Institut für Analysis
Prof. Dr. Dorothee Frey
Yonas Mesfun, M.Sc.

WS 21/22
10.12.2021

Analysis I

8. Übungsblatt

Abgabe bis 17.12.2021, 12:00 Uhr

Aufgabe 32 (Bestimmung von Reihenwerten, Konvergenz von Reihen I)

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n\geq 3} \frac{2n+6}{n(n+1)(n+2)}$$

konvergiert, indem Sie eine explizite Darstellung der N-ten Partialsumme ($N \geq 3$) finden. Bestimmen Sie auch den Reihenwert.

Hinweis: Finden Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ *mit* $\frac{2n+6}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(b) Man entscheide, ob die folgenden Reihen absolut konvergieren, konvergieren oder divergieren.

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{4^n(1+2n)^n(1-n)^n}{(3+n)^{2n}\,2^n}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2n+5}{n^3+\frac{3}{2}n^2+7}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{(5n)!}$,

(iv) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n+4}{2n^2-3n+3}$.

Aufgabe 33 (K) (Konvergenz von Reihen II)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Untersuchen Sie auch, ob im Fall der Konvergenz sogar absolute Konvergenz vorliegt.

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2+\sqrt{n^4+1}}$,

(iv) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2}$,

(v) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n^2} \binom{n+2}{n}$,

(vi) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$.

Aufgabe 34 (Cauchysches Verdichtungskriterium, Allgemeine harmonische Reihe)

(a) Es seien $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und (a_k) fallend.

(i) Zeigen Sie

$$2^k a_{2^{k+1}} \leq a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}-1} \leq 2^k a_{2^k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

(ii) Folgern Sie aus (i) und dem Majorantenkriterium die folgende Äquivalenz:

$$\sum_{k\geq 1} a_k \text{ konvergiert} \iff \sum_{k\geq 0} 2^k a_{2^k} \text{ konvergiert.}$$

(b) Es sei $s \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (a) folgende Äquivalenz:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \text{ konvergiert } \iff s > 1.$$

Aufgabe 35 (K) (Absolute Konvergenz, Konvergenz)

Es sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Folge. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Konvergiert die Reihe $\sum_k a_k$ absolut, dann gilt

$$\inf\{k|a_k| \mid k \in \mathbb{N}, k \geq n\} = 0 \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Ist nun $(a_k)_{k\geq 1}$ reell und $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\sum_{k\geq 1} a_k \text{ konvergiert } \iff \sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{1+a_k} \text{ konvergiert.}$$