Institut für Analysis
Prof. Dr. Dorothee Frey
Yonas Mesfun, M.Sc.

WS 21/22
14.01.2022

Analysis I

11. Übungsblatt

Abgabe bis 21.01.2022, 12:00 Uhr

Aufgabe 45 (Stetigkeit)

(a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x - x^2, & x < 0, \\ c(x-2)^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

stetig ist.

(b) Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen stetig sind.

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) \coloneqq [x] = \max\{k \in \mathbb{Z}\colon k \leq x\},$

(ii) $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{n}, & \exists n \in \mathbb{N}\colon x = \frac{n-1}{n}, \\ 0, & x \in [0,1] \backslash \{\frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$

Aufgabe 46 (K) (ε-δ-Kriterium, Stetigkeit)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ stetig ist.

(b) Es sei

$$f\colon [0,1] \to [0,1], \quad f(x) \coloneqq \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 1-x, & \text{falls } x \in (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0,1]. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Punkte $x \in [0,1]$, in denen f stetig ist.

Aufgabe 47 (Stetigkeit und dichte Teilmengen, gleichmäßige Stetigkeit)

(a) Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f(q) = g(q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dann $f = g$ gilt, d.h., dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Es sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiere in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann f gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 48 (K) (Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit)

(a) Eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Funktionalgleichung $f(s+t) = f(s) + f(t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f linear ist, d.h., dass es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $f(q) = aq$ für ein $a \in \mathbb{R}$ und alle $q \in \mathbb{Q}$ und nutzen Sie dann Aufgabenteil 47 (a).

(b) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit.

(i) $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$,

(ii) $g\colon (0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{\min\{|x-a_n|, |x-a_{n+1}|\}}{|a_{n+1}-a_n|}$, falls $x \in (a_{n+1}, a_n]$ für ein $n \in \mathbb{N}$,

wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ eine strikt fallende Nullfolge mit $a_1 = 1$ sei.

Hinweis zu (i): Aufgabe 47 (b) könnte nützlich sein.

Aufgabe 49 (Monotone Funktionen)

(Diese Aufgabe wird u.a. in der Übung diskutiert.)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wachsend, d.h., für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \le y$ gilt $f(x) \le f(y)$. Sei weiterhin $x_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die links- und rechtsseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ existieren.

(b) Zeigen Sie $\lim_{x\to x_0-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x\to x_0+} f(x)$.

(c) Zeigen Sie: f ist stetig in $x_0 \iff \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x)$.