Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
[redacted]

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Analysis II

27.09.2018

Aufgabe 1:
Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y\left(\sqrt{5+|x|}-\sqrt{5}\right)^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Bestimmen Sie sämtliche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ in denen f stetig ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Behauptung: f ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig.

Beweis: Da $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ offen ist, ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig. Es bleibt die Stetigkeit in $(0,0)$ zu prüfen. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x,y)-f(0,0)| &= \left|\frac{y(\sqrt{5+|x|}-\sqrt{5})^2}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{y(\sqrt{5+|x|}-\sqrt{5})^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{(\sqrt{5+|x|}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{5+|x|}+\sqrt{5})^2}\right| \\ &= \left|\frac{y(5+|x|-5)^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{5+|x|}+\sqrt{5})^2}\right| = \frac{|y|x^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{5+|x|}+\sqrt{5})^2} \\ &\leq \frac{|y|}{(\sqrt{5+|x|}+\sqrt{5})^2} \to 0 \quad ((x,y)\to(0,0)), \end{aligned}$$

wobei in der letzten Abschätzung die Ungleichung $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ verwendet wurde. Damit folgt $f(x,y) \to f(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$ und somit ist f auch in $(0,0)$ stetig. Insgesamt ist f also stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$. □

Aufgabe 2:
Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := 2x^2 - x^4 - y^2 + \mathrm{e}^{-y^2} \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.

(ii) Berechnen Sie $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ und $\sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) *Behauptung:* f hat in $(1,0)$ und $(-1,0)$ lokale Maxima.

Beweis: f ist zweimal stetig partiell differenzierbar, also gilt $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Die notwendige Bedingung für lokale Extrema in $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lautet

$$0 \overset{!}{=} f'(x,y) = (4x-4x^3,\ -2y-2y\mathrm{e}^{-y^2}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(1-x^2) = 0, \\ -2y(1+\mathrm{e}^{-y^2}) = 0. \end{cases}$$

Lösen dieses Gleichungssystems liefert die stationären Punkte $(0,0)$, $(1,0)$ und $(-1,0)$.
Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4-12x^2 & 0 \\ 0 & -2+2(2y^2-1)\mathrm{e}^{-y^2} \end{pmatrix}.$$

- $(0,0)$: Hier gilt $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ und somit $\det(H_f(0,0)) = -16 < 0$, d.h. $H_f(0,0)$ ist indefinit. Nach Satz 8.2 hat f in $(0,0)$ also kein lokales Extremum.
- $(1,0)$: Hier gilt $H_f(1,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ und somit $\det(H_f(1,0)) = 32 > 0$ und $(H_f(1,0))_{11} = -8$, d.h. $H_f(1,0)$ ist negativ definit. Nach Satz 8.2 hat f in $(1,0)$ also ein lokales Maximum.
- $(-1,0)$: Hier gilt $H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ und somit $\det(H_f(-1,0)) = 32 > 0$ und $(H_f(-1,0))_{11} = -8$, d.h. $H_f(-1,0)$ ist negativ definit. Nach Satz 8.2 hat f in $(-1,0)$ also ein lokales Maximum.

□

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -\infty$ und $\sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = 2$

Beweis: Es gilt $f(x,y) = 1-(x^2-1)^2-y^2+\mathrm{e}^{-y^2}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, d.h $f(x,y) \to -\infty$ für $\|(x,y)\| \to \infty$. Damit gilt $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -\infty$. Weiter gilt $f(1,0) = f(-1,0) = 2$. Da dies die einzigen lokalen Extrema sind, folgt $\sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \max\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = 2$. □

Aufgabe 3:

(i) Formulieren Sie den Mittelwertsatz im $\mathbb{R}^n$.

(ii) Sei $R > 0$ und $D_R := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < R\}$, sowie $f_R\colon D_R \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_R(x) := -(1+\|x\|)\mathrm{e}^{-\|x\|} \quad \text{für alle } x \in D_R.$$

Zeigen Sie, dass f_R auf D_R differenzierbar ist und geben Sie die Ableitung an.

(iii) Zeigen Sie, dass f_R auf D_R Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante

$$L_R = \begin{cases} R\mathrm{e}^{-R}, & \text{falls } R \leq 1, \\ \frac{1}{\mathrm{e}}, & \text{falls } R > 1. \end{cases}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(i) Der Mittelwertsatz im $\mathbb{R}^n$ besagt:
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $D \neq \emptyset$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Weiter seien $x,y \in D$ mit $S[x,y] \subseteq D$. Dann existiert ein $\xi \in S[x,y]$ mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)\cdot(x-y).$$

(ii) *Behauptung:* f_R ist auf D_R differenzierbar mit Ableitung $f_R'(x) = x\mathrm{e}^{-\|x\|}$ für alle $x \in D_R$.

Beweis: Auf $D_R \setminus \{0\}$ ist f_R differenzierbar nach der Kettenregel mit Ableitung $f_R'(x) = x\mathrm{e}^{-\|x\|}$ für alle $x \in D_R \setminus \{0\}$. (Beachte: $\|\cdot\|$ ist in 0 nicht differenzierbar.) Für $x = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\|h\|\to 0}\left|\frac{f_R(h)-f_R(0)-0\cdot h}{\|h\|}\right| &= \lim_{\|h\|\to 0}\left|\frac{-(1+\|h\|)\mathrm{e}^{-\|h\|}+1}{\|h\|}\right| \\ &= \lim_{r\to 0+}\left|\frac{-(1+r)\mathrm{e}^{-r}+1}{r}\right| = \frac{d}{dr}\left(-(1+r)\mathrm{e}^{-r}\right)\Big|_{r=0} \\ &= r\mathrm{e}^{-r}\Big|_{r=0} = 0, \end{aligned}$$

d.h. es gilt $f_R'(0) = 0$. Also ist f_R auf ganz D_R differenzierbar mit Ableitung $f_R'(x) = x\mathrm{e}^{-\|x\|}$ für alle $x \in D_R$. □

(iii) *Behauptung:* f_R auf D_R Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante

$$L_R = \begin{cases} R\mathrm{e}^{-R}, & R \le 1, \\ \frac{1}{\mathrm{e}}, & R > 1. \end{cases}$$

Beweis: f_R ist nach Teil (ii) differenzierbar mit

$$f_R'(x) = x\mathrm{e}^{-\|x\|} \quad \text{für alle } x \in D_R.$$

Da D_R offen, konvex und nichtleer ist, existiert zu $x, y \in D_R$ nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in S[x,y] \subseteq D$ mit

$$f_R(x) - f_R(y) = f_R'(\xi) \cdot (x-y) \quad \Rightarrow \quad |f_R(x) - f_R(y)| = |f_R'(\xi) \cdot (x-y)| \le \|f_R'(\xi)\|\|x-y\|.$$

Mit der Abbildung $\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\varphi(r) := r\mathrm{e}^{-r}$ gilt $\|f_R'(\xi)\| = \|\xi\|\mathrm{e}^{-\|\xi\|} = \varphi(\|\xi\|)$. Weiter ist φ differenzierbar mit Ableitung $\varphi'(r) = (1-r)\mathrm{e}^{-r}$. Somit erhält man

$$\varphi'(r) \begin{cases} > 0, & r \in [0,1), \\ < 0, & r \in (1,\infty), \end{cases}$$

d.h. φ ist auf $[0,1)$ streng monoton wachsend, auf $(1,\infty)$ streng monoton fallend und hat in 1 ein globales Maximum. Außerdem gilt $\varphi(r) \le \varphi(1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$ für alle $r \ge 1$. Daher ist

$$\tilde{\varphi}\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ \tilde{\varphi}(r) := \begin{cases} \varphi(r) = r\mathrm{e}^{-r}, & r \le 1, \\ \frac{1}{\mathrm{e}}, & r > 1 \end{cases}$$

monoton wachsend und es gilt $\varphi(r) \le \tilde{\varphi}(r)$ für alle $r \in [0,\infty)$. Damit erhält man

$$\|f_R'(\xi)\| = \varphi(\|\xi\|) \le \tilde{\varphi}(\|\xi\|) \le \tilde{\varphi}(R),$$

also die gesuchte Lipschitz-Konstante. □

Aufgabe 4:
Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}$ von 1 und eine stetig differenzierbare Funktion $g = (g_1, g_2)\colon U \to \mathbb{R}^2$ mit $g(1) = (1,0)$ existiert, sodass $(x, g_1(x), g_2(x))$ für alle $x \in U$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 z \arctan(y) + \mathrm{e}^z &= 1, \\ xy^2 + \sin(xz) &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

löst. Bestimmen Sie außerdem $g'(1)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
Behauptung: Es existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}$ von 1 und eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}^2$ mit $g(1) = (1,0)$, sodass $(x, g(x))$ für alle $x \in U$ das Gleichungssystem (1) löst.

Beweis: Da alle Komponentenfunktionen von

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ F(x,y,z) := (x^2 z \arctan(y) + \mathrm{e}^z - 1,\ xy^2 + \sin(xz) - 1) \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

stetig partiell differenzierbar sind, gilt $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ mit

$$F'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz\arctan(y) & \frac{x^2 z}{1+y^2} & x^2\arctan(y) + \mathrm{e}^z \\ y^2 + z\cos(xz) & 2xy & x\cos(xz) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ und somit $\frac{\partial F}{\partial(y,z)}(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{4}+1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. es gilt $\det \frac{\partial F}{\partial(y,z)}(1,1,0) = -(\frac{\pi}{2}+2) \neq 0$. Außerdem gilt $F(1,1,0) = 0$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen existieren eine offene Umgebung von 1 und eine Funktion $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ mit $g(1) = (1,0)$ und $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$. Da ein Tupel $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung (1) genau dann löst, wenn $F(x,y,z) = 0$, folgt die Behauptung. □

Behauptung: Es gilt $g'(1) = (-\frac{1}{2}, 0)$.

Beweis: Der Satz über implizit definierte Funktionen liefert

$$g'(1) = -\left(\frac{\partial F}{\partial(y,z)}(1,1,0)\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,0)\right) = \frac{2}{\pi+4}\begin{pmatrix} 1 & -(\frac{\pi}{4}+1) \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Aufgabe 5:
Zeigen Sie, dass es genau ein $f_* \in C([0,1], \mathbb{R})$ gibt mit

$$f_*(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x f_*(t)\,dt \quad \text{für alle } x \in [0,1]. \tag{2}$$

Bestimmen Sie außerdem f_*.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:
Behauptung: Es gibt genau ein $f_* \in C([0,1], \mathbb{R})$, welches (2) erfüllt.

Beweis: Sei $X := C([0,1], \mathbb{R})$. Nach der Vorlesung ist X ein Banachraum. Definiere die Abbildung $F\colon X \to X$ durch

$$F(f)(x) := 1 + \frac{1}{2}\int_0^x f(t)\,dt \quad \text{für alle } x \in [0,1].$$

(Beachte: $F(f)$ ist nach dem Hauptsatz stetig für $f \in X$.) Dann gilt für $f, g \in X$:

$$\begin{aligned} \|F(f) - F(g)\|_\infty &= \|1 + \frac{1}{2}\int_0^x f(t)\,dt - 1 - \frac{1}{2}\int_0^x g(t)\,dt\|_\infty = \max_{x\in[0,1]}\left|\frac{1}{2}\int_0^x (f(t) - g(t))\,dt\right| \\ &\le \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty \max_{x\in[0,1]}\int_0^x 1\,dt \le \frac{1}{2}\|x-y\|_\infty, \end{aligned}$$

d.h. F ist kontrahierend auf X. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert also genau ein Fixpunkt $f_* \in X$ mit $f_* = F(f_*)$, also erfüllt f_* die Gleichung (2). □

Behauptung: Es gilt $f_*(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ für alle $x \in [0,1]$.

Beweis: Setzt man $f_0 \equiv 0$, so erhält man für $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= F(f_0)(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x 0\,dt = 1, \\ f_2(x) &= F(f_1)(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x 1\,dt = 1 + \frac{x}{2}, \\ f_3(x) &= F(f_2)(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x \left(1 + \frac{t}{2}\right)dt = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Man vermutet somit $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k$ $(x \in [0,1])$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und beweist dies mittels vollständiger Induktion:
IA: Es gilt $1 = f_1(x) = \sum_{k=0}^{1-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k$ $(x \in [0,1])$.
IV: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k$ $(x \in [0,1])$.
IS $(n \rightsquigarrow n+1)$: Für $x \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= F(f_n)(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x f_n(t)\,dt \underset{\text{IV}}{=} 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^k\int_0^x t^k\,dt \\ &= 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{x^{k+1}}{k+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k \end{aligned}$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz erhält man also $f_*(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ für alle $x \in [0,1]$. □

Hinweis: Alternativ kann hier auch das Anfangswertproblem

$$f_*' = \frac{1}{2}f_*, \quad f_*(0) = 1$$

gelöst werden.

Aufgabe 6:
Der Weg $\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$\gamma(t) := (t,\, \sin(t),\, \cos(t)) \quad \text{für alle } t \in [0,\pi].$$

(i) Berechnen Sie die Weglänge $L(\gamma)$. Ist γ nach der Weglänge parametrisiert?

(ii) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x,y,z) := (z,\, xz,\, z - xy) \quad \text{für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Berechnen Sie $\int_\gamma f(x,y,z) \cdot d(x,y,z)$.

(iii) Berechnen Sie $\int_\gamma (1+z)e^{x+y}\, ds$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(i) <u>*Behauptung:*</u> Es gilt $L(\gamma) = \sqrt{2}\pi$.

<u>*Beweis:*</u> Alle Komponentenfunktionen von γ sind differenzierbar, also gilt $\gamma \in C^1([0,\pi],\mathbb{R}^3)$ mit $\gamma'(t) = (1, \cos(t), -\sin(t))$ für alle $t \in [0,\pi]$. Daher gilt

$$L(\gamma) = \int_0^\pi \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2(t) + \sin^2(t)}\, dt = \sqrt{2}\pi.$$

Wegen $\sqrt{2}\pi \neq \pi$ ist γ nicht nach der Weglänge parametrisiert. □

(ii) <u>*Behauptung:*</u> Es gilt $\int_\gamma f(x,y,z) \cdot d(x,y,z) = \frac{1}{2}\pi^2$.

<u>*Beweis:*</u> Es gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x,y,z)\cdot d(x,y,z) &= \int_0^\pi f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^\pi (\cos(t) + t\cos^2(t) - \cos(t)\sin(t) + t\sin^2(t))\, dt \\ &= \int_0^\pi \left(\cos(t) + t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right) dt = \left[\sin(t) + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}\cos(2t)\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi^2.\end{aligned}$$

□

(iii) <u>*Behauptung:*</u> Es gilt $\int_\gamma (1+z)e^{x+y}\, ds = \sqrt{2}(e^\pi - 1)$.

<u>*Beweis:*</u> Die Weglängenfunktion lautet $s\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $s(t) = \sqrt{2}t$. Damit gilt

$$\int_\gamma (1+z)e^{x+y}\, ds = \int_0^\pi (1+\cos(t))e^{t+\sin(t)}\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\left[e^{t+\sin(t)}\right]_0^\pi = \sqrt{2}(e^\pi - 1).$$

□

Aufgabe 7:
Berechnen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:
<u>*Behauptung:*</u> Die Lösung des Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ y(x) = (2\cosh(x),\, -e^x,\, 2\cosh(x)).$$

<u>*Beweis:*</u> Zunächst berechnet man die Eigenwerte der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det(A - \lambda I) = (\lambda+1)(\lambda-1)^2$, d.h. A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$. Für die Eigenräume gilt:

- <u>$\lambda_1 = -1$:</u> $E_{-1} = \ker(A - \lambda_1 I) = \operatorname{span}\{(1,0,1)^T\}$.
- <u>$\lambda_2 = 1$:</u> $E_1 = \ker(A - \lambda_2 I) = \operatorname{span}\{(1,1,0)^T, (2,0,1)^T\}$.

Damit ist die allgemeine Lösung der DGL gegeben durch

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x,$$

wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Einsetzen des Anfangswertes liefert $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ und $c_3 = 1$, d.h.

$$y(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x = \begin{pmatrix} 2\cosh(x) \\ -e^x \\ 2\cosh(x) \end{pmatrix}.$$

□