Analysis I

13. Übungsblatt

Abgabe bis 04.02.2022, 12:00 Uhr

Aufgabe 54 (Ableitungen, Differenzierbarkeit)

(a) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = \cosh x := \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\big)$, (ii) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R};\ f(x) = \log|x|$,

(iii) $f : \big(-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\big) \to \mathbb{R};\ f(x) = (8 - x)\tan(5x)$, (iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = \cos x \arctan x$.

(b) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \geq 0, \\ \cos x, & x < 0. \end{cases}$$

Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist f stetig; differenzierbar; dreimal differenzierbar?

Aufgabe 55 (K) (Kettenregel, Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie deren Ableitung.

(i) $f : (1, \infty) \to \mathbb{R};\ f(x) = \log(\log x)$, (ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = |x^2 - 4|^3$,

(iii) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R};\ f(x) = x^{(2^x)}$, (iv) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R};\ f(x) = \dfrac{(x + \sin x \cos x + 3)^{5/3}}{\mathrm{e}^x - \sin x}$.

(b) In Aufgabe 51 haben wir gezeigt, dass $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ bijektiv ist. Zeigen Sie, dass $\sinh^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung von $\sinh^{-1}$ auf zwei verschiedene Arten:

(i) indem Sie $\sinh^{-1}$ als Komposition differenzierbarer Funktionen darstellen, und

(ii) indem Sie den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion verwenden.

Hinweis: In (ii) können Sie $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *verwenden.*

Aufgabe 56 (Ableitung der Umkehrfunktion, Leibnizregel)

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion die Ableitung von $\arccos : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, wobei arccos die Umkehrfunktion von $\cos : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ ist.

(b) Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $n \in \mathbb{N}$ und $f, g\colon I \to \mathbb{R}$, n-mal differenzierbar. Zeigen Sie: Das punktweise Produkt $f \cdot g\colon I \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$, ist dann auch n-mal differenzierbar und es gilt:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Aufgabe 57 (K) (Differenzierbarkeit $\neq$ Stetige Differenzierbarkeit)

(a) Sei $\beta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x\to 0+} x^\beta \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \text{ existiert} \iff \lim_{x\to 0+} x^\beta \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) \text{ existiert} \iff \beta > 0,$$

und obige Grenzwerte sind, sofern sie existieren, null.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

stetig; differenzierbar; stetig differenzierbar?

Aufgabe 58 (Gleichmäßige Konvergenz)

Diese Aufgabe wird u.a. in der Übung besprochen.

Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$f_n\colon [a,b] \to \mathbb{C}, \quad f_n(x) := f\left(\frac{[nx]}{n}\right),$$

wobei die Gaußklammer $[\cdot]$ für $y \in \mathbb{R}$ durch $[y] := \max\{k \in \mathbb{Z}\colon k \leq y\}$ definiert ist. Zeigen Sie, dass $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f konvergiert.