Institut für Analysis
Prof. Dr. Dorothee Frey
Yonas Mesfun, M.Sc.

WS 21/22
21.01.2022

Analysis I

12. Übungsblatt

Abgabe bis 28.01.2022, 12:00 Uhr

Aufgabe 50 (Zwischenwertsatz, Satz vom Minimum)

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Seien ferner $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq g(a)$ und $f(b) \geq g(b)$. Zeigen Sie, dass es ein $c \in [a,b]$ gibt mit $f(c) = g(c)$.

(b) Zeigen Sie, dass jedes reelle Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt.

(c) Seien $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x) < g(x)$ für alle $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass es ein $\delta > 0$ gibt mit $f(x) + \delta \leq g(x)$ für alle $x \in [0,1]$.

Aufgabe 51 (K) (Stetigkeit der Umkehrfunktion, Zwischenwertsatz)

(a) Der *Sinus hyperbolicus* ist definiert durch $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

(i) Zeigen Sie $\sinh(x) < \sinh(y)$ für $x < y$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$

(ii) Zeigen Sie, dass sinh bijektiv und $\sinh^{-1}$ stetig ist.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann besitzt f einen Fixpunkt, d.h., es existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$.

Aufgabe 52 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen (f_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Berechnen Sie gegebenenfalls auch die Grenzfunktion.

(i) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R};\ f_n(x) = nx(1-x)^n$,

(ii) $g_n : [a,1] \to \mathbb{R};\ g_n(x) = nx(1-x)^n$, wobei $a \in (0,1)$ sei.

Hinweis: Für $q \in [0,1)$ ist $(nq^n)_n$ eine Nullfolge (dies folgt z.B. daraus, dass die Reihe $\sum_{n\geq 0} nq^n$ nach dem Wurzelkriterium konvergiert.)

(b) Sei (f_n) eine Funktionenfolge mit $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ konvergiert.
Zeigen Sie: Gilt $f_n(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $f(x) \to 0$ $(x \to \infty)$.

Aufgabe 53 (K) (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz, Satz vom Maximum)

(a) Untersuchen Sie folgende Funktionenfolgen (f_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(i) $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R};\ f_n(x) = e^{-\frac{x}{n}}$, (ii) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f_n(x) = \dfrac{2x}{1+(nx)^2}$.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Gelten $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$ und für $x \to \infty$, so besitzt f ein Maximum.