Institut für Analysis
Prof. Dr. Dorothee Frey
Yonas Mesfun, M.Sc.

WS 21/22
21.01.2022

Analysis I

Lösungsvorschlag zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 50 (Zwischenwertsatz, Satz vom Minimum)

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Seien ferner $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq g(a)$ und $f(b) \geq g(b)$. Zeigen Sie, dass es ein $c \in [a, b]$ gibt mit $f(c) = g(c)$.

(b) Zeigen Sie, dass jedes reelle Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt.

(c) Seien $f, g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x) < g(x)$ für alle $x \in [0, 1]$. Zeigen Sie, dass es ein $\delta > 0$ gibt mit $f(x) + \delta \leq g(x)$ für alle $x \in [0, 1]$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 50

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, und $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq g(a)$ und $f(b) \geq g(b)$. Wir definieren

$$h\colon [a, b] \to \mathbb{R},\ h(x) = f(x) - g(x).$$

Dann ist h als Differenz stetiger Funktionen stetig (s. Rechenregeln auf S.74 des Vorlesungsskriptes) und es gilt

$$h(a) = f(a) - g(a) \leq 0 \quad \text{und } h(b) = f(b) - g(b) \geq 0.$$

Nach dem Nullstellensatz (Satz 5.18) existiert daher ein $c \in [a, b]$ mit $h(c) = 0$. Aus der Definition von h folgt nun wie gewünscht $f(c) = g(c)$.

(b) Seien $n \in \mathbb{N}$ ungerade und p ein reelles Polynom vom Grad n, d.h.,

$$p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reelle Koeffizienten sind mit $a_n \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $a_n = 1$ ist (denn es gilt $p(x) = 0$ genau dann, wenn $a_n^{-1}p(x) = 0$, und $a_n^{-1}p$ ist ein Polynom vom Grad n mit Koeffizienten $b_0, b_1, \ldots, b_n$ und $b_n = 1$). Für $x \neq 0$ erhalten wir unter Anwendung von Satz 4.23 (i) und Satz 5.6 (i)

$$\frac{p(x)}{x^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \longrightarrow 1 + 0 + \cdots + 0 + 0 = 1 \quad (x \to \pm\infty) \tag{1}$$

Insbesondere muss es Zahlen $a < 0$ und $b > 0$ geben mit

$$\frac{p(a)}{a^n} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{p(b)}{b^n} > 0$$

(denn anderenfalls wäre $p(x)/x^n \leq 0$ für alle $x \neq 0$, was mit Satz 5.6 (iii) auch $\lim_{x\to\infty} p(x)/x^n \leq 0$ und $\lim_{x\to-\infty} p(x)/x^n \leq 0$ nach sich ziehen würde, im Widerspruch zu (1)). Aus obigen Ungleichungen erhalten wir

$$p(a) < 0 \quad \text{und} \quad p(b) > 0,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $a^n < 0$ ist, da $a < 0$ und n ungerade ist. Da p als Polynom stetig ist, folgt aus dem Nullstellensatz die Existenz eines $x \in (a, b)$ mit $p(x) = 0$.

(c) Wir definieren

$$h\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ h(x) = g(x) - f(x).$$

Dann ist h als Differenz stetiger Funktionen stetig (s. Rechenregeln auf S.74 des Vorlesungsskriptes) und nach Voraussetzung gilt $h(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$. Da $[0,1]$ abgeschlossen und beschränkt und h stetig ist, hat h nach dem Satz vom Minimum ein Minimum, d.h., es existiert ein $x_0 \in [0,1]$, mit $h(x) \geq h(x_0) =: \delta > 0$. Aus der Definition von h erhalten wir hieraus sofort $f(x) + \delta \leq g(x)$ für alle $x \in [0,1]$.

Aufgabe 51 (K) (Stetigkeit der Umkehrfunktion, Zwischenwertsatz)

(a) Der *Sinus hyperbolicus* ist definiert durch $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

 (i) $\sinh(x) < \sinh(y)$ für $x < y$ und $\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$

 (ii) Zeigen Sie, dass sinh bijektiv und $\sinh^{-1}$ stetig ist.

(b) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann besitzt f einen Fixpunkt, d.h., es existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 51

(a) (i) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Da die Exponentialfunktion streng wachsend ist, folgt $e^x < e^y$ und wegen $-y < -x$ daher auch $e^{-y} < e^{-x}$ bzw. $-e^{-x} < -e^{-y}$. Wir folgern deshalb

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) < \frac{1}{2}(e^y - e^{-x}) < \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = \sinh(y).$$

Da sinh monoton ist, existieren die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} \sinh(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} \sinh(x)$ (s. Bemerkung zu Aufgabe 49) und es gelten

$$\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \sinh(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = \inf_{x\in\mathbb{R}} \sinh(x) = -\sup_{x\in\mathbb{R}} \sinh(x),$$

wobei wir für die letzte Gleichung $\inf A = -\sup(-A)$ für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ und $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ für $x \geq 0$ (nachrechnen!) verwendet haben. Aus der Vorlesung ist $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ bekannt. Hieraus folgt

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 \quad \text{für alle } x \geq 0.$$

und damit auch

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \geq \frac{1}{2}((1+x) - 1) = \frac{x}{2} \quad \text{für alle } x \geq 0.$$

Hieraus folgt, dass $\{\sinh(x)\colon x \geq 0\}$ nach oben unbeschränkt ist, womit $\sup_{x\in\mathbb{R}} \sinh(x) = \infty$ gilt. Wir folgern

$$\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \sinh(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\sup_{x\in\mathbb{R}} \sinh(x) = -\infty.$$

(ii) Wir wollen nun folgern, dass sinh bijektiv ist. Dazu müssen wir zeigen, dass sinh injektiv und surjektiv ist.
Injektivität: Wir haben bereits in (i) gezeigt, dass sinh streng wachsend ist. Insbesondere ist sinh injektiv.

Surjektivität: Sei $y \in \mathbb{R}$. Aus den Beziehungen $\lim_{x\to-\infty}\sinh(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty}\sinh(x) = \infty$ erhalten wir Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\sinh(a) < y < \sinh(b)$. Da sinh als Komposition stetiger Funktionen stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es ein $x \in (a, b)$ geben muss mit $\sinh(x) = y$. Dies zeigt, dass sinh surjektiv ist.
Insgesamt folgt also, dass sinh bijektiv ist. Da $\mathbb{R}$ ein Intervall und sinh strikt monoton und stetig ist, folgt aus Satz 5.21, dass $\sinh^{-1}$ stetig ist.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Da f beschränkt ist, existiert ein $M > 0$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiter ist mit f auch

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - x$$

stetig, und es gilt $g(-M) \geq 0$ und $g(M) \leq 0$. Nach dem Nullstellensatz muss ein $x \in [-M, M]$ existieren mit $g(x) = 0$, also $f(x) = x$.

Aufgabe 52 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen (f_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Berechnen Sie gegebenenfalls auch die Grenzfunktion.

(i) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R};\ f_n(x) = nx(1-x)^n$,

(ii) $g_n : [a,1] \to \mathbb{R};\ g_n(x) = nx(1-x)^n$, wobei $a \in (0,1)$ sei.

Hinweis: Für $q \in [0,1)$ ist $(nq^n)_n$ eine Nullfolge (dies folgt z.B. daraus, dass die Reihe $\sum_{n\geq 0} nq^n$ nach dem Wurzelkriterium konvergiert.)

(b) Sei (f_n) eine Funktionenfolge mit $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ konvergiert.
Zeigen Sie: Gilt $f_n(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $f(x) \to 0$ $(x \to \infty)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 52

(a) (i) Die Folge (f_n) konvergiert punktweise aber nicht gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen die Nullfunktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 0.$$

- **Punktweise Konvergenz**:
  Wir müssen zeigen, dass für jedes feste, aber beliebig gewählte $x \in [0,1]$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x) = 0$ konvergiert. Hierzu machen wir eine Fallunterscheidung:

  1. Fall: $x = 0$. Dann ist $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit gilt (trivialerweise) $f_n(0) \to 0$ für $n \to \infty$.

  2.Fall: $x \in (0,1]$. Mit dem Hinweis (setze $q := 1 - x \in [0,1)$) erhalten wir

  $$0 \leq f_n(x) = nx(1-x)^n \leq n(1-x)^n \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

  Nach dem Sandwichlemma gilt also $f_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$.
  Insgesamt haben wir also gezeigt: Für alle $x \in [0,1]$ gilt $f_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$ und damit die punktweise Konvergenz von (f_n) gegen f.

- **Gleichmäßige Konvergenz**:
Angenommen, (f_n) würde gleichmäßig gegen f konvergieren. Dann gälte $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$, und für jede Folge (x_n) in $[0,1]$ erhielten wir dann die Abschätzung

$$0 \le f_n(x_n) = |f_n(x_n) - f(x_n)| \le \|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty),$$

also nach dem Sandwichlemma $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0$. Insbesondere gälte $\lim_{n\to\infty} f_n(\frac{1}{n}) = 0$. Allerdings ist

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \neq 0 \quad (n \to \infty).$$

Widerspruch!

(ii) Sei $a \in (0,1)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist g_n die Einschränkung von f_n auf $[a,1]$, und da f_n nach Aufgabenteil (a) punktweise gegen f konvergiert, ist klar, dass auch (g_n) punktweise gegen die Einschränkung von f auf $[a,1]$ konvergiert, d.h., gegen $g\colon [a,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) = 0$. Die Funktionenfolge (g_n) konvergiert sogar gleichmäßig gegen g: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt nämlich

$$|g_n(x) - g(x)| = g_n(x) = nx(1-x)^n \le n(1-a)^n \quad \text{für alle } x \in [a,1],$$

$$\Longrightarrow \|g_n - g\|_\infty \le n(1-a)^n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

da $1 - a \in (0,1)$. Nach dem Sandwichkriterium gilt also $\|g_n - g\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$. Somit konvergiert g_n gleichmäßig gegen g.

(b) Wir benutzen die Charakterisierung aus Lemma 5.5. Sei hierfür $\varepsilon > 0$. Wir müssen nun ein $K > 0$ finden, sodass $|f(x)| \le \varepsilon$ für alle $x \ge K$. Da (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_{n_0} - f\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Da nach Voraussetzung $f_{n_0}(x) \to 0$ für $x \to \infty$ gilt, existiert ferner nach Lemma 5.5 ein $K > 0$ mit

$$|f_{n_0}(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x \ge K. \tag{3}$$

Nun erhalten wir aus (2) und (3) für alle $x \ge K$

$$|f(x)| \le |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x)| \le \|f_{n_0} - f\|_\infty + |f_{n_0}(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt also aus Lemma 5.5, dass $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$.

Aufgabe 53 (K) (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz, Satz vom Maximum)

(a) Untersuchen Sie folgende Funktionenfolgen (f_n) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

$$\text{(i)} \quad f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R};\ f_n(x) = e^{-\frac{x}{n}}, \qquad \text{(ii)} \quad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f_n(x) = \frac{2x}{1 + (nx)^2}.$$

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Gelten $f(x) \ge 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$ und für $x \to \infty$, so besitzt f ein Maximum.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 53

(a) (i) Die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = 1$: Denn für jedes feste $x \in [0, \infty)$ ist $(-\frac{x}{n})_n$ eine Nullfolge, sodass aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{x}{n}} = e^{(\lim_{n\to\infty} -\frac{x}{n})} = e^0 = 1$$

folgt. Allerdings ist die Konvergenz nicht gleichmäßig, denn es gilt

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Wir wollen (4) beweisen. Sei hierzu $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $|f_n - f| = f - f_n$ ist nichtnegativ und wachsend (warum genau?), also gilt (s. die Bemerkung zu Aufgabe 49)

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,\infty)} (f(x) - f_n(x)) = \lim_{x\to\infty} (f(x) - f_n(x)). \tag{5}$$

Nun gilt nach Vorlesung $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \geq 0$, also

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{1+x} \to 0 \quad (x \to \infty),$$

wobei wir zuletzt Satz 4.23 (i) verwendet haben. Aus der Stetigkeit der n-ten Wurzel folgt daher auch

$$f_n(x) = e^{-\frac{x}{n}} = (e^{-x})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e^{-x}} \to \sqrt[n]{0} = 0 \quad (x \to \infty).$$

Hieraus, aus (5) und Satz 5.6 (i) folgt nun wie gewünscht

$$\|f - f_n\|_\infty = \lim_{x\to\infty} (f(x) - f_n(x)) = \lim_{x\to\infty} (1 - f_n(x)) = 1 - 0 = 1.$$

Somit gilt (4), sodass $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ keine Nullfolge sein kann. Damit konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig gegen f.

Bemerkung: Zur Widerlegung der gleichmäßigen Konvergenz muss man nicht explizit die Supremumsnorm $\|f_n - f\|_\infty$ für $n \in \mathbb{N}$ berechnen (dies haben wir nur deshalb getan, weil dies hier einfach möglich ist). Man kann stattdessen z.B. auch wie folgt argumentieren. Setzen wir $x_n := n$ für $n \in \mathbb{N}$, so folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = |e^{-1} - 1| = 1 - e^{-1}.$$

Insbesondere kann $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ keine Nullfolge sein, d.h., $(f_n)_n$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen f.

(ii) Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 0$ (und damit auch insbesondere punktweise). Zunächst bemerken wir, dass für $a > 0$ die Ungleichung $\frac{2a}{1+a^2} \leq 1$ gilt, denn wir haben

$$(1 - a)^2 \geq 0 \iff 1 - 2a + a^2 \geq 0 \iff \frac{2a}{1+a^2} \leq 1.$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung erhalten wir (mit $a := n|x|$)

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{2|x|}{1 + (nx)^2} = \frac{1}{n} \frac{2n|x|}{1 + (n|x|)^2} \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in \mathbb{R},$$

und damit

$$0 \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n} \to 0, \quad \text{für } n \to \infty.$$

Also konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f (und damit auch insbesondere punktweise).

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, sodass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$ und für $x \to \infty$ gelte. Wir müssen zeigen, dass f ein Maximum besitzt. Dabei können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x_0) > 0$ (denn anderenfalls wäre $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit trivialerweise $\max_{\mathbb{R}} f = 0$). Wir wollen nun Lemma 5.5 mit irgendeinem $\varepsilon > 0$ anwenden, das $0 < \varepsilon < f(x_0)$ erfüllt, und entscheiden uns für $\varepsilon := f(x_0)/2$. Da nach Voraussetzung $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ gilt, existieren nach Lemma 5.5 Konstanten $K_1, K_2 > 0$ mit

$$0 \leq f(x) \leq \frac{f(x_0)}{2} \quad \text{für alle } x \geq K_1,$$

$$0 \leq f(x) \leq \frac{f(x_0)}{2} \quad \text{für alle } x \leq -K_2.$$

Setzen wir $K := \max\{K_1, K_2\} > 0$, erhalten wir aus obigen Ungleichungen

$$0 \leq f(x) \leq \frac{f(x_0)}{2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \geq K. \tag{6}$$

Insbesondere folgt hieraus $|x_0| < K$, also $x_0 \in (-K, K)$, da anderenfalls $0 \leq f(x_0) \leq \frac{f(x_0)}{2}$ nach (6) gelten würde. Dies ist aber nur möglich, wenn $f(x_0) = 0$ gilt, im Widerspruch zur Wahl von x_0.
Andererseits ist mit f auch die Einschränkung von f auf das Intervall $I := [-K, K]$, d.h., die Funktion

$$g\colon I \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x)$$

stetig. Nach dem Satz vom Maximum hat g ein Maximum, d.h., es existiert ein $x_1 \in I$ mit $f(x_1) = g(x_1) = \max_I g = \max_I f$. Da x_0 in I liegt (s.o.), erhalten wir sofort $f(x_1) \geq f(x_0)$ und mit (6) daher

$$f(x_1) \geq f(x_0) > \frac{f(x_0)}{2} \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \geq K. \tag{7}$$

Andererseits gilt nach Definition von x_1

$$f(x_1) = \max_{[-K,K]} f \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in [-K, K]. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt schließlich

$$f(x_1) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \text{ also } f(x_1) = \max_{\mathbb{R}} f.$$

Also besitzt f ein Maximum.