Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Dorothee Frey
Yonas Mesfun, M.Sc.

WS 21/22
11.02.2022

Analysis I

15. Übungsblatt

– keine Abgabe, keine Korrektur –
Die Lösungen dieses Übungsblatts werden in der letzten Übung besprochen.

Aufgabe 64 (L'Hospitalsche Regel)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\mathrm{e}^x - 1}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}\right)$,

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$, (d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$,

wobei $a \in \mathbb{R}$ in Aufgabenteil (c) sei.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 64

(a) Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2x)$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x - 1$. Dann sind f und g differenzierbar und es gilt $f'(x) = 2\cos(2x)$ und $g'(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da f' und g' stetig sind, gilt

$$f'(x) \to f'(0) = 2\cos(0) = 2 \quad \text{und} \quad g'(x) \to g'(0) = e^0 = 1 \quad \text{für } x \to 0,$$

und daher mit Satz 5.6 (ii)

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \frac{2}{1} = 2 \quad (x \to 0).$$

Aus der L'Hospitalschen Regel folgern wir nun

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\mathrm{e}^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 2.$$

(b) Wir wollen die L'Hospitalsche Regel anwenden. Für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\backslash\{0\}$ ist

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\sin(x) - x}{x\sin(x)} =: \frac{f(x)}{g(x)},$$

wobei wir $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x) - x$ und $g\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x\sin(x)$ definiert haben. Es sind f, g (unendlich oft) differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \cos(x) - 1 \quad \text{und} \quad g'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$$

für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Aus der Stetigkeit von f' und g' folgt $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$ und $\lim_{x\to 0} g'(x) = g'(0) = 0$, sodass nicht klar ist, ob $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert. Also leiten wir nochmal ab und erhalten für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$f''(x) = -\sin(x) \quad \text{und} \quad g'(x) = \cos(x) + \cos(x) - x\sin(x) = 2\cos(x) - x\sin(x).$$

Aus der Stetigkeit von f'' und g'' folgt nun $\lim_{x\to 0} f''(x) = f''(0) = 0$ und $\lim_{x\to 0} g''(x) = g''(0) = 2$, sodass mit Satz 5.6 (ii) $\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{0}{2} = 0$ folgt. Somit folgt aus der L'Hospitalschen Regel, dass $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ tatsächlich existiert und dass $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 0$ ist. Eine nochmalige Anwendung der L'Hospitalschen Regel zeigt nun, dass $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert und dass $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$. Wir erhalten also

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

(c) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Ist $a = 0$, so ist $(1 + \frac{a}{x})^x = 1 = e^0$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$, also insbesondere $\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^0$. Daher nehmen wir im Folgenden $a \neq 0$ an. Dann ist $(1 + \frac{a}{x})^x = e^{\log(1+\frac{a}{x})x}$ für $x > -a$ definiert. Für $x \to \infty$ gilt $\frac{a}{x} \to 0$ und aus der Differenzierbarkeit von log in 1 folgt

$$x \log\left(1 + \frac{a}{x}\right) = a \frac{\log\left(1 + \frac{a}{x}\right) - \log(1)}{(1 + \frac{a}{x}) - 1} \to a \log'(1) = a \quad \text{für } x \to \infty$$

(alternativ kann man wieder die L'Hospitalsche Regel anwenden:

$$\lim_{x\to\infty} x \log\left(1 + \frac{a}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(1 + \frac{a}{x})}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{a}{x^2} \frac{1}{1+\frac{a}{x}}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{a}{1 + \frac{a}{x}} = a,$$

wobei wieder die Gleichungskette von rechts nach links zu lesen ist). Also folgt aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^{\ln(1+\frac{a}{x})x} \to e^a \quad (x \to \infty).$$

(d) Hier führt die Regel von de L'Hospital nicht zum Ziel, da $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$ gilt! Für $x \to \infty$ haben wir aber

$$\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{2x}} \longrightarrow \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

Damit ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = 1.$$

Aufgabe 65 (Satz von Taylor)

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe $T(f, x_0)$ von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ im Entwicklungspunkt $x_0 := 1$. Konvergiert $T(f, x_0)$ punktweise gegen f?

(b) Berechnen Sie $\tan(1/10)$ näherungsweise mit Hilfe des Taylorpolynoms $T_3(\tan, 0)$. Zeigen Sie auch, dass der Fehler nicht größer als $\frac{10}{3} \cdot 10^{-4}$ ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 65

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Per Induktion folgern wir

$$f^{(n)}(1) = f(1) = e \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Also ist die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ gegeben durch

$$T(f, x_0)(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{e}{n!}(x-1)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $T(f, x_0)(x)$ gegen $f(x)$, da

$$e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} = e^1 e^{x-1} \overset{(*)}{=} e^x = f(x),$$

wobei wir in $(*)$ das Exponentialgesetz verwendet haben. Also konvergiert $T(f, x_0)$ punktweise gegen f.

(b) Nach der Produkt- und Kettenregel gelten

$$\begin{aligned}
\tan^{(1)} &= 1 + \tan^2, \\
\tan^{(2)} &= 2\tan\cdot\tan' = 2\tan\left(1+\tan^2\right) = 2\tan + 2\tan^3, \\
\tan^{(3)} &= 2\tan' + 6\tan^2\tan' = 2(1+\tan^2) + 6\tan^2(1+\tan^2) = 6\tan^4 + 8\tan^2 + 2, \\
\tan^{(4)} &= 24\tan^3\tan' + 16\tan\tan' = 24\tan^3(1+\tan^2) + 16\tan(1+\tan^2) \\
&= 24\tan^5 + 40\tan^3 + 16\tan.
\end{aligned}$$

Da $\tan(0) = 0$ ist, folgt aus obigen Gleichungen $\tan^{(1)}(0) = 1$, $\tan^{(2)} = 0$, $\tan^{(3)}(0) = 2$. Somit ist $T_3(\tan, 0)$ gegeben durch

$$T_3(\tan, 0)(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{\tan^{(n)}}{n!} x^n = x + \frac{1}{3}x^3 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist $T_3(\tan, 0)(\frac{1}{10}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{3000} = \frac{301}{3000}$. Für die Fehlerabschätzung benutzen wir die Lagrange Restglieddarstellung. Aus dieser folgt, dass es für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ein $\xi_x \in (0, x)$ gibt mit

$$|R_3(\tan, 0)(x)| = |\tan(x) - T_3(\tan, 0)(x)| = \frac{1}{4!}|\tan^{(4)}(\xi_x)|\, x^4 \leq \frac{\sup_{y\in[0,x]} |\tan^{(4)}(y)|}{4!} x^4. \tag{1}$$

Nun gilt $|\tan^{(4)}(y)| = \tan^{(4)}(y) \leq 80$ für $y \in [0, \frac{\pi}{4}]$, da

$$\tan^{(4)}(y) = 24\tan^5(y) + 40\tan^3(y) + 16\tan(y) \leq 24\cdot 1 + 40\cdot 1 + 16\cdot 1 = 80,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass tan wachsend ist und daher $0 = \tan(0) \leq \tan(y) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ für alle $y \in [0, \frac{\pi}{4}]$ gilt. Nutzen wir dies in (**??**), erhalten wir

$$|R_3(\tan, 0)(x)| \leq \frac{\sup_{y\in[0,x]} |\tan^{(4)}(y)|}{4!} x^4 \leq \frac{80}{4!} x^4 = \frac{10}{3} x^4 \quad \text{für alle } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

Insbesondere folgt $|R_3(\tan, 0)(1/10)| \leq \frac{10}{3} \cdot 10^{-4}$.

Aufgabe 66 (Differenzieren von Potenzreihen)

(a) Sei $x \in (-1, 1)$. Berechnen Sie den Reihenwert von $\sum_{n\geq 1} n x^{n-1}$.

(b) Zeigen Sie

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 66

(a) Sei

$$f\colon (-1,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

wobei wir für die zweite Gleichung Beispiel 3.2 b) genutzt haben (Reihenwert der geometrischen Reihe). Offensichtlich ist f differenzierbar und es gilt $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ für $x \in (-1,1)$. Andererseits können wir Korollar 5.31 verwenden und erhalten für die Ableitung

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad \text{für alle } x \in (-1,1).$$

Somit folgern wir, dass $\sum_{n\geq 1} n x^{n-1}$ konvergiert und für den Reihenwert gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{für alle } x \in (-1,1).$$

(b) Wir betrachten die Potenzreihe $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ für alle $x \in (-1,1)$. Die Potenzreihe hat Konvergenzradius $\rho = 1$. Also ist die Funktion

$$f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

wohldefiniert. Da Potenzreihen im Inneren ihrer Konvergenzscheibe differenzierbar sind, erhalten wir für $x \in (-1,1)$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} = \arctan'(x).$$

Also gilt für $g \coloneqq f - \arctan$, dass $g' = 0$ ist. Damit ist g konstant, d.h., $g(x) = g(0) = f(0) - \arctan(0) = 0$ für alle $x \in (-1,1)$. Hieraus folgt die Behauptung.