Institut für Analysis
Prof. Dr. Dorothee Frey
Yonas Mesfun, M.Sc.

WS 21/22
04.02.2022

Analysis I

14. Übungsblatt

Abgabe bis 11.02.2022, 12:00 Uhr

Aufgabe 59 (Extrema, Ungleichungen)

(a) Bestimmen Sie, falls existent, lokale und globale Extrema der folgenden Funktionen.

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^n e^{-x} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \text{ fest},\\
&\text{(ii)} \quad g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{\log x}{x},\\
&\text{(iii)} \quad h\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = (1+x)\sqrt{|x|}.
\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen.

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad 1 - \frac{1}{x} < \log x < x - 1 \quad \text{für } x > 1,\\
&\text{(ii)} \quad \sqrt{x} > \log x \quad \text{für } x \geq \mathrm{e}^2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 60 (K) (Ungleichungen, Mittelwertsatz)

(a) Zeigen Sie die Ungleichung

$$\arcsin x \leq \tfrac{\pi}{2} + 2x\sqrt{1-x^2} \quad \text{für } x \in [-1,1].$$

Untersuchen Sie dazu die Extremalstellen der Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \arcsin(x) - 2x\sqrt{1-x^2}$.

Hinweis: Es gilt $\sin(\pm\frac{\pi}{6}) = \pm\frac{1}{2}$.

(b) Es sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(0) = 0$ und es existiere ein $c > 0$ und ein $\alpha > 0$ mit $|f'(x)| \leq c|x|^\alpha$ für alle $x \in [-1,1]$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} f(\frac{1}{n})$ absolut konvergiert.

Aufgabe 61 (Konvexe Funktionen, Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel)

(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie:

(i) Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in I$ sowie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ liegt die sogenannte Konvexkombination $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ ebenfalls in I.

(íi) Sind $x_1, \ldots, x_n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ wie oben, dann gilt die Jensensche Ungleichung

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

(b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$. Zeigen Sie

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n).$$

Hinweis: Führen Sie einen Induktionsbeweis und nutzen Sie für den Induktionsschritt die Youngsche Ungleichung.

Aufgabe 62 (K) (Extrema, „Zwischenwertsatz für Ableitungen“)

(a) Eine unbekannte Größe $x \in \mathbb{R}$ wird n-mal gemessen. Es ergeben sich Messwerte $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Der mittlere quadratische Fehler ist durch

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x - a_k)^2$$

gegeben. Für welches $x \in \mathbb{R}$ wird dieser Fehler minimal? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(a) < f'(b)$. Zeigen Sie: Für jedes $m \in (f'(a), f'(b))$ existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = m$.

Hinweis zu (b): Betrachten Sie die Hilfsfunktion $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - mx$ und zeigen Sie, dass die Stelle ihres Minimums in (a,b) liegt. Nutzen Sie dann das notwendige Kriterium für lokale Extrema.

Aufgabe 63 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

Diese Aufgabe wird u.a. in der Übung besprochen.

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) := n\left(f(x + \tfrac{1}{n}) - f(x)\right).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $f_n \to f'$ punktweise für $n \to \infty$,

(b) Ist f' gleichmäßig stetig, so konvergiert $(f_n)_{n\geq 1}$ sogar gleichmäßig gegen f'.

Erinnerung: Anmeldung für den Übungsschein

Denken Sie bitte daran, dass Sie sich im Campus Management System (`https://campus.studium.kit.edu/`) für den Übungsschein angemeldet haben müssen, damit wir Ihnen (bei Erfüllen der Kriterien) den Übungsschein verbuchen können. Die Anmeldefrist für den Übungsschein läuft **bis zum 13.02.2022, 23:59 Uhr**. Nach dieser Frist ist eine Anmeldung nicht mehr möglich.