Analysis I

Lösungsvorschlag zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 54 (Ableitungen, Differenzierbarkeit)

(a) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = \cosh x := \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\big)$, (ii) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R};\ f(x) = \log|x|$,

(iii) $f : \big(-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\big) \to \mathbb{R};\ f(x) = (8-x)\tan(5x)$, (iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = \cos x \arctan x$.

(b) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \geq 0, \\ \cos x, & x < 0. \end{cases}$$

Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist f stetig; differenzierbar; dreimal differenzierbar?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 54

(a) (i) Nach der Kettenregel ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $g_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_a(x) = e^{ax}$ differenzierbar und es gilt $g_a'(x) = ae^{ax}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Aus der Linearität der Ableitung folgt daher für $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(\tfrac{1}{2}g_1 + \tfrac{1}{2}g_{-1}\right)'(x) = \tfrac{1}{2}g_1'(x) + \tfrac{1}{2}g_{-1}'(x) = \tfrac{1}{2}e^x - \tfrac{1}{2}e^{-x} = \sinh(x).$$

(ii) Nach Vorlesung ist $\log\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung $\log'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$. Weiterhin ist die Funktion $g\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$ differenzierbar und es gilt $g'(x) = \operatorname{sgn}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, wobei

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Nun folgt aus der Kettenregel für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$f'(x) = (\log \circ g)'(x) = \log(g(x))g'(x) = \frac{1}{|x|}\operatorname{sgn}(x) = \frac{1}{x}.$$

(iii) Nach der 13. Übung und der Kettenregel ist die Funktion $g\colon (-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \tan(5x)$ differenzierbar und für die Ableitung gilt $g'(x) = 5(\cos(5x))^{-2}$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10})$. Weiter ist nach Vorlesung die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 8 - x$ differenzierbar und es gilt $h'(x) = -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach der Produktregel gilt also für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$f'(x) = (h \cdot g)'(x) = h'(x)g(x) + h(x)g'(x) = -\tan(5x) + (8-x)5(\cos(5x))^{-2}.$$

(iv) Aus der Produktregel erhalten wir für $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (\cos \cdot \arctan)'(x) = \cos'(x)\arctan(x) + \cos(x)\arctan'(x) = -\sin(x)\arctan(x) + \frac{\cos(x)}{1+x^2}.$$

(b) Die Funktion

$$f \text{ ist } \begin{cases} \text{stetig} & \text{genau dann, wenn } c = 1, \\ \text{differenzierbar} & \text{genau dann, wenn } b = 0, c = 1, \\ \text{dreimal stetig differenzierbar} & \text{genau dann, wenn } a = -\frac{1}{2}, b = 0, c = 1. \end{cases}$$

Nach Definition ist $f|_{[0,\infty)} = p$ und $f|_{(-\infty,0)} = q$, wobei $p\colon [0,\infty) =: I \to \mathbb{R}$, $p(x) = ax^2 + bx + c$ und $q\colon (-\infty, 0) := J \to \mathbb{R}$, $q(x) = \cos(x)$. Durch vollständige Induktion erhalten wir, dass p und q beliebig oft differenzierbar sind (d.h., k-mal differenzierbar für jedes $k \in \mathbb{N}$). Hieraus folgt, dass f auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ beliebig oft differenzierbar ist. Also hängt die k-malige Differenzierbarkeit von f nur vom Punkt $x_0 = 0$ ab. Mit Induktion zeigt man, dass für $k \in \mathbb{N}$ (bzw. $k = 0$) die Funktion f genau dann k-mal differenzierbar (bzw. stetig) ist, wenn

$$p^{(j)}(0) = q^{(j)}(0) \quad \text{für alle } j = 0, 1, \ldots, k.$$

(mit der Konvention, dass $p^{(0)} := p$, $q^{(0)} = q$). Nun gilt

$$\begin{aligned} &p(x) = ax^2 + bx + c, && p'(x) = 2ax + b, && p''(x) = 2a, && p'''(x) = 0, \\ &q(y) = \cos(y), && q'(y) = -\sin(y), && q''(y) = -\cos(y), && q'''(y) = \sin(y) \end{aligned}$$

für alle $x \in I$ und $y \in J$. Also ist

$$f \text{ ist } \begin{cases} \text{stetig} & \Leftrightarrow p(0) = q(0) \Leftrightarrow c = 1, \\ \text{differenzierbar} & \Leftrightarrow p'(0) = q'(0), c = 1 \Leftrightarrow b = 0, c = 1, \\ \text{zweimal differenzierbar} & \Leftrightarrow p''(0) = q''(0), b = 0, c = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 0, c = 1. \end{cases}$$

Da $p'''(0) = 0 = q'''(0)$ (unabhängig von $a, b, c \in \mathbb{R}$) gilt, ist f für $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = 1$ nicht nur zweimal, sondern sogar dreimal differenzierbar.

Aufgabe 55 (K) (Kettenregel, Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie deren Ableitung.

(i) $f : (1,\infty) \to \mathbb{R};\ f(x) = \log(\log x)$, (ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = |x^2 - 4|^3$,

(iii) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R};\ f(x) = x^{(2^x)}$, (iv) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R};\ f(x) = \dfrac{(x + \sin x \cos x + 3)^{5/3}}{\mathrm{e}^x - \sin x}$.

(b) In Aufgabe 51 haben wir gezeigt, dass $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ bijektiv ist. Zeigen Sie, dass $\sinh^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung von $\sinh^{-1}$ auf zwei verschiedene Arten:

(i) indem Sie $\sinh^{-1}$ als Komposition differenzierbarer Funktionen darstellen, und

(ii) indem Sie den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion verwenden.

Hinweis: In (ii) können Sie $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *verwenden.*

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 55

(a) (i) Zunächst einmal ist f wohldefiniert, da die Menge $\log((1,\infty)) = (0,\infty)$ im Definitionsbereich des log liegt. Nach Vorlesung ist $\log\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für die Ableitung gilt $\log'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$. Somit ist f nach der Kettenregel differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = (\log\circ\log)'(x) = \ln'(\log(x))\cdot\log'(x) = \frac{1}{\log(x)}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\log(x)} \quad \text{für alle } x \in (1,\infty).$$

(ii) Die Funktion $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(y) = |y|^3 = \begin{cases} y^3 & \text{für } y \geq 0,\\ -y^3 & \text{für } y < 0,\end{cases}$$

ist differenzierbar mit Ableitung $g'(y) = 3y|y|$ für $y \in \mathbb{R}$: Für $y \neq 0$ folgt dies direkt aus Beispiel (d), S.93 Vorlesungskript, und für $y = 0$ folgt ebenfalls mit Beispiel (d), S.93 Vorlesungsskript, da

$$\frac{\mathrm{d}^+ g}{\mathrm{d}y}(0) = 3y^2|_{y=0} = 0 \quad\text{und}\quad \frac{\mathrm{d}^- g}{\mathrm{d}y}(0) = -3y^2|_{y=0} = 0$$

und damit $g'(0) = 0$. Somit erhalten wir aus der Kettenregel, dass f differenzierbar ist und für die Ableitung gilt

$$f'(x) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(g(x^2-4)\big) = g'(x^2-4)\cdot 2x = 6x|x^2-4|(x^2-4).$$

(iii) Gemäß der Definition von Potenzen mir reellen Exponenten gilt $f(x) = x^{2^x} = e^{\log(x)2^x} = e^{\log(x)e^{\log(2)x}}$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$. Also ist $f = \exp\circ g$ mit $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log(x)e^{\log(2)x}$. Damit ist g als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Nach der Kettenregel ist damit auch f differenzierbar und wir erhalten für $x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} f'(x) = (\exp\circ g)'(x) = \exp(g(x))g'(x) &= f(x)\left[\frac{1}{x}e^{\log(2)x} + \log(x)\log(2)e^{\log(2)x}\right]\\ &= x^{2^x}2^x\left(\frac{1}{x} + \log(2)\log(x)\right). \end{aligned}$$

(iv) Zunächst einmal ist f wohldefiniert, da für $x \in \mathbb{R}_+$ einerseits $x + \sin(x)\cos(x) + 3 \geq 0 - 1 + 3 = 2 \geq 0$ gilt (und damit gebrochene Potenzen hiervon definiert sind) und andererseits wegen $e^x - \sin(x) > 1 - \sin(x) \geq 0$ für $x > 0$ die Nennerfunktion nullstellenfrei ist. Die Zählerfunktion g und die Nennerfunktion h sind als Kompositionen differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Nach der Quotientenregel ist damit auch $f = \frac{g}{h}$ differenzierbar und für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = \frac{\frac{5}{3}(x+\sin x\cos x+3)^{2/3}(1+\cos^2 x - \sin^2 x)[e^x - \sin x] - [x + \sin x\cos x + 3]^{5/3}[e^x - \cos(x)]}{(e^x-\sin x)^2}$$

(b) (i) Wir berechnen zunächst $\sinh^{-1}$. Sei hierfür $y \in \mathbb{R}$. Da wir bereits in Aufgabe 51 bewiesen haben, dass sinh bijektiv ist, gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\sinh(x) = y$, also

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = y \iff e^x(e^x - e^{-x}) = 2ye^x \iff (e^x)^2 - 2y(e^x) - 1 = 0$$

$$\iff (e^x - y)^2 = 1 + y^2 \iff e^x = y \pm \sqrt{1+y^2}.$$

Da $e^x > 0$ und $y < \sqrt{1+y^2}$ gelten, muss $e^x = y + \sqrt{1+y^2}$, also $x = \log(y + \sqrt{1+y^2})$ sein. Damit ist

$$\sinh^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sinh^{-1}(y) = \log(y + \sqrt{1+y^2}).$$

Mit der Kettenregel folgern wir nun für $y \in \mathbb{R}$

$$(\sinh^{-1})'(y) = \log'\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) = \frac{1}{y + \sqrt{1+y^2}} \left(1 + \frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{y + \sqrt{1+y^2}} \left(\frac{y + \sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

(ii) Sei $y \in \mathbb{R}$. Da $\sinh'(x) = \cosh(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, können wir den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion anwenden und erhalten

$$(\sinh^{-1})'(y) = \frac{1}{\sinh'(\sinh^{-1}(y))} = \frac{1}{\cosh(\sinh^{-1}(y))}.$$

Aus $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ und $\cosh(x) > 0$ folgt $\cosh^2(x) = \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit erhalten wir für $y \in \mathbb{R}$

$$(\sinh^{-1})'(y) = \frac{1}{\cosh(\sinh^{-1}(y))} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\sinh^{-1}(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Aufgabe 56 (Ableitung der Umkehrfunktion, Leibnizregel)

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion die Ableitung von $\arccos : (-1,1) \to \mathbb{R}$, wobei arccos die Umkehrfunktion von $\cos : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ ist.

(b) Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $n \in \mathbb{N}$ und $f, g \colon I \to \mathbb{R}$, n-mal differenzierbar. Zeigen Sie: Das punktweise Produkt $f \cdot g \colon I \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$, ist dann auch n-mal differenzierbar und es gilt:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 56

(a) Nach der 13.Übung gilt $\cos' = -\sin$, und da $\sin(y) \neq 0$ für alle $y \in \arccos((-1,1)) = (0,\pi)$, können wir die Umkehrregel anwenden und erhalten dann für alle $x \in (-1,1)$

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))},$$

wobei sich die rechte Seite mit Hilfe des trigonometrischen Pythagoras vereinfachen lässt: Für $y \in (0,\pi)$ gilt $\sin(y) > 0$ und daher können wir aus $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$ die Gleichung $\sin(y) = \sqrt{1 - \cos^2(y)}$ folgern. Da $\arccos((-1,1)) = (0,\pi)$ gilt, erhalten wir daher

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos(\arccos(x))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{für alle } x \in (-1,1).$$

(b) Der Beweis der Leibnizregel funktioniert genauso wie der Beweis des binomischen Lehrsatzes; wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion. Für $n = 1$ folgt die Aussage unmittelbar aus der Produktregel (IA). Es sei die Aussage wahr für ein $n \in \mathbb{N}$ (IV), und seien nun $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ $n+1$-mal differenzierbar. Nach der (IV) gilt dann

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Da sowohl f als auch g nach Annahme $n+1$-mal differenzierbar sind, ist nach der Produktregel $f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$ einmal differenzierbar für alle $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Aus der Linearität der Ableitung folgt, dass damit auch $(f \cdot g)^{(n)}$ einmal differenzierbar ist und mit der (IV) und der Linearität der Ableitung (LIN) erhalten wir

$$\begin{aligned}(f \cdot g)^{(n+1)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(f \cdot g)^{(n)}\right] &\overset{\text{(IV)}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}\right) \\ &\overset{\text{(LIN)}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}\right).\end{aligned}$$

Für die rechte Seite der obigen Gleichung erhalten wir mit der Produktregel (PR)

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}\right) \\ &\overset{\text{(PR)}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} \cdot g^{(n-k)} + f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} \cdot g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)} \\ &= f^{(n+1)} \cdot g + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)} \cdot g^{(n-k)}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)}\right) + f \cdot g^{(n+1)} \\ &= f^{(n+1)} \cdot g + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)}\right) + f \cdot g^{(n+1)} \\ &= f^{(n+1)} \cdot g + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)} + f \cdot g^{(n+1)} \\ &= f^{(n+1)} \cdot g + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)} + f \cdot g^{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)}.\end{aligned}$$

Aufgabe 57 (K) (Differenzierbarkeit $\neq$ Stetige Differenzierbarkeit)

(a) Sei $\beta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x \to 0+} x^{\beta} \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \text{ existiert} \iff \lim_{x \to 0+} x^{\beta} \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) \text{ existiert} \iff \beta > 0,$$

und obige Grenzwerte sind, sofern sie existieren, null.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

stetig; differenzierbar; stetig differenzierbar?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 57

(a) Wir zeigen nur

$$\lim_{x\to 0+} x^\beta \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \text{ existiert} \iff \lim_{x\to 0+} x^\beta \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) = 0 \iff \beta > 0,$$

der Beweis der Äquivalenz „$\lim_{x\to 0+} x^\beta \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert $\Leftrightarrow \lim_{x\to 0+} x^\beta \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \beta > 0$ “ geht analog.

„ $\Longleftarrow$ “: Sei $\beta > 0$. Da die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\beta$ stetig ist, haben wir für $x \to 0+$

$$0 \leq |x^\beta \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)| = |x^\beta| \, |\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)| \leq x^\beta \to 0,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $|\sin(y)| \leq 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt. Nach dem Sandwich-kriterium folgt damit $\lim_{x\to 0+} x^\beta \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

„$\Longrightarrow$“: Angenommen, $\lim_{x\to 0+} x^\beta \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert. Wir definieren die Folgen $(x_n) = \left((\frac{\pi}{2} + 2\pi n)^{-1}\right)$ und $(y_n) = ((2\pi n)^{-1})$. Offenbar gelten $x_n \searrow 0$ und $y_n \searrow 0$ für $n \to \infty$. Wäre nun $\beta < 0$, so wäre

$$x_n^\beta \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-\beta} \cdot 1 = e^{-\ln(\frac{\pi}{2}+2\pi n)\beta} \to \infty \quad (n \to \infty),$$

da $-\beta > 0$; dies stünde allerdings im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\lim_{x\to 0^+} x^\beta \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert. Wäre weiter $\beta = 0$, so wäre

$$x_n^\beta \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

$$y_n^\beta \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = \sin(2\pi n) = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

also $\lim_{n\to\infty} x_n^\beta \sin(\frac{1}{x_n}) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} y_n^\beta \sin(\frac{1}{y_n})$, im Widerspruch dazu, dass $\lim_{x\to 0+} x^\beta \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert. Also muss $\beta > 0$ sein.

(b) Die Funktion

$$g \text{ ist} \begin{cases} \text{stetig} & \iff \alpha > 0, \\ \text{differenzierbar} & \iff \alpha > 1, \\ \text{stetig differenzierbar} & \iff \alpha > 2. \end{cases} \tag{1}$$

Für den Beweis von (1) benutzen wir folgendes

Lemma: Sei $\beta \in \mathbb{R}$. Die Funktionen $h_{1,\beta}\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und $h_{2,\beta}\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h_{1,\beta}(x) = \begin{cases} x^\beta \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad h_{2,\beta}(x) = \begin{cases} x^\beta \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

sind genau dann stetig, falls $\beta > 0$.

Beweis: Die Funktionen $h_{1,\beta}$ und $h_{2,\beta}$ sind als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig auf $(0, \infty)$ (unabhängig von $\beta \in \mathbb{R}$), also sind die Funktionen genau dann auf $[0, \infty)$ stetig, wenn sie im Punkt $x_0 = 0$ stetig sind. Letzteres ist nach (a) aber äquivalent dazu, dass $\beta > 0$ ist.

□

Sei nun g so wie in der Aufgabenstellung und $\alpha \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe des obigen Lemmas können wir nun die Behauptung (1) leicht beweisen:

- *Stetigkeit*: Da $g = h_{1,\alpha}$ gilt, ist g nach obigem Lemma genau dann stetig, wenn $\alpha > 0$ ist.
- *Differenzierbarkeit*: Die Funktion $(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ ist nach Vorlesung für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ differenzierbar, die Funktion $(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist nach der 13. Übung und der Kettenregel differenzierbar, sodass auch g nach der Produktregel auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist. Für $x > 0$ gilt hierbei
$$g'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^\alpha \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \alpha h_{1,\alpha-1}(x) - h_{2,\alpha-2}(x).$$
Daher ist die Funktion g genau dann auf $[0, \infty)$ differenzierbar, wenn g im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn der Grenzwert
$$\lim_{x \to 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0+} x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0+} h_{1,\alpha-1}(x)$$
existiert. Nach Aufgabenteil (a) ist dies aber genau dann der Fall, wenn $\alpha - 1 > 0$, also $\alpha > 1$ ist. In diesem Fall gilt zusammengefasst
$$g'(x) = \alpha h_{1,\alpha-1}(x) - h_{2,\alpha-2}(x) \quad \text{für alle } x \in [0, \infty) \tag{2}$$
- *Stetige Differenzierbarkeit*: Es gilt
$$g \text{ ist stetig differenzierbar} \iff \alpha > 2.$$
„$\Longleftarrow$": Ist $\alpha > 2$, so ist g nach dem bereits Bewiesenen differenzierbar und für die Ableitung gilt (2). Nach obigem Lemma sind wegen $\alpha > 2$ die Funktionen $h_{1,\alpha-1}$ und $h_{2,\alpha-2}$ stetig, und nach (2) damit auch g'. Also ist g stetig differenzierbar.
„$\Longrightarrow$": Sei g stetig differenzierbar. Dann ist g insbesondere differenzierbar und nach dem bereits Bewiesenen gilt $\alpha > 1$. An (2) erkennen wir $h_{2,\alpha-2} = g' - \alpha h_{1,\alpha-1}$. Da die rechte Seite der Gleichung stetig ist (g' ist stetig, da g nach Voraussetzung stetig differenzierbar ist und $h_{1,\alpha-1}$ ist nach obigem Lemma stetig wegen $\alpha > 1$), muss es auch die linke Seite sein. Aus obigem Lemma folgt dann sofort $\alpha > 2$.

Bemerkung: Insbesondere folgt für $\alpha = 2$, dass g zwar differenzierbar, aber *nicht* stetig differenzierbar ist. Also folgt aus Differenzierbarkeit keine stetige Differenzierbarkeit!

Aufgabe 58 (Gleichmäßige Konvergenz)

Diese Aufgabe wird u.a. in der Übung besprochen.

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir
$$f_n\colon [a, b] \to \mathbb{C}, \quad f_n(x) := f\left(\frac{[nx]}{n}\right),$$
wobei die Gaußklammer $[\cdot]$ für $y \in \mathbb{R}$ durch $[y] := \max\{k \in \mathbb{Z}\colon k \leq y\}$ definiert ist. Zeigen Sie, dass $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f konvergiert.