Analysis I

Lösungsvorschlag zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 32 (Bestimmung von Reihenwerten, Konvergenz von Reihen I)

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n\geq 3} \frac{2n+6}{n(n+1)(n+2)}$$

konvergiert, indem Sie eine explizite Darstellung der N-ten Partialsumme ($N \geq 3$) finden. Bestimmen Sie auch den Reihenwert.

Hinweis: Finden Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ *mit* $\frac{2n+6}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(b) Man entscheide, ob die folgenden Reihen absolut konvergieren, konvergieren oder divergieren.

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{4^n(1+2n)^n(1-n)^n}{(3+n)^{2n}\,2^n}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2n+5}{n^3+\frac{3}{2}n^2+7}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{(5n)!}$, (iv) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n+4}{2n^2-3n+3}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 32

(a) Wir suchen $a, b, c \in \mathbb{R}$ wie im Hinweis angegeben. Soll

$$\frac{2n+6}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} = \frac{a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)}$$

gelten, dann müssen auch die Gleichungen

$$0n^2 = (a+b+c)n^2 \qquad 2n = (3a+2b+c)n \qquad 6 = 2a.$$

erfüllt sein (die Zähler müssen gleich sein). Das führt auf das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

für a, b, c. Die eindeutige Lösung dieses LGS ist $a = 3$, $b = -4$ und $c = 1$. Somit ist die N-te Partialsumme der Reihe gegeben durch

$$S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{2n+6}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=3}^{N}\Big(\frac{3}{n} - \frac{4}{n+1} + \frac{1}{n+2}\Big) = \sum_{n=3}^{N} \frac{3}{n} - \sum_{n=3}^{N} \frac{4}{n+1} + \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n+2}.$$

Nun führen wir Indexverschiebungen in den letzten beiden Summen durch und erhalten

$$S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{3}{n} - \sum_{n=4}^{N+1} \frac{4}{n} + \sum_{n=5}^{N+2} \frac{1}{n}$$

$$= \frac{3}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{4} - \frac{4}{N+1} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \sum_{n=5}^{N} \frac{3-4+1}{n}$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{N+1} + \frac{1}{N+2}\,.$$

Wir sehen, dass die Folge der Partialsummen $(S_N)_{N\geq 3}$ gegen $\frac{3}{4}$ konvergiert, da $\frac{3}{N+1}$ und $\frac{1}{N+2}$ gegen Null konvergieren für $N \to \infty$. Damit konvergiert die Reihe und der Reihenwert ist

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+6}{n(n+1)(n+2)} = \frac{3}{4}\,.$$

(b) (i) Die Reihe $\sum_{n\geq 0} \frac{4^n(1+2n)^n(1-n)^n}{(3+n)^{2n}\,2^n}$ divergiert. Das zeigen wir mit dem Wurzelkriterium. Sei $a_n = \frac{4^n(1+2n)^n(1-n)^n}{(3+n)^{2n}\,2^n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{4(1+2n)(n-1)}{(3+n)^2 2} = 2\frac{2n^2-n-1}{n^2+6n+9} \to 2\cdot 2 = 4,\ (n\to\infty).$$

Somit ist $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 4 > 1$. Das Wurzelkriterium liefert die Divergenz der Reihe.

(ii) Die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+5}{n^3+\frac{3}{2}n^2+7}$ konvergiert absolut. Das zeigen wir mit dem Majorantenkriterium. Sei $a_n = \frac{2n+5}{n^3+\frac{3}{2}n^2+7}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann „verhält sich (a_n) wie $\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ für $n \to \infty$“. Wir schätzen also nach oben ab: Für $n \geq 5$ haben wir

$$a_n = \frac{2n+5}{n^3+\frac{3}{2}n^2+7} \leq \frac{2n+n}{n^3} = \frac{3n}{n^3} = 3\frac{1}{n^2}.$$

Somit ist $\sum_{n\geq 5} 3\frac{1}{n^2}$ eine konvergente Majorante für $\sum_{n\geq 5} a_n$ (vgl. Vorlesung). Nach dem Majorantenkriterium konvergiert damit $\sum_{n\geq 5} a_n$ absolut und dasselbe folgt für $\sum_{n\geq 1} a_n$.

(iii) Die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{(5n)!}$ konvergiert absolut. Das zeigen wir mit dem Quotientenkriterium. Sei $a_n = \frac{n!}{(5n)!}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!}{(5n+5)!}\frac{(5n)!}{n!} = \frac{n+1}{5(n+1)(5n+4)\dots(5n+1)}$$
$$= \frac{1}{5^5n^5+\ldots+5!} \to 0,\ (n\to\infty).$$

Somit ist $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0 < 1$. Das Quotientenkriterium liefert die Konvergenz der Reihe.

(iv) Die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{n+4}{2n^2-3n+3}$ divergiert. Das zeigen wir, indem wir eine divergente Minorante angeben. Sei $a_n = \frac{n+4}{2n^2-3n+3}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann „verhält sich (a_n) wie $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ für $n \to \infty$“. Wir schätzen also nach unten ab: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{n+4}{2n^2-3n+3} \geq \frac{n}{2n^2+3} \geq \frac{n}{2n^2+3n^2} = \frac{1}{5}\frac{n}{n^2} = \frac{1}{5}\frac{1}{n},$$

da $3n^2 \geq 3$ gilt. Somit ist $\sum_n \frac{1}{5}\frac{1}{n}$ eine divergente Minorante für $\sum_n a_n$.Das Minorantenkriterium liefert nun, dass $\sum_n a_n$ divergiert.

Aufgabe 33 (K) (Konvergenz von Reihen II)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Untersuchen Sie auch, ob im Fall der Konvergenz sogar absolute Konvergenz vorliegt.

(i) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, (ii) $\sum_{n\geq 1}\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$,

(iii) $\sum_{n\geq 1}\frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2+\sqrt{n^4+1}}$, (iv) $\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2}$,

(v) $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n^2}\binom{n+2}{n}$, (vi) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{n!}{n^n}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 33

(i) Die Reihe konvergiert nach dem Wurzelkriterium absolut. Dazu setzen wir $a_n := \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann erhalten wir

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{2}{1+0} = 2 \quad (n \to \infty).$$

Hieraus folgt

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} < 1.$$

Also konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium absolut.

(ii) Die Reihe ist divergent nach dem Minorantenkriterium (Wurzel– und Quotienkriterium sind hier leider nicht anwendbar. Warum?). Wir setzen $a_n := \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ für $n \in \mathbb{N}$ und bemerken, dass

$$a_n = \frac{1}{n}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da die harmonische Reihe $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ divergent ist, folgt aus dem Minorantenkriterium, dass die Reihe divergiert.

(iii) Die Reihe $\sum_{n\geq 1}\frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2+\sqrt{n^4+1}}$ divergiert. Das zeigen wir, indem wir eine divergente Minorante angeben. Sei $a_n = \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2+\sqrt{n^4+1}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann „verhält sich (a_n) wie $\frac{\sqrt{n}^2}{n^2} = \frac{1}{n}$ für $n \to \infty$“. Wir schätzen also nach unten ab:

$$a_n = \frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2+\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{(\sqrt{n}-\frac{\sqrt{n}}{2})^2}{n^2+\sqrt{n^4+3n^4}} = \frac{\sqrt{\frac{n}{4}}^2}{n^2+2n^2} = \frac{1}{12}\frac{n}{n^2} = \frac{1}{12}\frac{1}{n}$$

für $n \geq 16$, weil dann $\sqrt{n} \geq 4$ bzw. $\frac{\sqrt{n}}{2} \geq 2$. Somit ist $\sum_{n\geq 16}\frac{1}{12}\frac{1}{n}$ eine divergente Minorante für $\sum_{n\geq 16} a_n$. Das Minorantenkriterium liefert nun, dass $\sum_{n\geq 16} a_n$ divergiert und dasselbe folgt für $\sum_{n\geq 1} a_n$.

(iv) Wir wenden das Leibnizkriterium an um zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2}$ konvergiert. Sei $a_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wir müssen zeigen, dass (a_n) eine fallende Nullfolge ist. Da

$$0 \leq \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n^2}}{n^2} = \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \geq 2$$

gilt und $(\frac{1}{n})$ eine Nullfolge ist, folgt aus dem Sandwichkriterium, dass auch (a_n) eine Nullfolge ist. Es verbleibt zu zeigen, dass (a_n) fallend ist. Da

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2} = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^4}} = \sqrt{\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} \quad \text{für alle } n \geq 2$$

gilt, ist es hierfür sinnvoll $\sqrt{x(1-x)}$ für $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ genauer zu untersuchen. Wir behaupten, dass für $0 \leq x \leq y \leq \frac{1}{2}$ auch $\sqrt{x(1-x)} \leq \sqrt{y(1-y)}$ gilt: Denn ist $0 \leq x \leq y \leq \frac{1}{2}$, so ist $y - x \geq 0$ und $0 \leq x + y \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ und daher

$$y(1-y) - x(1-x) = y - x - (y^2 - x^2) = \underbrace{(y-x)}_{\geq 0}\underbrace{[1-(y+x)]}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\Longrightarrow x(1-x) \leq y(1-y) \Longrightarrow \sqrt{x(1-x)} \leq \sqrt{y(1-y)}.$$

Setzen wir nun $x := \frac{1}{(n+1)^2}$ und $y := \frac{1}{n^2}$ für $n \geq 2$, so folgt $0 \leq x \leq y \leq \frac{1}{2}$ und damit

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)} = \sqrt{x(1-x)} \leq \sqrt{y(1-y)} = \sqrt{\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = a_n.$$

Also ist $(a_n)_{n\geq 2}$ fallend. Nach dem Leibnizkriterium konvergiert also die Reihe.
Bemerkung: Dass $(a_n)_{n\geq 2}$ fallend ist, kann man auch mit der „Brute-Force-Methode“ auf Kosten der Eleganz direkt zeigen: Für $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \frac{\sqrt{(n+1)^2-1}}{(n+1)^2} &\leq \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2} = a_n \\ \iff \quad & (n^2-1)(n+1)^4 \geq (n^2+2n+1-1)n^4 \\ \iff \quad & n^6 + 4n^5 + 5n^4 - 5n^2 - 4n - 1 \geq n^6 + 2n^5 \\ \iff \quad & 2n^5 + 5n^4 - 5n^2 - 4n - 1 \geq 0 \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist aber für $n \geq 2$ stets erfüllt, da dann die Relationen $4n+1 \leq 4n^2$, $n^2 \leq n^4$ gelten und somit auch

$$2n^5 + 5n^4 - 5n^2 - 4n - 1 \geq 2n^5 + 5n^4 - 5n^4 - 4n^4 \geq 2n^5 - 4n^4 = 2n^4(n-2) \geq 0.$$

Um zu zeigen, dass die Reihe nicht absolut konvergiert, suchen wir eine divergente Minorante. Da $n \geq 2$ haben wir auch $n^2 \geq 4$ oder äquivalent $-1 \geq -\frac{1}{4}n^2$. Es folgt

$$\left|(-1)^n \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2}\right| = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2} \geq \frac{\sqrt{n^2-\frac{1}{4}n^2}}{n^2} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}n^2}}{n^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \geq 2.$$

Diese Abschätzung liefert die divergente Minorante $\sum_{n\geq 2} \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{n}$ für die Reihe $\sum_{n\geq 2} |a_n|$. Aus dem Minorantenkriterium folgt, dass die Reihe $\sum_{n\geq 2} |a_n|$ nicht konvergiert. Also konvergiert $\sum_{n\geq 2} a_n$ nicht absolut.

(v) Die Reihe divergiert, da die Reihenglieder keine Nullfolge bilden. Setzen wir $a_n := (-1)^{n^2}\binom{n+2}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$, so sehen wir, dass

$$|a_n| = \binom{n+2}{n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \geq 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dies zeigt, dass (a_n) keine Nullfolge ist, und damit $\sum_{n\geq 1} a_n$ divergent ist.

(vi) Die Reihe konvergiert absolut nach dem Quotientenkriterium. Wir setzen $a_n := (-1)^n \frac{n!}{n^n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann erhalten wir

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} \quad (n \to \infty).$$

Es folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{e} < 1.$$

Also konvergiert $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$ nach dem Quotientenkriterium absolut.

Aufgabe 34 (Cauchysches Verdichtungskriterium, Allgemeine harmonische Reihe)

(a) Es seien $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und (a_k) fallend.

(i) Zeigen Sie

$$2^k a_{2^{k+1}} \leq a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}-1} \leq 2^k a_{2^k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

(ii) Folgern Sie aus (i) und dem Majorantenkriterium die folgende Äquivalenz:

$$\sum_{k\geq 1} a_k \text{ konvergiert} \iff \sum_{k\geq 0} 2^k a_{2^k} \text{ konvergiert.}$$

(b) Es sei $s \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (a) folgende Äquivalenz:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \text{ konvergiert} \iff s > 1.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 34

(a) (i) Es sei $k \in \mathbb{N}_0$. Da nach Voraussetzung $(a_n)_n$ fallend ist, gilt

$$a_{2^{k+1}} \leq a_{2^k+\ell} \leq a_{2^k} \quad \text{für alle } \ell \in \{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}.$$

Summieren wir obige Ungleichungen auf, erhalten wir wie gewünscht

$$2^k a_{2^{k+1}} = \sum_{\ell=0}^{2^k-1} a_{2^{k+1}} \leq \sum_{\ell=0}^{2^k-1} a_{2^k+\ell} \leq \sum_{\ell=0}^{2^k-1} a_{2^k} \leq 2^k a_{2^k}$$

(denn die mittlere Summe ist gerade $a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}$).

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ die n-te Partialsumme von $\sum_{k\geq 1} a_k$ und $t_n := \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k}$ die n-te Partialsumme von $\sum_{k\geq 0} 2^k a_{2^k}$. Da nach Voraussetzung $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, folgt aus dem Monotoniekriterium für Reihen, dass $\sum_{k\geq 1} a_k$ bzw. $\sum_{k\geq 0} 2^k a_{2^k}$ genau dann konvergieren, wenn (s_n) bzw. (t_n) nach oben beschränkt sind. Im Folgenden zeigen wir daher, dass (s_n) genau dann nach oben beschränkt ist, wenn (t_n) nach oben beschränkt ist.
Unter Verwendung von (i) erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$s_{2^{n+1}-1} = \sum_{j=1}^{2^{n+1}-1} a_j = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\ell=0}^{2^k-1} a_{2^k+\ell} \right) \overset{\text{(i)}}{\leq} \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k} = t_n$$

und genauso

$$\frac{1}{2}(t_{n+1}-a_1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} 2^k a_{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1} a_{2^{k+1}} \overset{\text{(i)}}{\leq} \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\ell=0}^{2^k-1} a_{2^k+\ell}\right) = \sum_{j=1}^{2^{n+1}-1} a_j = s_{2^{n+1}-1},$$

und damit insgesamt

$$\frac{1}{2}(t_{n+1}-a_1) \leq s_{2^{n+1}-1} \leq t_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Hieraus folgt nun, dass (s_n) genau dann nach oben beschränkt ist, wenn (t_n) nach oben beschränkt ist. Diese Äquivalenz zeigen wir im Folgenden:
„$\Longleftarrow$“: Es sei (t_n) nach oben beschränkt, d.h., es existiere ein $t \in \mathbb{R}$ mit $t_n \leq t$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann $n \leq 2^{n+1}-1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und (s_n) wachsend ist, erhalten wir dann as (1)

$$s_n \leq s_{2^{n+1}-1} \overset{(1)}{\leq} t_n \leq t \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist auch (s_n) nach oben beschränkt.
„$\Longrightarrow$“: Es sei (s_n) nach oben beschränkt, d.h., es existiere ein $s \in \mathbb{R}$ mit $s_n \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus (1) erhalten wir dann

$$t_{n+1} \overset{(1)}{\leq} 2\,(a_1 + s_{2^{n+1}-1}) \leq 2\,(a_1+s) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also ist $(t_n)_{n\geq 2}$ und damit auch $(t_n)_{n\geq 0}$ nach oben beschränkt.

Aus dem Monotoniekriterium folgt nun, dass $\sum_{k\geq 1} a_k$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{k\geq 0} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

(b) **Behauptung**: Es sei $s \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \text{ konvergiert} \iff s > 1.$$

Beweis: Es sei $s \in \mathbb{Q}$.

„$\Longrightarrow$“: Es sei $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ konvergent. Insbesondere ist dann $(n^{-s})_n$ eine Nullfolge. Hieraus folgt $s > 0$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Reihe für $s \in (0,1]$ divergent ist. Es muss also $s > 1$ sein.

„$\Longleftarrow$“: Es sei nun $s > 1$. Dann erfüllt $a_n := n^{-s}$ für $n \in \mathbb{N}$ die Voraussetzungen von (a). Aus (a)(ii) schließen wir

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \text{ ist konvergent} \iff \sum_{n\geq 0} 2^n \frac{1}{(2^n)^s} = \sum_{n\geq 0} \left(2^{(1-s)}\right)^n \text{ ist konvergent.}$$

Die Reihe auf der rechten Seite ist aber eine geometrische Reihe und konvergiert genau dann, wenn $2^{1-s} < 1$. Letztere Ungleichung ist aber genau dann erfüllt, wenn $s > 1$ ist.

Aufgabe 35 (K) (Absolute Konvergenz, Konvergenz)

Es sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Folge. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Konvergiert die Reihe $\sum_k a_k$ absolut, dann gilt

$$\inf\{k|a_k| \mid k \in \mathbb{N}, k \geq n\} = 0 \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Ist nun $(a_k)_{k\geq 1}$ reell und $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\sum_{k\geq 1} a_k \text{ konvergiert } \iff \sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{1+a_k} \text{ konvergiert.}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 35

(a) **Behauptung**: Konvergiert die Reihe $\sum_k a_k$ absolut, dann gilt

$$\inf\{k|a_k| : k \in \mathbb{N}, k \geq n\} = 0 \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gäbe ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$c := \inf\{k|a_k| : k \in \mathbb{N}, k \geq n\} \neq 0.$$

Da $k|a_k| \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, ist 0 eine untere Schranke von $\{k|a_k| : k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$. Da das Infimum die größte untere Schranke ist, folgt aus $c \neq 0$ sofort $c > 0$. Als untere Schranke von $\{k|a_k| : k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$ erfüllt c weiterhin

$$k|a_k| \geq c \quad \text{für alle } k \geq n \Longrightarrow |a_k| \geq \frac{c}{k} \quad \text{für alle } k \geq n. \tag{2}$$

Nach Vorlesung divergiert allerdings die harmonische Reihe $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ und damit auch die „verschobene" Reihe $\sum_{k\geq n} \frac{1}{k}$. Somit wäre auch $\sum_{k\geq n} \frac{c}{k}$ divergent und nach (2) eine divergente Minorante für $\sum_{k\geq n} |a_k|$. Nach dem Minorantenkriterium müsste dann $\sum_{k\geq n} |a_k|$ und damit auch $\sum_{k\geq 1} |a_k|$ divergent sein, im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass $\sum_k a_k$ absolut konvergent ist.
Also war unsere Annahme falsch, und es muss wie gewünscht

$$c = \inf\{k|a_k| : k \in \mathbb{N}_0, k \geq n\} = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

(b) **Behauptung**: Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ reell und $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{k\geq 1} a_k \text{ konvergiert } \iff \sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{1+a_k} \text{ konvergiert.}$$

Beweis: Wir zeigen die Äquivalenz mit Hilfe des Majorantenkriteriums.

„$\Longrightarrow$": Sei $\sum_{k\geq 1} a_k$ konvergent. Wegen

$$0 \leq \frac{a_k}{1+a_k} \leq \frac{a_k}{1+0} \leq a_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

folgt aus dem Majorantenkriterium, dass dann auch $\sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{1+a_k}$ konvergent ist.

„$\Longleftarrow$": Sei $\sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{1+a_k}$ konvergent. Dann ist nach dem notwendigen Kriterium für Reihenkonvergenz $(\frac{a_k}{1+a_k})_{k\geq 1}$ eine Nullfolge. Wählen wir $\varepsilon := \frac{1}{2}$ in der Definition der Folgenkonvergenz, so sehen wir, dass es einen Index $K \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $k \geq K$

$$\frac{a_k}{1+a_k} \leq \frac{1}{2} \underset{a_k \geq 0}{\iff} a_k \leq \frac{a_k}{2} + \frac{1}{2} \iff a_k \leq 1.$$

Somit gilt für alle $k \geq K$ auch

$$0 \leq a_k = (1+a_k)\frac{a_k}{1+a_k} \leq (1+1)\frac{a_k}{1+a_k} = 2\frac{a_k}{1+a_k}.$$

Es ist also $\sum_{k\geq K} \frac{2a_k}{1+a_k}$ eine Majorante für $\sum_{k\geq K} a_k$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert somit $\sum_{k\geq K} a_k$ und damit auch $\sum_{k\geq 1} a_k$.