Analysis I

Lösungsvorschlag zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 41 (Konvergenzradius von Potenzreihen I)

Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n+\sqrt{n}+1}$, (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{7^n+1}$, (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n!} z^n$,

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sqrt{n2^n} z^n$, (e) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \big(4+(-1)^n\big)^{-3n} z^{2n}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 41

(i) Es gilt

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n+\sqrt{n}+1} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

wobei wir $a_n := \frac{1}{n+\sqrt{n}+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gesetzt haben. Wir behaupten, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

Es ist

$$\frac{1}{3n} = \frac{1}{n+n+n} \leq \frac{1}{n+\sqrt{n}+1} \leq \frac{1}{n+0+0} \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

also

$$\frac{1}{\sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit Hilfe des Sandwichkriteriums folgern wir daher wie gewünscht

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

wobei wir die aus der Vorlesung uind Übung bekannten Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3}} = 1$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ ausgenutzt haben. Nach Definition folgt für den Konvergenzradius

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = 1.$$

(ii) Es gilt

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{7^n+1} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

wobei (a_n) durch die Teilfolgen $(a_{2n}) := (\frac{1}{7^n+1})$, $(a_{2n+1}) := (0)$ definiert ist. Wir behaupten $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \frac{1}{\sqrt{7}}$. In der Tat,

$$\frac{1}{7\sqrt[n]{2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{7^n+7^n}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{7^n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{7^n}} = \frac{1}{7} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit dem Sandwichkriterium folgern wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{7^n+1}} = \frac{1}{7},$$

und mit Aufgabe 21 (b) des 5. Übungsblattes erhalten wir schließlich

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{\sqrt[n]{7^n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Die Teilfolge $(\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|})$ ist trivialerweise eine Nullfolge. Aus der letzten Bemerkung auf S.35 des Vorlesungsskriptes folgt $H((\sqrt[n]{|a_n|})) = \{0, \frac{1}{\sqrt{7}}\}$ und mit Satz 3.25 erhalten wir $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt{7}}$. Nach Definition 4.26 ist der Konvergenzradius

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{7}}} = \sqrt{7}.$$

(iii) Es gilt

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n!} z^n = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

wobei wir $a_n := (-1)^n 2^{-n!}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert haben. Es gilt

$$0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} = \left(\left|\frac{(-1)^n}{2^{(n-1)!n}}\right|\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

sodass wir mit Aufgabe 21 c) des 5. Übungsblattes und dem Sandwichkriterium $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ erhalten. Nach Definition 4.26 ist der Konvergenzradius $\rho = \infty$.

(iv) Es gilt

$$\sum_{n\geq 0} \sqrt{n2^n} z^n = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

wobei wir $a_n := \sqrt{n2^n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert haben. Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left((n2^n)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left((n2^n)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\sqrt[n]{n}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Aufgabe 21 a), b) des 5. Übungsblattes und dem Sandwichkriterium gilt daher $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{2}$. Für den Konvergenzradius ρ folgt daher

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(v) Es gilt

$$\sum_{n\geq 0}(4+(-1)^n)^{-3n}z^{2n}=\sum_{n\geq 0}a_nz^n,$$

wobei $(a_n)_{n\geq 0}$ durch die Teilfolgen $(a_{4n}):=(5^{-6n})$, $(a_{4n+1}):=(0)$, $(a_{4n+2}):=(3^{-6n-3})$ und $(a_{4n+3}):=(0)$ definiert ist. Damit sind die Teilfolgen $(\sqrt[4n]{|a_{4n}|})=(5^{-\frac{3}{2}})$, $(\sqrt[4n+1]{|a_{4n+1}|})=(0)$, $(\sqrt[4n+2]{|a_{4n+2}|})=(3^{-\frac{3}{2}})$ und $(\sqrt[4n+3]{|a_{4n+3}|})=(0)$ konstant und nach der letzten Bemerkung auf S.35 de Vorlesungsskriptes und Satz 3.35 gilt $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=3^{-\frac{3}{2}}$. Für den Konvergenzradius ρ folgt daher

$$\rho=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{3^{-\frac{3}{2}}}=\sqrt{27}.$$

Aufgabe 42 (K) (Potenzreihen)

Bestimmen Sie die Menge der $z\in\mathbb{C}$, für welche die folgenden Potenzreihen konvergieren. In (d) reicht es, den Konvergenzradius der Potenzreihe zu berechnen.

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{3^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}}z^n,$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}\right)^n z^{2n},$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}2^{-n}3^{(-1)^n n}z^{3n},$ (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2(n+1)}z^{(n^2)}.$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 42

Um die Konvergenz von Potenzreihen zu untersuchen, ist der Konvergenzradius sehr hilfreich: Hat die Potenzreihe $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ Konvergenzradius ρ, so konvergiert $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ absolut für alle $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|<\rho$ (d.h. für $z\in B(0,\rho)$) und divergiert für $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|>\rho$ (d.h. für $z\in\mathbb{C}\backslash\overline{B}(0,\rho)$). Für $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|=\rho$ (d.h. für $z\in S(0,\rho)$) hilft uns der Konvergenzradius nicht weiter. Hier müssen wir eine Einzelfallbetrachtung durchführen, um zu entscheiden, ob die Potenzreihe konvergiert oder nicht.

(a) Die Potenzreihe $\sum_{n\geq 0}\frac{3^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}}z^n$ konvergiert genau für $z\in\overline{B}\left(0,\frac{1}{3}\right)$ (d.h. für jene $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|\leq\frac{1}{3}$). Zuerst berechnen wir den Konvergenzradius. Wir setzen $a_n:=\frac{3^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}}$ für $n\in\mathbb{N}_0$. Dann gilt einerseits

$$\sqrt[n]{|a_n|}=3\sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}}}\leq 3\sqrt[n]{1}=3\quad\text{für alle } n\in\mathbb{N}$$

und andererseits

$$\sqrt[n]{|a_n|}\geq 3\sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+n^7}}}=3\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt[n]{n^{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}}}=3\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3}\to 3,\ (n\to\infty).$$

Diese Abschätzung und das Sandwichkriterium zeigen, dass $\sqrt[n]{|a_n|}\to 3$ für $n\to\infty$ und damit $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=3$. Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist also $\rho=\frac{1}{3}$.

Sei nun $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|=\frac{1}{3}$. Dann haben wir

$$|a_nz^n|=a_n|z|^n=\frac{3^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}}\frac{1}{3^n}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}}\leq\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^7}}=n^{\frac{1}{2}-\frac{7}{2}}=n^{-3}$$

Das heißt, in diesem Fall ist die Reihe $\sum_n n^{-3}$ eine konvergente Majorante für $\sum_n a_n z^n$. Es folgt mit dem Majorantenkriterium, dass $\sum_n a_n z^n$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \frac{1}{3}$ absolut konvergiert. Insgesamt konvergiert die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq \frac{1}{3}$ (und das sogar absolut).

(b) Die Potenzreihe $\sum_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n z^{2n}$ konvergiert genau für $z \in B(0, \sqrt{2})$ (d.h. für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \sqrt{2}$). Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Wir wollen das Wurzelkriterium auf die Reihe anwenden. Es gilt

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right|^n |z|^{2n}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right) |z|^2 \to \frac{1}{2}|z|^2, \ (n \to \infty).$$

Somit konvergiert die Reihe, wenn $\frac{1}{2}|z|^2 < 1$ und divergiert, wenn $\frac{1}{2}|z|^2 > 1$. Das heißt, sie konvergiert, wenn $|z| < \sqrt{2}$ und divergiert, wenn $|z| > \sqrt{2}$. Damit ist der Konvergenzradius $\rho = \sqrt{2}$.

Sei nun $|z| = \sqrt{2}$. Dann gilt

$$\left|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n z^{2n}\right| = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n \left(|z|^2\right)^n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n 2^n = \left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^n$$

Diese Folge konvergiert nicht gegen Null, da $1 + \frac{2}{2n+1} \geq 1$. Das bedeutet, dass die Reihe $\sum_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n z^{2n}$ in diesem Fall divergiert.

(c) Die Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} 2^{-n} 3^{(-1)^n n} z^{3n}$ konvergiert genau für $z \in B(0, \sqrt[3]{\frac{2}{3}})$, also für jene $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. Sei $z \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$\sqrt[n]{\left|\frac{3^{(-1)^n n}}{2^n} z^{3n}\right|} = \frac{3^{(-1)^n}}{2}|z|^3 = \begin{cases} \frac{3}{2}|z|^3 & n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{6}|z|^3 & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Offenbar ist also $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2^{-n} 3^{(-1)^n n} z^{3n}|} = \frac{3}{2}|z|^3$, sodass die Potenzreihe absolut konvergiert, wenn $\frac{3}{2}|z|^3 < 1$ und divergiert, wenn $\frac{3}{2}|z|^3 > 1$. Das bedeutet, sie konvergiert, wenn $|z| < \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ und divergiert, wenn $|z| > \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist somit $\rho = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

Sei nun $|z| = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, also $|z|^3 = \frac{2}{3}$. Dann gilt

$$\left|\frac{3^{(-1)^n n}}{2^n} z^{3n}\right| = \frac{3^{(-1)^n n}}{2^n}\frac{2^n}{3^n} = \frac{3^{(-1)^n n}}{3^n} = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade,} \\ \left(\frac{1}{9}\right)^n & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Weil diese Folge keine Nullfolge ist, kann die Reihe $\sum_{n\geq 0} 2^{-n} 3^{(-1)^n n} z^{3n}$ in diesem Fall nicht konvergieren.

(d) (d) Um den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^2(n+1)} z^{(n^2)}$ zu bestimmen, betrachten wir

$$\sqrt[n]{\left|\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n^2(n+1)} z^{(n^2)}\right|} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n(n+1)} |z|^n = (e_{n+1}|z|)^n$$

mit der aus der Vorlesung bekannten Folge (e_n) gegeben durch $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Es ist bekannt, dass $e_n \leq \mathrm{e}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei zunächst $|z| < \frac{1}{\mathrm{e}}$. Dann haben wir $e_{n+1}|z| \leq \mathrm{e}|z| < 1$ und somit

$$\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2(n+1)} z^{(n^2)}\right|} = (e_{n+1}|z|)^n \leq (\mathrm{e}|z|)^n \to 0,\ (n \to \infty).$$

Das heißt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2(n+1)} z^{(n^2)}\right|} = 0$ und das Wurzelkriterium liefert die Konvergenz der Reihe $\sum_n \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2(n+1)} z^{(n^2)}$.

Sei andererseits $|z| > \frac{1}{\mathrm{e}}$, also $|z| = \frac{1}{\mathrm{e}} + c$ für ein $c > 0$. Zu c gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $e_{n+1} \geq \mathrm{e} - c$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt wegen $e_n \geq 2$ und $1/\mathrm{e} < 1$ die Abschätzung

$$(e_{n+1}|z|)^n = \left(\frac{e_{n+1}}{\mathrm{e}} + ce_{n+1}\right)^n \geq \left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}} - \frac{c}{\mathrm{e}} + 2c\right)^n > (1-c+2c)^n = (1+c)^n.$$

für $n \geq n_0$. Die Folge $(1+c)^n$ ist unbeschränkt und hat keine konvergente Teilfolge. Insbesondere ist $\left(\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2(n+1)} z^{(n^2)}\right|}\right)_n$ unbeschränkt und nach dem Wurzelkriterium divergiert die Reihe $\sum_n \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2(n+1)} z^{(n^2)}$ in diesem Fall.

Die Potenzreihe konvergiert also für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{\mathrm{e}}$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \frac{1}{\mathrm{e}}$, also ist $\rho = \frac{1}{\mathrm{e}}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe.

Alternativer Lösungsvorschlag: Es ist

$$\sum_{n\geq 0} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2(n+1)} z^{(n^2)} = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

wobei wir

$$a_n := \begin{cases} \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)^{n(\sqrt{n}+1)} & \text{falls } n = m^2 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

gesetzt haben. Dann gilt

$$\sqrt[n^2]{|a_{n^2}|} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e_{n+1} \longrightarrow e \quad (n \to \infty).$$

Da $a_n = 0$ falls $n \in \mathbb{N}_0 \backslash \{m^2 \colon m \in \mathbb{N}_0\}$, folgt mit der letzten Bemerkung auf S.35 des Vorlesungsskriptes $H((\sqrt[n]{|a_n|})) = \{0, e\}$ (warum genau?) und mit Satz 3.35 daher $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e$. Damit ist $\rho = \frac{1}{e}$.

Aufgabe 43 (Trigonometrische Funktionen)

Zeigen Sie: Für alle $u, v \in \mathbb{C}$ gelten

$$\sin(u \pm v) = \sin(u)\cos(v) \pm \cos(u)\sin(v),$$
$$\cos(u \pm v) = \cos(u)\cos(v) \mp \sin(u)\sin(v).$$

Folgern Sie hieraus für $z, w \in \mathbb{C}$ die Identität

$$\sin(z) + \sin(w) = 2\sin\left(\tfrac{z+w}{2}\right)\cos\left(\tfrac{z-w}{2}\right).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 43

Seien $u, v \in \mathbb{C}$. Dann gilt nach dem Exponentialgesetz (Lemma 4.21) und der Euler-Identität (Satz 4.31)

$$\begin{aligned}\cos(u+v) + i\sin(u+v) = e^{i(u+v)} &= e^{iu}e^{iv} = \\ &[\cos(u) + i\sin(u)]\,[\cos(v) + i\sin(v)] \\ &= [\cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)] + i\,[\sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)]\,.\end{aligned}$$

Ersetzen wir in obiger Gleichung u durch $-u$ und v durch $-v$ und nutzen wir Lemma 4.32 aus dem Vorlesungsskript, erhalten wir

$$\begin{aligned}\cos(u+v) - i\sin(u+v) &= \cos(-u + (-v)) + i\sin((-u) + (-v)) \\ &= [\cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)] - i\,[\sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)]\,.\end{aligned}$$

Wir haben also die Gleichungen

$$\text{(I)}\quad \cos(u+v) + i\sin(u+v) = [\cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)] + i\,[\sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)]$$

$$\text{(II)}\quad \cos(u+v) - i\sin(u+v) = [\cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)] - i\,[\sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)]$$

Addition von Gleichungen (I) und (II) und Division durch 2 (bzw. Subtraktion von (II) von Gleichung (I) und Division durch $2i$) ergibt die gewünschten Gleichungen

$$\cos(u+v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v) \quad \text{und} \quad \sin(u+v) = \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v).$$

Ersetzen wir v durch $-v$, erhalten wir unter Verwendung von Lemma 4.32 aus dem bereits Bewiesenen

$$\cos(u-v) = \cos(u+(-v)) = \cos(u)\cos(-v) - \sin(u)\sin(-v) = \cos(u)\cos(v) + \sin(u)\sin(v)$$

$$\sin(u-v) = \sin(u+(-v)) = \sin(u)\cos(-v) + \cos(u)\sin(-v) = \sin(u)\cos(v) - \cos(u)\sin(v).$$

Somit haben wir insgesamt

$$\sin(u \pm v) = \sin(u)\cos(v) \pm \cos(u)\sin(v) \tag{1}$$

$$\cos(u \pm v) = \cos(u)\cos(v) \mp \sin(u)\sin(v) \tag{2}$$

gezeigt. Seien nun $z, w \in \mathbb{C}$. Wir setzen $u := \frac{z+w}{2} \in \mathbb{C}$ und $v := \frac{z-w}{2} \in \mathbb{C}$. Dann gilt $z = u + v$ und $w = u - v$ und aus (1) folgern wir daher

$$\begin{aligned}\sin(z) + \sin(w) &= \sin(u+v) + \sin(u-v) \\ &= [\sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)] + [\sin(u)\cos(v) - \cos(u)\sin(v)] \\ &= 2\sin(u)\cos(v) = 2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right).\end{aligned}$$

Aufgabe 44 (K) (Konvergenzradius von Potenzreihen II, Funktionsgrenzwerte)

(a) Sei (a_n) ein beschränkte Folge mit $\liminf_{n\to\infty}|a_n| > 0$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_n a_n z^n$.

(b) Es sei $\sum_{k\geq 0} a_k$ eine divergente Reihe in $(0,\infty)$ und die Potenzreihe $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ besitze den Konvergenzradius 1. Wir definieren

$$f_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(1-\frac{1}{n}\right)^k \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass (f_n) uneigentlich gegen ∞ konvergiert für $n \to \infty$.

Hinweis: Verwenden Sie die Bernouillische Ungleichung, um Terme der Form $(1-\frac{1}{n})^k$ *nach unten abzuschätzen.*

(c) Zeigen Sie, dass die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie deren Wert.

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+\alpha x+\beta}-x\right)$$

In (ii) seien hierbei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha, \beta \geq 0$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 44

(a) Sei (a_n) beschränkt und $\alpha := \underline{\lim}_{n\to\infty} |a_n| > 0$. Da (a_n) beschränkt ist, gibt es dann ein $M > 0$ mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da ferner $\alpha = \underline{\lim}_{n\to\infty} |a_n| > 0$ ist, gibt es nach Aufgabe 29 (a) einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n| \geq \frac{\alpha}{2} =: m \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Somit ist also $m \leq |a_n| \leq M$ für alle $n \geq n_0$ und damit auch

$$\sqrt[n]{m} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{M} \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Aus der Vorlesung sind die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M} = 1$ bekannt, sodass mit dem Sandwichkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

folgt. Somit folgern wir für den Konvergenzradius von $\sum_n a_n z^n$:

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = 1.$$

(b) Es sei $K > 0$. Da nach Voraussetzung $\sum_{n\geq 0} a_n$ divergent ist und $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt aus dem Monotoniekriterium für Reihen, dass $\sum_{n\geq 0} a_n$ unbeschränkt ist. Dies ist aber nach der 10. Übung äquivalent dazu, dass $(\sum_{n=0}^{N} a_n)_N$ für $N \to \infty$ uneigentlich gegen ∞ konvergiert. Also existiert ein $N \in \mathbb{N}_0$ so, dass

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \geq 2K \quad \text{für alle } n \geq N. \tag{3}$$

Wir setzen $N_K := 2N$. Dann folgern wir für alle $n \geq N_K$ mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung (BU)

$$f_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(1-\frac{1}{n}\right)^k \geq \sum_{k=0}^{N} a_k \left(1-\frac{1}{n}\right)^k \overset{\text{(BU)}}{\geq} \sum_{k=0}^{N} a_k \left(1-\frac{k}{n}\right). \tag{4}$$

Da aber nach Voraussetzung $n \geq N_k = 2N$ ist, gilt für alle $k \in \{0, 1, \dots, N\}$

$$1 - \frac{k}{n} \geq 1 - \frac{N}{n} \geq 1 - \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Nutzen wir dies in (4), so erhalten wir für alle $n \geq N_K$

$$f_n \geq \sum_{k=0}^{N} a_k \left(1 - \frac{k}{n}\right) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} a_k \overset{(3)}{\geq} \frac{1}{2}(2K) = K.$$

Da $K > 0$ beliebig gewählt war, folgt wie gewünscht $f_n \longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$.

(c) (i) Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$0 \leq \left| \frac{x_n^2}{|x_n|} \right| = \frac{|x_n|^2}{|x_n|} = |x_n| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty),$$

da mit $(x_n)_{n\geq 1}$ auch $(|x_n|)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist. Aus dem Sandwichkriterium folgt $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_n^2}{|x_n|} \right| = 0$ und damit auch $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{|x_n|}$ (denn eine Folge (y_n) ist eine Nullfolge genau dann, wenn $(|y_n|)$ eine Nullfolge ist). Da $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, beliebig gewählt war, folgt, dass $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|}$ existiert, und es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|} = 0.$$

(ii) Seien $\alpha, \beta \geq 0$ und $(x_n)_{n\geq 1}$ eine beliebige Folge mit $x_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Dann gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $x_n > 0$ für alle $n \geq n_0$. Für diese x_n gilt dann

$$\begin{aligned}\sqrt{x_n^2 + \alpha x_n + \beta} - x_n &= \frac{(\sqrt{x_n^2 + \alpha x_n + \beta})^2 - x_n^2}{\sqrt{x_n^2 + \alpha x_n + \beta} + x_n} \\ &= \frac{\alpha x_n + \beta}{\sqrt{x_n^2 + \alpha x_n + \beta} + x_n} = \frac{\alpha + \frac{\beta}{x_n}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{x_n} + \frac{\beta}{x_n^2}} + 1}.\end{aligned}$$

Nach Satz 4.23 (i) sind $(\frac{\alpha}{x_n})$, $(\frac{\beta}{x_n})$ und $(\frac{\beta}{x_n^2})$ Nullfolgen. Mit den Grenzwertsätzen und Aufgabe 21 b) folgt daher

$$\sqrt{x_n^2 + \alpha x_n + \beta} - x_n = \frac{\alpha + \frac{\beta}{x_n}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{x_n} + \frac{\beta}{x_n^2}} + 1} \longrightarrow \frac{\alpha + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{\alpha}{2} \quad (n \to \infty).$$

Da $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \to \infty$ für $n \to \infty$ beliebig gewählt war, folgt, dass $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2 + \alpha x + \beta} - x)$ existiert und es gilt

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2 + \alpha x + \beta} - x) = \frac{\alpha}{2}.$$