Analysis I

Lösungsvorschlag zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 36 (Konvergenz, Absolute Konvergenz)

Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Welche der folgenden Aussagen implizieren die Konvergenz bzw. die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$?

(i) Die Folge $(n^2 a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

(ii) Es ist $a_n \neq 0$ und $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Für alle $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|\sum_{n=N+1}^{N+m} a_n| \leq \varepsilon$ für alle $N \geq N_0$.

(iv) Die Menge $\{\sum_{n=1}^{m} |a_n| \colon m \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.

(v) Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $(s_{2n})_{n\geq 1}$ ist konvergent, wobei $(s_n)_{n\geq 1}$ die Folge der Partialsummen bezeichnet.

(vi) Es existiert eine Nullfolge (b_n) mit $a_n = (-1)^n b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(vii) Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2}\sqrt[n]{42}$ für alle $n \geq N$.

(viii) Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq (1 - \frac{1}{n})$ für alle $n \geq N$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 36

(i) Die Aussage impliziert die absolute Konvergenz von $\sum_{n\geq 1} a_n$. Denn ist $(n^2 a_n)_{n\geq 1}$ konvergent, so ist $(n^2 a_n)_{n\geq 1}$ insbesondere beschränkt. Damit existiert ein $c > 0$ mit

$$|n^2 a_n| \leq c \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

d.h.,

$$|a_n| \leq \frac{c}{n^2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{c}{n^2}$ nach Vorlesung konvergent ist, folgt nun die absolute Konvergenz aus dem Majorantenkriterium.

(ii) Die Aussage ist falsch. Man betrachte beispielsweise $a_n := \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ divergent (harmonische Reihe), aber $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(iii) Die Aussage ist äquivalent dazu, dass (a_n) eine Nullfolge ist (warum genau?). Damit impliziert die Aussage keine Konvergenz, und erst recht keine absolute Konvergenz von $\sum_{n\geq 1} a_n$.
Bemerkung: Wäre die Reihenfolge von „es existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$“ und „für alle $m \in \mathbb{N}$“ vertauscht, so wäre die Aussage genau das Cauchykriterium für Reihen und wäre daher äquivalent zur Konvergenz von $\sum_{n\geq 1} a_n$.

(iv) Die Aussage ist nach dem Monotoniekriterium für Reihen äquivalent dazu, dass $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ konvergiert, was wiederum äquivalent dazu ist, dass $\sum_{n\geq 1} a_n$ absolut konvergent ist.

(v) Die Aussage impliziert die Konvergenz von $\sum_{n\geq 1} a_n$. Denn sind $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge und $(s_{2n})_{n\geq 1}$ konvergent mit Grenzwert s, so folgt aus den Grenzwertsätzen, dass auch $(s_{2n-1})_{n\geq 1} = (s_{2n})_{n\geq 1} - (a_{2n})_{n\geq 1}$ konvergent ist mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} - a_{2n}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} a_{2n} = s - 0 = s.$$

Aus Lemma 6.17 folgt, dass $(s_n)_{n\geq 1}$ konvergent ist mit Grenzwert s. Nach Definition der Reihenkonvergenz bedeutet dies aber gerade, dass $\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergent ist mit Reihenwert s. Die Aussage impliziert allerdings keine absolute Konvergenz wie die alternierende harmonische Reihe zeigt.

(vi) Die Aussage impliziert keine Konvergenz und damit erst recht keine absolute Konvergenz von $\sum_{n\geq 1} a_n$. Es sei

$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist (b_n) wegen $0 \leq b_n \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge. Die Reihe $\sum_{n\geq 1} (-1)^n b_n$ ist aber divergent (warum genau?).

(vii) Die Aussage impliziert die absolute Konvergenz von $\sum_{n\geq 1} a_n$. Denn existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2}\sqrt[n]{42}$ für alle $n \geq N$, so folgern wir

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{42} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{42} = \frac{1}{2} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert also $\sum_{n\geq 1} a_n$ absolut.

(viii) Die Aussage impliziert keine Konvergenz, und damit erst recht keine absolute Konvergenz von $\sum_{n\geq 1} a_n$. Es sei beispielsweise

$$a_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = (1 - \frac{1}{n})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber

$$a_n \longrightarrow \frac{1}{e} \neq 0 \quad (n \to \infty).$$

Insbesondere ist $(a_n)_{n\geq 1}$ keine Nullfolge. Nach dem notwendigen Kriterium für Reihenkonvergenz ist $\sum_{n\geq 1} a_n$ divergent.

Aufgabe 37 (K) (Cauchyprodukte)

(a) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n \quad \text{für alle } z \in B(0,1).$$

Hinweis: Führen Sie eine Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$ durch. Aufgabe 1 (b) und Beispiel (d), S.47 Vorlesungsskript, könnten hierbei nützlich sein.

(b) Es seien (a_n), (b_n) definiert durch

$$a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $\sum_{n\geq 1} a_n$ und $\sum_{n\geq 1} b_n$ konvergieren, aber das Cauchyprodukt von $\sum_{n\geq 1} a_n$ und $\sum_{n\geq 1} b_n$ divergent ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 37

(i) **Behauptung**: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n \quad \text{für alle } z \in B(0,1).$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsanfang (IA): Für $z \in B(0,1)$ ist die geometrische Reihe $\sum_{n\geq 0} z^n$ konvergent mit Reihenwert $\frac{1}{1-z}$. Da $\binom{n}{n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, folgt

$$\frac{1}{(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{n} z^n \quad \text{für alle } z \in B(0,1).$$

Induktionsvoraussetzung (IV): Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Unter der (IA), (IV), Aufgabe 1 (b) und unter Verwendung des Cauchyproduktes (CP) gilt für $z \in B(0,1)$

$$\frac{1}{(1-z)^{k+2}} = \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \cdot \frac{1}{1-z} \overset{\text{(IV)}}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+k}{n} z^n}_{=:a_n} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{z^n}_{=:b_n} \right) \overset{\text{(CP)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

wobei für $n \in \mathbb{N}_0$

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k}{j} z^j z^{n-j} \overset{\text{A1(b)}}{=} \binom{n+k+1}{n} z^n.$$

Für die Anwendung des Cauchyproduktes haben wir hierbei verwendet, dass $\sum_{k\geq 0} a_k$ und $\sum_{k\geq 0} b_k$ absolut konvergent sind (für $\sum_{k\geq 0} a_k$ folgt dies aus dem Quotientenkriterium, für $\sum_{k\geq 0} b_k$ ist dies aus der Vorlesung bekannt). Wir folgern insgesamt

$$\frac{1}{(1-z)^{k+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{n} z^n \quad \text{für alle } z \in B(0,1).$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt also die Aussage für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Offensichtlich ist $(\frac{1}{\sqrt{n+1}})_{n\geq 1}$ eine fallende Nullfolge. Aus dem Leibnizkriterium folgt, dass $\sum_{n\geq 1} a_n$ und $\sum_{n\geq 1} b_n$ konvergent sind. Aus Aufgabe 8 (i) folgt für alle $x, y > 0$

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Damit ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1} \leq \frac{1}{2}(k+1+(n-k+1)) = \frac{n+2}{2},$$

also

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-(k+1)}} \geq \frac{2}{n+2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Es folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}$$

und damit

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2n}{n+2}.$$

Insbesondere ist (c_n) keine Nullfolge. Nach dem notwendigen Kriterium für Reihenkonvergenz ist damit $\sum_{n\geq 1} c_n$ divergent.

Aufgabe 38 (Exponentialreihe, Irrationalität von e)

(a) Zeigen Sie $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Folgern Sie aus (a), dass $|\exp(ix)| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(c) Zeigen Sie $0 < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Folgern Sie aus (c), dass e irrational ist.
Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 38

(a) Sei $z \in \mathbb{C}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $s_n(z)$ die n-te Partialsumme der Exponentialreihe $\sum_{k\geq 1} \frac{z^k}{k!}$. Dann gilt

$$s_n(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\overline{z})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z^k}}{k!} = \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \overline{s_n(z)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Die linke Seite $s_n(\overline{z})$ konvergiert nach Definition für $n \to \infty$ gegen $\exp(\overline{z})$. Da $s_n(z)$ nach der Definiton der Reihenkonvergenz für $n \to \infty$ gegen $\exp(z)$ konvergiert, folgern wir mit Satz 3.13, dass die rechte Seite $\overline{s_n(z)}$ für $n \to \infty$ gegen $\overline{\exp(z)}$ konvergiert. Aus der Eindeutigkeit der Grenzwertes folgt

$$\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}.$$

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Aus Aufgabenteil (a) folgt

$$\exp(-ix) = \exp(\overline{ix}) \overset{\text{(a)}}{=} \overline{\exp(ix)},$$

also mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (FE)

$$1 = \exp(0) = \exp(ix - ix) \overset{\text{(FE)}}{=} \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(ix)\overline{\exp(ix)} = |\exp(ix)|^2,$$

d.h.,

$$|\exp(ix)| = 1.$$

(c) Es sei $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
0 < \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{m!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots m}\right) \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}\right) \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^k < \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{1}{nn!}.
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $m \to \infty$ liefert nun wie gewünscht

$$0 < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!}.$$

(d) Wir beweisen die Behauptung per Widerspruch: Angenommen, es gilt $e \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es $m, n \in \mathbb{N}$ mit $e = \frac{m}{n}$. Dann können wir $e_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{p}{n!}$ schreiben mit einem $p \in \mathbb{N}$. Da $e - e_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ gilt, folgern wir dann mit Aufgabenteil (c)

$$\begin{aligned}
&0 < e - e_n < \frac{1}{nn!} \\
\iff &0 < \frac{m(n-1)! - p}{n!} < \frac{1}{nn!} \\
\iff &0 < \frac{mn! - pn}{n!} < \frac{1}{n!} \\
\iff &0 < mn! - pn < 1,
\end{aligned}$$

aber letzte Ungleichungskette kann für $mn! - pn \in \mathbb{N}$ offensichtlich nicht gelten. Widerspruch. Also ist $e \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Aufgabe 39 (K) (Umordnung von Reihen)

Es sei $a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\sigma(3k-2) := 2k-1, \quad \sigma(3k-1) := 4k-2, \quad \sigma(3k) := 4k \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Wir setzen $b_k := a_{\sigma(k)}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Die Reihe $\sum_{k\geq 1} b_k$ ist eine Umordnung der Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$.

(b) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$b_{3k-2} + b_{3k-1} + b_{3k} = \frac{1}{2}\left(a_{2k-1} + a_{2k}\right).$$

(c) Die Reihe $\sum_{k\geq 1} b_k$ konvergiert und es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 39

(a) Es seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $\sigma\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ aus der Aufgabenstellung und $b_n := a_{\sigma(n)}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Nach Definition ist $\sum_{n\geq 1} b_n$ genau dann eine Umordnung von $\sum_{n\geq 1} a_n$, wenn $\sigma\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ eine Bijektion ist. Für den Nachweis, dass σ eine Bijektion ist, definieren wir die Mengen

$$A_1 := \{3k-2\colon k\in\mathbb{N}\},\quad A_2 := \{3k-1\colon k\in\mathbb{N}\},\quad A_3 := \{3k\colon k\in\mathbb{N}\}$$

und

$$B_1 := \{2k-1\colon k\in\mathbb{N}\},\quad B_2 := \{4k-2\colon k\in\mathbb{N}\},\quad B_3 := \{4k\colon k\in\mathbb{N}\}$$

Man verifiziert leicht, dass für jedes $j\in\{1,2,3\}$

$$\sigma_j\colon A_j\to B_j,\quad \sigma_j(k) := \sigma(k)$$

eine Bijektion definiert. Die Mengen $A_j, j\in\{1,2,3\}$ und $B_j, j\in\{1,2,3\}$, definieren jeweils eine Zerlegung von $\mathbb{N}$, d.h., es ist $A_j\cap A_k=\emptyset$ sowie $B_j\cap B_k=\emptyset$ für $j\neq k$ und $\mathbb{N}=\bigcup_{j=1}^3 A_j=\bigcup_{j=1}^3 B_j$. Hieraus und aus der Tatsache, dass die σ_j Bijektionen sind, folgt leicht, dass σ eine Bijektion definiert:

Surjektivität: Ist $n\in\mathbb{N}$, so liegt n wegen $\mathbb{N}=\bigcup_{j=1}^3 B_j$ in einem B_{j_0}, wobei $j_0\in\{1,2,3\}$. Da σ_{j_0} eine Bijektion ist, existiert dann ein $k\in A_{j_0}\subseteq\mathbb{N}$ mit $\sigma(k)=\sigma_j(k)=n$.

Injektivität: Angenommen, es gelte $\sigma(m)=\sigma(n)$ für $m,n\in\mathbb{N}$. Da $\mathbb{N}=\bigcup_{j=1}^3 A_j$ gilt, liegt m in einem A_{j_1} und n in einem A_{j_2}, wobei $j_1,j_2\in\{1,2,3\}$. Wir folgern

$$B_{j_1}\ni\sigma_{j_1}(m)=\sigma(m)=\sigma(n)=\sigma_{j_2}(n)\in B_{j_2}.$$

Also ist $B_{j_1}\cap B_{j_2}\neq\emptyset$, woraus auf Grund der paarweisen Disjunktheit der Mengen B_j sofort $j_1=j_2$ folgt. Also ist $\sigma_{j_1}(m)=\sigma_{j_1}(n)$ und daher auch $m=n$, da σ_{j_1} als Bijektion insbesondere injektiv ist.

Also ist $\sum_{k\geq 1} b_n$ tatsächlich eine Umordnung von $\sum_{n\geq 1} a_n$.

(b) Für $k\in\mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
&b_{3k-2}+b_{3k-1}+b_{3k}\\
&=a_{2k-1}+a_{4k-2}+a_{4k}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}+a_{4k}=\frac{2}{4k-2}-\frac{1}{4k-2}+a_{4k}\\
&=\frac{1}{4k-2}+a_{4k}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}+a_{2k}\right)=\frac{1}{2}(a_{2k-1}+a_{2k}).
\end{aligned}$$

(c) Für $n\in\mathbb{N}$ seien $t_n:=\sum_{k=1}^n b_k$ und $s_n:=\sum_{k=1} a_k$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $(s_n)_{n\geq 1}$ konvergent ist. Wir setzen $s:=\lim_{n\to\infty} s_n$. Für $n\in\mathbb{N}$ folgt

$$t_{3n}=\sum_{k=1}^{3n} b_k=\sum_{k=1}^{n}(b_{3k-2}+b_{3k-1}+b_{3k})\overset{\text{(b)}}{=}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(a_{2k-1}+a_{2k})=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} a_k=\frac{1}{2}s_{2n}.$$

Hieraus folgt

$$t_{3n}=\frac{1}{2}s_{2n}\longrightarrow\frac{1}{2}s\quad(n\to\infty).$$

Da $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist, folgern wir weiter

$$t_{3n-1}=t_{3n}-b_{3n}=t_{3n}-a_{4n}\qquad\longrightarrow\frac{1}{2}s-0=\frac{1}{2}s\quad(n\to\infty),$$

$$t_{3n-2} = t_{3n-1} - b_{3n-1} = t_{3n-1} - a_{4n-2} \longrightarrow \frac{1}{2}s - 0 = \frac{1}{2}s \quad (n \to \infty).$$

Aus der letzten Bemerkung auf Seite 35 des Vorlesungsskriptes folgt $H((t_n)) = \{\frac{1}{2}s\}$. Als konvergente Folgen sind $(t_{3n}), (t_{3n-1})$ und (t_{3n-2}) beschränkt. Damit ist aber auch (t_n) beschränkt. Insgesamt ist also (t_n) beschränkt und hat nur $\frac{1}{2}s$ als Häufungspunkt. Aus Korollar 3.27 folgt, dass (t_n) konvergent ist mit Grenzwert $\frac{1}{2}s$. Nach Definition der Reihenkonvergenz ist $\sum_{k\geq 1} b_k$ konvergent und für den Reihenwert gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Aufgabe 40 (Cantormenge, Überabzählbarkeit)

Es sei $C_0 := [0,1]$ und für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $C_{n+1} := \frac{1}{3}C_n \cup \left(\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3}\right)$[1]. Wir definieren die *Cantormenge* $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} C_n$.

(a) Seien $x_k, y_k \in \{0,2\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen $x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k}$ und $y := \sum_{k=1}^{\infty} y_k 3^{-k}$. Zeigen Sie:
$$x = y \quad \Longrightarrow \quad x_k = y_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

(b) Zeigen Sie $C = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k} \mid x_k \in \{0,2\} \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \right\}$.

(c) Zeigen Sie, dass C überabzählbar ist.

(d) Es seien $a, b \in C$ mit $a \leq b$. Zeigen Sie: $[a,b] \subseteq C \iff a = b$.

Hinweis: Sie dürfen bei dieser Aufgabe ohne Beweis verwenden, dass für jede reelle Zahl $x \in [0,1]$ eine Folge $(x_k)_{k\geq 1}$ derart gibt, dass $x_k \in \{0,1,2\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k}$ gelten.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 40

(a) Seien $x_k, y_k \in \{0,2\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} y_k 3^{-k} =: y$. Angenommen, es gälte nicht $x_k = y_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann wäre $k_0 := \min\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \neq y_k\} \in \mathbb{N}$ wohldefiniert. Nach Definition von k_0 muss dann $x_{k_0} \neq y_{k_0}$ sein, es ist also entweder $x_{k_0} = 2$ und $y_{k_0} = 0$ oder $x_{k_0} = 0$ und $y_{k_0} = 2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $x_{k_0} = 2$ und $y_{k_0} = 0$ (anderenfalls vertauschen wir einfach die Rollen von x und y). Da $x_k = y_k$ für $k < k_0$ (falls $k_0 > 1$), erhalten wir dann den Widerspruch

$$0 = x - y = 2 \cdot 3^{-k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \underbrace{(x_k - y_k)}_{\geq -2} 3^{-k} \geq 2 \cdot 3^{-k_0} - 2\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 3^{-k} = 2 \cdot 3^{-k_0} - 3^{-k_0} = 3^{-k_0} > 0,$$

wobei wir verwendet haben, dass $\sum_{k=k_0+1} 3^{-k} = 3^{-(k_0+1)} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} = 3^{-(k_0+1)}(1-3^{-1})^{-1} = 3^{-k_0}$ gilt. Also war unsere Annahme falsch und es muss $x_k = y_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gelten.

(b) Wir beweisen zunächst die folgende Behauptung:

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$C_n = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k} \mid x_k \in \{0,2\} \text{ für } k \leq n,\ x_k \in \{0,1,2\} \text{ für } k > n \right\} =: B_n$$

[1]Für $a \in \mathbb{R}$ und eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ ist $aB := \{ab \mid b \in B\}$ und $B + a := a + B := \{a + b \mid b \in B\}$.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang: Mit dem Hinweis aus der Aufgabenstellung ist klar, dass

$$C_0 = [0,1] \subseteq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k} \mid x_k \in \{0,1,2\} \text{ für alle } k \geq 1 \right\} = B_0.$$

Andererseits gilt aber für jedes $x \in B_0$, dass $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k}$ mit $x_k \in \{0,1,2\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist. Wir folgern

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot 3^{-k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot 3^{-k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-k} = \frac{2}{3} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1,$$

also $x \in [0,1] = C_0$. Wir folgern insgesamt

$$C_0 = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k} \mid x_k \in \{0,1,2\} \text{ für alle } k > 0 \right\} = B_0.$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $C_n = B_n$ für eine $n \in \mathbb{N}_0$, d.h., für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte

$$C_n = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k} \mid x_k \in \{0,2\} \text{ für } k \leq n,\ x_k \in \{0,1,2\} \text{ für } k > n \right\}.$$

Induktionsschritt: Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} C_n &= \left\{ \frac{1}{3} c \mid c \in C_n \right\} \\
&= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-(k+1)} \mid x_k \in \{0,2\} \text{ für } k \leq n,\ x_k \in \{0,1,2\} \text{ für } k > n \right\} \\
&= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k} \mid x_1 = 0,\ x_k \in \{0,2\} \text{ für } 2 \leq k \leq n+1,\ x_k \in \{0,1,2\} \text{ für } k > n+1 \right\}
\end{aligned}$$

und daher auch

$$\frac{1}{3} C_n + \frac{2}{3} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k} \mid x_1 = 2,\ x_k \in \{0,2\} \text{ für } 2 \leq k \leq n+1,\ x_k \in \{0,1,2\} \text{ für } k > n+1 \right\}.$$

Wir folgern

$$\begin{aligned}
C_{n+1} :=& \frac{1}{3} C_n \cup \left(\frac{1}{3} C_n + \frac{2}{3} \right) \\
=& \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k} \mid x_k \in \{0,2\} \text{ für } k \leq n+1,\ x_k \in \{0,1,2\} \text{ für } k > n+1 \right\} = B_{n+1}
\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschluss vollzogen.
Wir zeigen nun die Aussage aus Aufgabenteil (b), d.h., dass folgende Identität gilt:

$$C = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k} \mid x_k \in \{0,2\} \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \right\} =: B.$$

„$\supseteq$“: Ist $x \in B$, so existiert eine Folge $(x_k)_{k\geq 1} \subseteq \{0,2\}$ mit $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k}$. Insbesondere gilt dann $x \in B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Da wir bereits $C_n = B_n$ gezeigt haben, folgt

$$x \in C_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \Longrightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} C_n = C.$$

„$\subseteq$“: Sei $x \in C$. Dann ist $x \in C_n = B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(x_{nk})_{k\geq 1} \subseteq \{0,1,2\}$ mit $x_{nk} \in \{0,2\}$ für alle $k \leq n$ und $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} 3^{-k}$. Der Beweis von Aufgabenteil (a) zeigt, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ die Gleichheit $x_{nk} = x_{mk}$ für alle $k \leq m$ gilt. Wir definieren $x_k := x_{kk}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_k \in \{0,2\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir behaupten $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k}$. Zum Beweis dieser Aussage sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{k\geq 1} 2\,3^{-k}$ konvergent ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n+1}^{\infty} 2\,3^{-k} \leq \varepsilon$. Da nach Konstruktion $x_k = x_{nk}$ für alle $k \leq n$ gilt, folgern wir

$$\left| x - \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k} \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} 3^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (x_{nk} - x_k) 3^{-k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2 3^{-k} \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k 3^{-k} \in B.$$

(c) **Behauptung:** Die Menge C ist überabzählbar.
Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, C wäre abzählbar. Dann gäbe es eine Bijektion $\varphi\colon \mathbb{N} \to C$. Wir schreiben im Folgenden c_n statt $\varphi(n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Aufgabenteilen (a) und (b) hat jedes $c_n \in C$ eine eindeutige Darstellung $\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} 3^{-k} =: 0, x_{n1} x_{n2} x_{n3} x_{n4} \cdots$ mit $x_{nk} \in \{0,2\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir haben also

$$\begin{array}{ccc} c_1 & = & 0, x_{11} x_{12} x_{13} x_{14} \cdots \\ c_2 & = & 0, x_{21} x_{22} x_{23} x_{24} \cdots \\ c_3 & = & 0, x_{31} x_{32} x_{33} x_{34} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n & = & 0, x_{n1} x_{n2} x_{n3} x_{n4} \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

mit $x_{nk} \in \{0,2\}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$. Nun extrahieren wir aus obigem „unendlichen Rechteck“ die Diagonalfolge $(x_{nn})_{n\geq 1} = (x_{11}, x_{22}, x_{33}, \ldots)$ und definieren die Zahl

$$y := 0, y_1 y_2 y_3 y_4 \cdots \in C, \quad \text{wobei } y_n := 2 - x_{nn} = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_{nn} = 2, \\ 2 & \text{falls } x_{nn} = 0 \end{cases} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

(man beachte, dass $y \in C$ nach Aufgabenteil (a) gilt, da $y_{nn} \in \{0,2\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Da nach Definition $y_n \neq x_{nn}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt aus der Eindeutigkeit der Darstellung (s. Aufgabenteil (b)), dass $y \neq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $y \notin \varphi(\mathbb{N})$, im Widerspruch dazu, dass φ surjektiv ist. Unsere Annahme muss daher falsch gewesen. Also ist C überabzählbar.

(d) **Behauptung**: Seien $a, b \in C$ mit $a \leq b$. Dann gilt $[a,b] \subseteq C \iff a = b$.
Beweis: $\Longleftarrow$: Dies ist trivial, da dann $[a,b] = \{a\} \subseteq C$.
$\Longrightarrow$: Seien $a, b \in C$ mit $a \leq b$ und $[a,b] \subseteq C$. Wir müssen also noch zeigen, dass $a \geq b$, um wie gewünscht $a = b$ zu erhalten. Wir wollen dies per Widerspruch zeigen: Angenommen, es gälte $a < b$. Nach Aufgabenteil (a) können wir dann $a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}$ und

$b = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 3^{-k}$ mit $a_k, b_k \in \{0,2\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ schreiben. Da $a < b$ ist, muss nach Aufgabenteil (b) $a_k \neq b_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ sein. Also ist $k_0 := \min\{k \in \mathbb{N} \colon a_k \neq b_k\} \in \mathbb{N}$ wohldefiniert. Nach Definition von k_0 gilt $a_k = b_k$ für alle $k < k_0$ (falls $k_0 > 1$) und $a_{k_0} \neq b_{k_0}$. Es muss $a_{k_0} = 0$ und $b_{k_0} = 2$ sein, denn anderenfalls wäre $a_{k_0} = 2$ und $b_{k_0} = 0$ und daher

$$a - b = 2 \cdot 3^{-k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} (a_k - b_k) 3^{-k} \geq 2 \cdot 3^{k_0} - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-k_0} = 2 \cdot 3^{-k_0} - 3^{-k_0} = 3^{-k_0} > 0,$$

im Widerspruch zu $a < b$. Wir definieren nun $c_k := a_k = b_k$ für alle $k < k_0$ und $c_k = 1$ für alle $k \geq k_0$. und setzen $c := \sum_{k=1}^{\infty} c_k 3^{-k} \in [0,1]$. Nach Aufgabenteil (a) und der Eindeutigkeit der Ternärdarstellung (s. Referenz in Beispiel 3.18) kann c nicht in C liegen, aber es gilt $a < c < b$, da

$$c - a = 3^{-k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \underbrace{(c_k - a_k)}_{\geq -1} 3^{-k} = 3^{-k_0} - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 3^{-k} = 3^{-k_0} - \frac{1}{2} 3^{-k_0} = \frac{1}{2} 3^{-k_0} > 0.$$

und analog

$$b - c = 3^{-k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \underbrace{(b_k - c_k)}_{\geq -1} 3^{-k} = 3^{-k_0} - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 3^{-k} = 3^{-k_0} - \frac{1}{2} 3^{-k_0} = \frac{1}{2} 3^{-k_0} > 0.$$

Dies liefert den Widerspruch $c \in [a,b] \subseteq C$ und $c \notin C$. Also war unsere Annahme falsch, es muss also wie gewünscht $a \geq b$ gelten.

Bemerkung: Wir sehen also, dass überabzählbare Mengen keine echten Intervalle beinhalten müssen.