Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Dorothee Frey
Yonas Mesfun, M.Sc.

WS 21/22
17.12.2021

Analysis I

9. Übungsblatt

Abgabe bis 07.01.2022, 12:00 Uhr

Aufgabe 36 (Konvergenz, Absolute Konvergenz)

Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Welche der folgenden Aussagen implizieren die Konvergenz bzw. die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$?

(i) Die Folge $(n^2 a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

(ii) Es ist $a_n \neq 0$ und $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Für alle $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|\sum_{n=N+1}^{N+m} a_n| \leq \varepsilon$ für alle $N \geq N_0$.

(iv) Die Menge $\{\sum_{n=1}^{m} |a_n| : m \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.

(v) Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $(s_{2n})_{n\geq 1}$ ist konvergent, wobei $(s_n)_{n\geq 1}$ die Folge der Partialsummen bezeichnet.

(vi) Es existiert eine Nullfolge (b_n) mit $a_n = (-1)^n b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(vii) Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2}\sqrt[n]{42}$ für alle $n \geq N$.

(viii) Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq (1 - \frac{1}{n})$ für alle $n \geq N$.

Aufgabe 37 (K) (Cauchyprodukte)

(a) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n \quad \text{für alle } z \in B(0,1).$$

Hinweis: Führen Sie eine Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$ durch. Aufgabe 1 (b) und Beispiel (d), S.47 Vorlesungsskript, könnten hierbei nützlich sein.

(b) Es seien (a_n), (b_n) definiert durch

$$a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $\sum_{n\geq 1} a_n$ und $\sum_{n\geq 1} b_n$ konvergieren, aber das Cauchyprodukt von $\sum_{n\geq 1} a_n$ und $\sum_{n\geq 1} b_n$ divergent ist.

Aufgabe 38 (Exponentialreihe, Irrationalität von e)

(a) Zeigen Sie $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Folgern Sie aus (a), dass $|\exp(ix)| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(c) Zeigen Sie $0 < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Folgern Sie aus (c), dass e irrational ist.
Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis.

Aufgabe 39 (K) (Umordnung von Reihen)

Es sei $a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\sigma(3k-2) := 2k-1, \quad \sigma(3k-1) := 4k-2, \quad \sigma(3k) := 4k \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Wir setzen $b_k := a_{\sigma(k)}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Die Reihe $\sum_{k\geq 1} b_k$ ist eine Umordnung der Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$.

(b) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$b_{3k-2} + b_{3k-1} + b_{3k} = \frac{1}{2}\left(a_{2k-1} + a_{2k}\right).$$

(c) Die Reihe $\sum_{k\geq 1} b_k$ konvergiert und es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Aufgabe 40 (Cantormenge, Überabzählbarkeit)

Es sei $C_0 := [0,1]$ und für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $C_{n+1} := \frac{1}{3}C_n \cup \left(\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3}\right)$[1]. Wir definieren die *Cantormenge* $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} C_n$.

(a) Seien $x_k, y_k \in \{0,2\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen $x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k}$ und $y := \sum_{k=1}^{\infty} y_k 3^{-k}$. Zeigen Sie:

$$x = y \quad \Longrightarrow \quad x_k = y_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

(b) Zeigen Sie $C = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k} \mid x_k \in \{0,2\} \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \right\}$.

(c) Zeigen Sie, dass C überabzählbar ist.

(d) Es seien $a, b \in C$ mit $a \leq b$. Zeigen Sie: $[a,b] \subseteq C \iff a = b$.

Hinweis: Sie dürfen bei dieser Aufgabe ohne Beweis verwenden, dass für jede reelle Zahl $x \in [0,1]$ eine Folge $(x_k)_{k\geq 1}$ derart gibt, dass $x_k \in \{0,1,2\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k}$ gelten.

[1] Für $a \in \mathbb{R}$ und eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ ist $aB := \{ab \mid b \in B\}$ und $B + a := a + B := \{a + b \mid b \in B\}$.