiert durch $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1 = 2$.

(a) Zeigen Sie $\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist.

(c) Begründen Sie, dass (a_n) konvergiert, und bestimmen sie den Grenzwert von (a_n).

Hinweis zu (b): Beachten Sie Aufgabe 31 (a)(iii).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 28

(a) *Behauptung*: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion

Induktionsanfang: Es ist $\frac{3}{2} \leq a_1 = 2$.

Induktionsvoraussetzung: Es sei $\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV).

Induktionsschritt: Unter der (IV) gilt einerseits

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \overset{\text{(IV)}}{\leq} 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} \leq 2,$$

und andererseits

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \overset{\text{(IV)}}{\geq} 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Insgesamt gilt also $\frac{3}{2} \leq a_{n+1} \leq 2$ und der Induktionsschluss ist vollzogen.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist $\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

(b) Nach Aufgabenteil (a) ist $a_n \geq \frac{3}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit erhalten wir für alle $n \geq 2$

$$\begin{aligned}|a_{n+1} - a_n| &= \left|\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}}\right)\right| \\ &= \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}\right| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{a_n a_{n-1}} \leq \frac{|a_n - a_{n-1}|}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} \leq \frac{4}{9}|a_n - a_{n-1}|.\end{aligned}$$

Mit $q := \frac{4}{9} \in (0,1)$ folgern wir aus Aufgabe 31 (a)(iii), dass (a_n) eine Cauchyfolge ist.

(c) Da nach Aufgabenteil (a) die Folge (a_n) eine Cauchyfolge ist, folgt aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, dass (a_n) konvergent ist. Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ ihr Grenzwert. Wie im letzten Übungsblatt folgert man dann mit Aufgabe 19 (b) und Sätzen 3.6, 3.8, dass

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{a}$$

(man beachte hierbei, dass $a \neq 0$, also $1/a$ wohldefiniert ist, denn wegen $a_n \geq \frac{3}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt auch $a \geq \frac{3}{2}$ nach Satz 3.10). Multiplikation mit a liefert die Gleichung $a^2 = a + 1$. Wir erhalten die Äquivalenzen

$$a^2 = a + 1 \iff 0 = a^2 - a - 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \iff a = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Da $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4}}{2} = -\frac{1}{2}$ und $a \geq \frac{3}{2}$ gilt, muss $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ sein.

Bemerkung: Der Grenzwert $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$ ist der Goldene Schnitt.

Aufgabe 29 (Eigenschaften des Limes superior und Limes inferior)

(a) Es sei (a_n) eine beschränkte reelle Folge. Wir setzen $\alpha := \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\beta := \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Zeigen Sie die folgende Bemerkung aus der Vorlesung: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass

$$\alpha - \varepsilon \leq a_n \leq \beta + \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon.$$

(b) Es seien $(a_n), (b_n)$ beschränkte reelle Folgen.

(i) Es existiere ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq N$. Zeigen Sie

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

(ii) Zeigen Sie

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

Zeigen Sie auch, dass in den obigen Ungleichungen Gleichheit gilt, falls (a_n) oder (b_n) konvergent ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 29

(a) Es seien (a_n) eine beschränkte reelle Folge und $\alpha := \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\beta := \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Sei ferner $\varepsilon > 0$. Definieren wir $b_n := \inf\{a_k : k \geq n\}$ und $c_n := \sup\{a_k : k \geq n\}$ für $n \in \mathbb{N}$, so gilt definitionsgemäß $b_n \to \alpha$ und $c_n \to \beta$ für $n \to \infty$. Also gibt es Indices $N_{1,\varepsilon}$, $N_{2,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ mit

$$|\alpha - b_n| \leq \varepsilon, \text{ also } \alpha - \varepsilon \leq b_n \quad \text{für alle } n \geq N_{1,\varepsilon},$$

$$|\beta - c_n| \leq \varepsilon, \text{ also } \beta + \varepsilon \geq c_n \quad \text{für alle } n \geq N_{2,\varepsilon}.$$

Wir setzen $N_\varepsilon := \max\{N_{1,\varepsilon}, N_{2,\varepsilon}\} \in \mathbb{N}$. Aus der Definition der Folgen (b_n) und (c_n) folgt dann $b_{N_\varepsilon} \leq a_k \leq c_{N_\varepsilon}$ für alle $k \geq N_\varepsilon$ gilt, sodass wir aus den obigen abgsetzten Ungleichungen wie gewünscht

$$\begin{aligned} \alpha - \varepsilon \leq b_{N_\varepsilon} \leq a_k \leq & c_{N_\varepsilon} \leq \beta + \varepsilon \quad && \text{für alle } k \geq N_\varepsilon, \text{d.h.} \\ \alpha - \varepsilon \leq a_k \leq & \beta + \varepsilon && \text{für alle } k \geq N_\varepsilon \end{aligned}$$

erhalten.

(b) Für eine beschränkte Folge (x_n) führen wir abkürzende Schreibweisen für die Suprema bzw. Infima der Folgenreste ein: Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $\sup_{k\geq n} x_k := \sup\{x_k : k \geq n\}$ und $\inf_{k\geq n} x_k := \{x_k : k \geq n\}$. Nach Vorlesung gilt dann

$$\liminf_{n\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k.$$

Es seien nun (a_n) und (b_n) beschränkte reelle Folgen. Wir beweisen nur die Aussagen bzgl. des Limes superior. Die Aussagen bzgl. des Limes inferior beweist man analog, oder führt man folgendermaßen auf die bereits bewiesenen Aussagen für den Limes superior zurück: Nach Proposition 3.10 der Übung gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\inf_{k\geq n} x_k = -\sup_{k\geq n}(-x_k)$$

und damit

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -\limsup_{n\to\infty}(-x_n).$$

Mit Hilfe obiger Identität lassen sich alle Aussagen für den Limes inferior auf die entsprechenden Aussagen für den Limes superior zurückführen (wie genau?).

(i) Angenommen, es existiere ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq N$. Für jedes feste $n \geq N$ ist dann $\sup_{k\geq n} b_k$ eine obere Schranke von $\{a_k : k \geq n\}$, denn es gilt

$$a_k \leq b_k \leq \sup_{k\geq n} b_k \quad \text{für alle } k \geq n.$$

Da aber $\sup_{k\geq n} a_k$ definitionsgemäß die kleinste obere Schranke von $\{a_k : k \geq n\}$ ist, schließen wir $\sup_{k\geq n} a_k \leq \sup_{k\geq n} b_k$. Da $n \geq N$ beliebig gewählt war, folgern wir schließlich

$$\sup_{k\geq n} a_k \leq \sup_{k\geq n} b_k \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Hieraus folgt wiederum aus Satz 3.10 (angewendet auf die Folgen $\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)_n$ und $\left(\sup_{k\geq} b_k\right)_n$), dass

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} b_k = \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $k \geq n$ gilt dann $a_k + b_k \leq \sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k$. Also ist $\sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k$ eine obere Schranke von $\{a_k + b_k \colon k \geq n\}$. Aus der Definition des Supremums folgt hieraus $\sup_{k\geq n}(a_k + b_k) \leq \sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k$. Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt war, erhalten wir

$$\sup_{k\geq n}(a_k + b_k) \leq \sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Hieraus folgt mit Satz 3.10 und Satz 3.6

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}(a_k + b_k) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} b_k = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass tatsächlich Gleichheit gilt, falls (a_n) oder (b_n) konvergent ist. Angenommen, (a_n) oder (b_n) ist konvergent. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass (a_n) konvergiert (anderenfalls vertauschen wir die Rollen von (a_n) und (b_n) im folgenden Beweis). Sei a der Grenzwert von (a_n). Da $b \coloneqq \limsup b_n$ ein Häufungspunkt von (b_n) ist, existiert nach Satz 3.17 eine Teilfolge $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (b_{n_k}) mit $b_n \to b$ für $k \to \infty$. Aus Lemma 3.15 folgt auch $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$. Aus Satz 3.6 folgern wir nun $a_{n_k} + b_{n_k} \to a + b$ für $k \to \infty$. Nach 3.17 bedeutet dies wiederum, dass $a + b$ ein Häufungspunkt von $(a_n + b_n)$ ist. Da aber $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ der größte Häufungspunkt der Folge $(a_n + b_n)$ ist, schließen wir

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n,$$

wobei wir für die letzte Gleichheit Korollar 3.27 ausgenutzt haben (im Falle der Konvergenz stimmen Grenzwert und Limes Superior überein). Zusammen mit der vorher gezeigten Ungleichung folgt insgesamt

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Aufgabe 30 (K) (Limes superior, Limes inferior)

(a) Es sei $(a_n) \subseteq (0, \infty)$ eine Folge, sodass $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit Grenzwert $a > 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit Grenzwert a.

(b) Folgern Sie aus (a), dass die Folge $\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Hinweis zu (a): Zeigen Sie zunächst: Aus $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a > 0$ $(n \to \infty)$ folgt, dass für jedes $\varepsilon \in (0, a)$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ und $c, d > 0$ existieren mit

$$(a - \varepsilon)\sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq (a + \varepsilon)\sqrt[n]{d} \quad \textit{für alle } n \geq N_\varepsilon.$$

Nutzen Sie dann Aufgabe 29 (b)(i) und Korollar 3.27.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 30

(a) Es sei $(a_n) \subseteq (0, \infty)$ eine Folge, sodass $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit Grenzwert $a > 0$. Sei ferner $\varepsilon \in (0, a)$ beliebig. Da $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a$ für $n \to \infty$ gilt, existiert ein Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$a - \varepsilon \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq a + \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon.$$

Für jedes $n \geq N_\varepsilon$ können wir a_n als Teleskopprodukt schreiben:

$$a_n = \left(\prod_{k=0}^{n-N_\varepsilon-1} \frac{a_{n-k}}{a_{n-k-1}} \right) a_{N_\varepsilon} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N_\varepsilon+1}}{a_{N\varepsilon}} \cdot a_{N_\varepsilon},$$

sodass wir aus der obigen Ungleichung

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N_\varepsilon+1}}{a_{N\varepsilon}} \cdot a_{N_\varepsilon} \leq (a+\varepsilon)^{n-N_\varepsilon} a_{N_\varepsilon} \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon$$

und genauso

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N_\varepsilon+1}}{a_{N\varepsilon}} \cdot a_{N_\varepsilon} \geq (a-\varepsilon)^{n-N_\varepsilon} a_{N_\varepsilon} \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon$$

folgern. Setzen wir $c := (a-\varepsilon)^{-N_\varepsilon} a_{N_\varepsilon} > 0$ und $d := (a+\varepsilon)^{-N_\varepsilon} a_{N_\varepsilon} > 0$, so erhalten wir aus Obigem

$$(a-\varepsilon)^n c \leq a_n \leq (a+\varepsilon)^n d \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon,$$

sodass wir durch Ziehen der n-ten Wurzel schließlich

$$(a-\varepsilon) \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq (a+\varepsilon)^n \sqrt[n]{d} \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon$$

erhalten. Dies zeigt, dass $(\sqrt[n]{a_n})_{n \geq N_\varepsilon}$ und damit auch $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Somit sind $\alpha := \liminf \sqrt[n]{a_n}$ und $\beta := \limsup \sqrt[n]{a_n}$ wohldefiniert. Dann gilt offenbar $\alpha \leq \beta$, und wir werden zeigen, dass tatsächlich $\alpha = \beta$ gilt. Aus Korollar 3.27 folgt dann die Konvergenz von $(\sqrt[n]{a_n})$.
Da nach Vorlesung $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{d} = 1$ gilt, folgern wir aus der obigen Ungleichung und Aufgabe 29 (b) (i)

$$\beta = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} (a+\varepsilon) \sqrt[n]{d} = \lim_{n\to\infty} (a+\varepsilon) \sqrt[n]{d} = a + \varepsilon,$$

und

$$(a-\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} (a-\varepsilon) \sqrt[n]{c} = \liminf_{n\to\infty} (a-\varepsilon) \sqrt[n]{c} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha,$$

wobei wir $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c}$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{d} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{d}$ ausgenutzt haben (s. Korollar 3.27). Wir erhalten daher

$$a - \varepsilon \leq \alpha \leq \beta \leq a + \varepsilon,$$

Da $\varepsilon \in (0, a)$ beliebig gewählt war, erhalten wir schließlich

$$a - \varepsilon \leq \alpha \leq \beta \leq a + \varepsilon \quad \text{für alle } \varepsilon \in (0, a).$$

Hieraus folgt, dass $\alpha = \beta = a$ gilt, denn da obige Ungleichungskette für alle $\varepsilon \in (0, a)$ gilt, gilt sie insbesondere für $\varepsilon_k := \frac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $k > \frac{1}{a}$. Dies liefert

$$a - \frac{1}{k} \leq \alpha \leq \beta \leq a + \frac{1}{k} \quad \text{für alle } k \geq \frac{1}{a}.$$

Führen wir den Grenzübergang $k \to \infty$ durch, folgt mit Satz 3.10

$$a \leq \alpha \leq \beta \leq a,$$

In der obigen Ungleichungskette muss also Gleichheit gelten (denn links und rechts der Ungleichungskette steht dieselbe Zahl a). Also ist $\alpha = \beta = a$ und aus Korollar 3.27 folgt nun $\sqrt[n]{a_n} \to a$ für $n \to \infty$.

(b) Wir setzen $a_n := \frac{n^n}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \Bigg/ \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \quad (n \to \infty).$$

Aus Aufgabenteil (a) folgt nun

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow e \quad (n \to \infty).$$

Aufgabe 31 (Cauchyfolgen, Banachscher Fixpunktsatz (einfache Version))

Diese Aufgabe wird u.a. in der Übung diskutiert.

(a) Sei (a_n) eine Folge mit $|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|$ für ein $q \in [0, 1)$ und alle $n \geq 2$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $|a_{k+1} - a_k| \leq q^{k-1}|a_2 - a_1|$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(ii) $|a_n - a_m| \leq \frac{q^{m-1}}{1-q}|a_2 - a_1|$ für alle $n \geq m \geq 1$.

(iii) Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist.

Hinweis zu (ii): Schreiben Sie $a_n - a_m = \sum_{k=0}^{n-1-m}(a_{m+1+k} - a_{m+k})$, *nutzen Sie (i) und anschließend die geometrische Summenformel.*

(b) Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *Kontraktion*, d.h., es existiere ein $q \in [0, 1)$ mit

$$|f(y) - f(z)| \leq q\,|y - z| \quad \text{für alle } y, z \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die durch

$$a_1 := x, \quad a_{n+1} := f(a_n) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

rekursiv definierte Folge (a_n) gegen einen Fixpunkt von f, d.h., gegen ein $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = a$.