Institut für Analysis
Prof. Dr. Dorothee Frey
Yonas Mesfun, M.Sc.

WS 21/22
07.01.2022

Analysis I

10. Übungsblatt

Abgabe bis 14.01.2022, 12:00 Uhr

Aufgabe 41 (Konvergenzradius von Potenzreihen I)

Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

(a) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n+\sqrt{n}+1}$, (b) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{7^n+1}$, (c) $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n!} z^n$,

(d) $\sum_{n\geq 0} \sqrt{n2^n} z^n$, (e) $\sum_{n\geq 0} \left(4+(-1)^n\right)^{-3n} z^{2n}$.

Aufgabe 42 (K) (Potenzreihen)

Bestimmen Sie die Menge der $z \in \mathbb{C}$, für welche die folgenden Potenzreihen konvergieren. In (d) reicht es, den Konvergenzradius der Potenzreihe zu berechnen.

(a) $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}} z^n$, (b) $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}\right)^n z^{2n}$,

(c) $\sum_{n\geq 0} 2^{-n} 3^{(-1)^n n} z^{3n}$, (d) $\sum_{n\geq 0} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2(n+1)} z^{(n^2)}$.

Aufgabe 43 (Trigonometrische Funktionen)

Zeigen Sie: Für alle $u, v \in \mathbb{C}$ gelten

$$\sin(u \pm v) = \sin(u)\cos(v) \pm \cos(u)\sin(v),$$
$$\cos(u \pm v) = \cos(u)\cos(v) \mp \sin(u)\sin(v).$$

Folgern Sie hieraus für $z, w \in \mathbb{C}$ die Identität

$$\sin(z) + \sin(w) = 2\sin\left(\tfrac{z+w}{2}\right)\cos\left(\tfrac{z-w}{2}\right).$$

Aufgabe 44 (K) (Konvergenzradius von Potenzreihen II, Funktionsgrenzwerte)

(a) Sei (a_n) ein beschränkte Folge mit $\liminf_{n\to\infty} |a_n| > 0$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_n a_n z^n$.

(b) Es sei $\sum_{k\geq 0} a_k$ eine divergente Reihe in $(0,\infty)$ und die Potenzreihe $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ besitze den Konvergenzradius 1. Wir definieren

$$f_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(1-\frac{1}{n}\right)^k \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass (f_n) uneigentlich gegen ∞ konvergiert für $n \to \infty$.

Hinweis: Verwenden Sie die Bernouillische Ungleichung, um Terme der Form $(1-\frac{1}{n})^k$ *nach unten abzuschätzen.*

(c) Zeigen Sie, dass die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie deren Wert.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{|x|}$ (ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+\alpha x+\beta}-x\right)$

In (ii) seien hierbei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha, \beta \geq 0$.