Analysis 2 – Frühjahr 2018

Aufgabe 1 Sei $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es existiere $a = \lim_{t\to 0} g(t)$. Weiter sei $f(x,y) := xg\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ differenzierbar ist und $f'(0,0) = (a,0)$ gilt.

Lösung. Für $t \neq 0$ gelten

$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{tg(|t|)}{t} = g(|t|) \to a \quad \text{für } t \to 0$$

und

$$\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0.$$

Also ist f in $(0,0)$ partiell differenzierbar und es gilt $f_x(0,0) = a$ und $f_y(0,0) = 0$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} q(x,y) &:= \frac{|f(x,y)-f(0,0)-xf_x(0,0)-yf_y(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{\big|xg\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)-ax\big|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\|(x,y)\|}\big|g(\|(x,y)\|)-a\big| \\ &\leq \big|g(\|(x,y)\|)-a\big|. \end{aligned}$$

Somit gilt $0 \leq q(x,y) \leq \big|g(\|(x,y)\|)-a\big| \to 0$ für $(x,y) \to (0,0)$ wie behauptet. □

Aufgabe 2 Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = 2x^3 + 3e^{2y} - 6xe^y.$$

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.
b) Ist f nach unten beschränkt?
c) Ist f nach oben beschränkt?

Lösung. a) Die Funktion f ist zweimal stetig differenzierbar und es gilt

$$f'(x,y) = (6x^2 - 6e^y, 6e^{2y} - 6xe^y)$$

sowie

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6e^y \\ -6e^y & 12e^{2y} - 6xe^y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Es gilt $f'(x,y) = (0,0)$ genau dann wenn $x^2 = e^y$ und $x = e^y$ gilt. Also ist notwendigerweise $x^2 = x$ und somit $x = 0$ oder $x = 1$. Da es für $e^y = 0$ keine Lösung gibt, ist die einzige kritische Stelle bei $(1,0)$. Die obige Rechnung zeigt

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\big(H_f(1,0)\big)_{11} = 12 > 0$ und $\det H_f(1,0) = 12 \cdot 6 - 6 \cdot 6 > 0$, also ist $H_f(1,0)$ positiv definit. Daher liegt in $(1,0)$ ein lokales Minimum vor.
b), c) Es gilt $f(x,0) = 2x^3 + 3 - 6x \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$. Also ist f weder nach unten noch nach oben beschränkt. □

Aufgabe 3 Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt, $K^\circ \neq \emptyset$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Zeigen Sie, dass es $(x_0,y_0) \in \partial K$ mit $f(x_0,y_0) \neq 0$ gibt.

Lösung. Angenommen es gelte $f(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in \partial K$. Da K kompakt ist, existieren $a,b \in K$ mit

$$f(a) \leq f(x,y) \leq f(b) \qquad \text{für alle } (x,y) \in K. \tag{$*$}$$

Wegen $f'(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ hat f keine lokalen Extremstellen und es folgt $a,b \in \partial K$. Nun gilt nach Annahme $f(a) = 0 = f(b)$ und damit folgt mit $(*)$, dass $f(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in K$ gilt. Insbesondere gilt $f'(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in K^\circ$, ein Widerspruch zur Annahme. Also ist die Annahme falsch und es folgt die Behauptung. □

Aufgabe 4 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(1) = 0$ und $f'(1) = 2$.
Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung von $(1,1)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ mit

$$g(1,1) = 1 \quad \text{und} \quad g(x,y) = x + yf\big(g(x,y)\big) \quad \text{für alle } (x,y) \in U.$$

Berechnen Sie $g'(1,1)$.

Lösung. Definiere $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $F(x,y,z) = x + yf(z) - z$. Dann ist F stetig differenzierbar und es gilt $F(1,1,1) = 0$ sowie $F_z(x,y,z) = yf'(z) - 1$, also $F_z(1,1,1) = 2 - 1 = 1 \neq 0$. Der Satz über implizit definierte Funktionen liefert nun eine Umgebung U und eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ wie behauptet.
Es gilt nun $g(x,y) = x + yf\big(g(x,y)\big)$ für alle $(x,y) \in U$. Es folgt

$$g_x(x,y) = 1 + yf'\big(g(x,y)\big)g_x(x,y)$$

und

$$g_y(x,y) = f\big(g(x,y)\big) + yf'\big(g(x,y)\big)g_y(x,y).$$

Also gilt insbesondere

$$g_x(1,1) = 1 + f'(1)g_x(1,1) = 1 + 2g_x(1,1)$$

und

$$g_y(1,1) = 2g_y(1,1).$$

Aus diesen Gleichungen folgt schließlich $g'(1,1) = (-1,0)$. □

Aufgabe 5 Für $f \in C[0,1]$ definiere

$$(Tf)(x) := 2 + \sin(x) \int_0^x \sqrt{t} f(t) \, dt, \qquad \text{für alle } x \in [0,1].$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
a) Für jedes $f \in C[0,1]$ gilt $Tf \in C[0,1]$.
b) Es gibt genau ein $f_0 \in C[0,1]$ mit $Tf_0 = f_0$.

Lösung. a) Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist die Abbildung $x \mapsto \int_0^x \sqrt{t} f(t) \, dt$ für $x \in [0,1]$ eine stetige Funktion. Da Summe und Produkte von stetigen Funktionen wieder stetig sind, gilt $Tf \in C[0,1]$.
b) Seien $f, g \in C[0,1]$ und $x \in [0,1]$. Es gilt

$$\begin{aligned}
|Tf(x) - Tg(x)| &= \left| \sin(x) \int_0^x \sqrt{t}(f(t) - g(t)) \, dt \right| \\
&\leq |\sin(x)| \int_0^x \sqrt{t} \, |f(t) - g(t)| \, dt \\
&\leq \|f - g\|_\infty \int_0^x \sqrt{t} \, dt \\
&\leq \|f - g\|_\infty \int_0^1 \sqrt{t} \, dt \\
&= \frac{2}{3} \|f - g\|_\infty.
\end{aligned}$$

Bildet man nun das Supremum über $x \in [0,1]$, so sieht man $\|Tf - Tg\|_\infty \leq \frac{2}{3}\|f - g\|_\infty$, d.h., T ist eine Kontraktion. Nach a) ist T zudem eine Selbstabbildung des vollständigen Raumes $C[0,1]$. Die Behauptung folgt somit aus dem Fixpunktsatz von Banach. □

Aufgabe 6 Der Weg $\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\gamma(t) = (e^t \sin(t), e^t \cos(t)).$$

a) Berechnen Sie die Weglänge $L(\gamma)$.
b) Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{x}{x^2 + y^2} \, ds$.

Lösung. Der Weg γ ist stetig differenzierbar und es gilt

$$\gamma'(t) = e^t(\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t))$$

sowie

$$\|\gamma'(t)\| = e^t(\cos(t)^2 - 2\cos(t)\sin(t) + \sin(t)^2 + \sin(t)^2 + 2\sin(t)\cos(t) + \cos(t)^2) = \sqrt{2}e^t$$

für alle $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.
a) Also gilt

$$L(\gamma) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2} e^t \, dt = \sqrt{2}(e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}).$$

b) Ferner gilt

$$\int_\gamma \frac{x}{x^2 + y^2} \, ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^t \cos(t)}{e^{2t}(\cos(t)^2 + \sin(t)^2)} \sqrt{2} e^t \, dt = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) \, dt = 2\sqrt{2}. \quad \square$$

Aufgabe 7 Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \neq 0$. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = x^2 y(x)^4, \qquad y(0) = y_0$$

und bestimmen Sie das maximale Existenzintervall dieser Lösung.

Lösung. Es ist $y'(x) = g(x)h(y(x))$, $y(0) = y_0$, wobei $g(s) = s^2$, $h(y) = y^4$ und $h(y_0) \neq 0$ ist. Da h stetig differenzierbar und somit lokal Lipschitz stetig ist, existiert nach dem Satz von Picard-Lindelöf eine eindeutige lokale Lösung des Anfangswertproblems. Der Satz über die Trennung der Variablen besagt ebenfalls, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige lokale Lösung besitzt und er erlaubt zudem sie zu berechnen. Die Lösung y erfüllt für alle x im maximalen Existenzintervall die Gleichung

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dx}{x^4} = \int_0^x s^2 \, ds.$$

Man erhält also

$$\frac{1}{y_0^3} - \frac{1}{y(x)^3} = x^3,$$

und somit

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{y_0^3} - x^3}}.$$

Falls $y_0 > 0$, so ist das maximale Existenzintervall $(-\infty, \frac{1}{y_0})$ und falls $y_0 < 0$, so ist das maximale Existenzintervall $(\frac{1}{y_0}, \infty)$. □