

# Analysis I

## 15. Übungsblatt

– keine Abgabe, keine Korrektur –

Die Lösungen dieses Übungsblatts werden in der letzten Übung besprochen.

### Aufgabe 64 (L'Hospitalsche Regel)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{e^x - 1}, & \text{(b)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right), \\ \text{(c)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{a}{x} \right)^x, & \text{(d)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \end{aligned}$$

wobei  $a \in \mathbb{R}$  in Aufgabenteil (c) sei.

### Aufgabe 65 (Satz von Taylor)

- (a) Bestimmen Sie die Taylorreihe  $T(f, x_0)$  von  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$  im Entwicklungspunkt  $x_0 := 1$ . Konvergiert  $T(f, x_0)$  punktweise gegen  $f$ ?
- (b) Berechnen Sie  $\tan(1/10)$  näherungsweise mit Hilfe des Taylorpolynoms  $T_3(\tan, 0)$ . Zeigen Sie auch, dass der Fehler nicht größer als  $\frac{10}{3} \cdot 10^{-4}$  ist.

### Aufgabe 66 (Differenzieren von Potenzreihen)

- (a) Sei  $x \in (-1, 1)$ . Berechnen Sie den Reihenwert von  $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ .
- (b) Zeigen Sie

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$