Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Analysis II

26.03.2019

Aufgabe 1:
Es seien $D := (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ und $A := \{(x,y) \in D : x = 0\}$, sowie $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2x^3 y}{(x^2+y^2)\sin(x)}, & (x,y) \notin A, \\ 0, & (x,y) \in A. \end{cases}$$

Bestimmen Sie sämtliche $(x,y) \in D$ in denen f stetig ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Behauptung: f ist auf D stetig.

Beweis: $D \setminus A$ ist offen und f auf $D \setminus A$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig. Es bleibt die Stetigkeit in Punkten $(0,y) \in A$ zu prüfen. Sei dazu $(0,y) \in A$ und $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D \setminus \{(0,y)\}$ mit $(x_k,y_k) \to (0,y)$ für $(k \to \infty)$. Nach den Regeln von de l'Hospital existiert $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{|\sin(x)|}$, also ist $\frac{|x_k|}{|\sin(x_k)|}$ für $(x_k,y_k) \notin A$ beschränkt durch eine Konstante $C > 0$. Für $(x_k,y_k) \notin A$ gilt somit

$$0 \le |f(x_k,y_k) - f(0,y)| = \left| \frac{2x_k^3 y_k}{(x_k^2+y_k^2)\sin(x_k)} \right| \le \underbrace{\frac{2\,|x_k y_k|}{x_k^2+y_k^2}}_{\le 1} \frac{x_k^2}{|\sin(x_k)|} \le \frac{x_k^2}{|\sin(x_k)|} \le C\,|x_k|$$

Somit gilt insgesamt für alle $k \in \mathbb{N}$ (Beachte: Ist $(x_k,y_k) \in A$, so gilt $f(x_k,y_k) = 0$):

$$0 \le |f(x_k,y_k) - f(0,y)| \le C|x_k| \to 0 \quad (k \to \infty),$$

d.h. f ist stetig in $(0,y)$. □

Aufgabe 2:
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := (x^2-y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f und entscheiden Sie, ob es sich jeweils um ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum handelt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
Behauptung: f hat in $(0,1)$ und $(0,-1)$ lokale Minima, sowie in $(1,0)$ und $(-1,0)$ lokale Maxima.

Beweis: f ist zweimal stetig partiell differenzierbar, also gilt $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Die notwendige Bedingung für lokale Extrema in $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lautet

$$0 \overset{!}{=} f'(x,y) = (2x(1-x^2+y^2), -2y(1+x^2-y^2))\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(1-x^2+y^2) = 0, \\ y(1+x^2-y^2) = 0. \end{cases}$$

Dies liefert die stationären Punkte $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ und $(-1,0)$.

Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(1-5x^2+y^2+2x^4-2x^2y^2) & 4xy(x^2-y^2) \\ 4xy(x^2-y^2) & -2(1-5y^2+x^2+2y^4-2x^2y^2) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$$

- $\underline{(0,0)}$: Hier gilt $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ und somit $\det(H_f(0,0)) = -4 < 0$, d.h. $H_f(0,0)$ ist indefinit. Nach Satz 8.2 hat f in $(0,0)$ also kein lokales Extremum.
- $\underline{(0,\pm 1)}$: Hier gilt $H_f(0,1) = H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} \frac{4}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{4}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}$ und somit $\det(H_f(0,1)) = \det(H_f(0,-1)) = \frac{16}{\mathrm{e}^2} > 0$ und $(H_f(0,1))_{11} = (H_f(0,-1))_{11} = \frac{4}{\mathrm{e}}$, d.h. $H_f(0,1)$ und $H_f(0,-1)$ sind positiv definit. Nach Satz 8.2 hat f in $(0,1)$ und $(0,-1)$ also ein lokales Minimum.
- $\underline{(\pm 1,0)}$: Hier gilt $H_f(1,0) = H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}$ und somit $\det(H_f(1,0)) = \det(H_f(-1,0)) = \frac{16}{\mathrm{e}^2} > 0$ und $(H_f(1,0))_{11} = (H_f(-1,0))_{11} = -\frac{4}{\mathrm{e}}$, d.h. $H_f(1,0)$ und $H_f(-1,0)$ sind negativ definit. Nach Satz 8.2 hat f in $(1,0)$ und $(-1,0)$ also ein lokales Maximum.

□

Aufgabe 3:
(i) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $D \neq \emptyset$. Formulieren Sie für $f : D \to \mathbb{R}$ den Satz von Taylor.

(ii) Es sei $f : (-1,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := z\sin(y\sqrt{x+1})$. Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung im Nullpunkt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
(i) Der Satz von Taylor besagt:
Sei $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^{k+1}(D,\mathbb{R})$, $x_0 \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$ und $S[x_0, x_0+h] \subseteq D$. Dann existiert ein $\xi \in S[x_0, x_0+h]$ mit:

$$f(x_0+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(h\cdot\nabla)^j f(x_0)}{j!} + \frac{(h\cdot\nabla)^{k+1} f(\xi)}{(k+1)!}.$$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $T_2((x,y,z);(0,0,0)) = yz$.

Beweis: Da alle Komponentenfunktionen von f mehrfach stetig partiell differenzierbar auf D sind gilt $f \in C^2(D,\mathbb{R})$. Für $(x,y,z) \in D$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
f_x(x,y,z) &= \frac{yz\cos(y\sqrt{x+1})}{2\sqrt{x+1}}, \\
f_y(x,y,z) &= z\sqrt{x+1}\cos(y\sqrt{x+1}), \\
f_z(x,y,z) &= \sin(y\sqrt{x+1}), \\
f_{xx}(x,y,z) &= -\frac{yz\cos(y\sqrt{x+1})}{4(x+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y^2 z\sin(y\sqrt{x+1})}{4(x+1)}, \\
f_{xy}(x,y,z) &= \frac{z\cos(y\sqrt{x+1})}{2\sqrt{x+1}} - \frac{yz\sin(y\sqrt{x+1})}{2} = f_{yx}(x,y,z), \\
f_{xz}(x,y,z) &= \frac{y\cos(y\sqrt{x+1})}{2\sqrt{x+1}} = f_{zx}(x,y,z), \\
f_{yy}(x,y,z) &= -z(x+1)\sin(y\sqrt{x+1}), \\
f_{yz}(x,y,z) &= \sqrt{x+1}\cos(y\sqrt{x+1}) = f_{zy}(x,y,z), \\
f_{zz}(x,y,z) &= 0.
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
T_2((x,y,z);(0,0,0)) &= f(0,0,0) + f'(0,0,0)\cdot(x,y,z) + \frac{1}{2}(x,y,z)(H_f(0,0,0))(x,y,z)^T \\
&= 0 + (0,0,0)\cdot(x,y,z) + \frac{1}{2}(x,y,z)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = yz.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4:
Es seien $D := \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) := (x\tan(y) + \sin(\pi x),\, xy^2 + e^{xy}).$$

Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung von $(2,0)$ gibt, die durch f bijektiv auf eine offene Umgebung von $(0,1)$ abgebildet wird. Berechnen Sie außerdem die Ableitung der Umkehrfunktion von f im Punkt $(0,1)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
Behauptung: Es gibt eine offene Umgebung von $(2,0)$, die durch f bijektiv auf eine offene Umgebung von $(0,1)$ abgebildet wird.

Beweis: Da alle Komponentenfunktionen von f stetig partiell differenzierbar sind, gilt $f \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$ mit

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \tan(y) + \pi\cos(\pi y) & x(1+\tan^2(y)) \\ y^2 + ye^{xy} & 2xy + xe^{xy} \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in D$ und somit $f'(2,0) = \begin{pmatrix} \pi & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, d.h. es gilt $\det f'(2,0) = 2\pi \neq 0$. Nach dem Umkehrsatz 9.1 existieren offene Umgebungen U von $(2,0)$, bzw. V von $(0,1)$, sodass $f|_U$ bijektiv ist. $\square$

Behauptung: Es gilt $(f|_U^{-1})'(0,1) = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$.

Beweis: Der Umkehrsatz liefert die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion und die Ableitung im Punkt $(0,1)$ lautet

$$(f|_U^{-1})'(0,1) = (f'(2,0))^{-1} = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

$\square$

Aufgabe 5:
Es seien $D := [-1,1]^2$ und $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sin(x) + \cos^2(y) \\ \cos^2(x) + \sin(y) \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass f auf D eine Kontraktion bezüglich der euklidischen Norm ist.

(ii) Beweisen Sie, dass f genau einen Fixpunkt in D besitzt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:
Behauptung: f ist eine Kontraktion bezüglich der euklidischen Norm.

Beweis: Nach dem eindimensionalen Mittelwertsatz erhalten wir für $z, \tilde{z} \in [-1,1]$ die Abschätzungen

$$|\sin(z) - \sin(\tilde{z})| = |\cos(\xi_{z,\tilde{z}})||z - \tilde{z}| \leq |z - \tilde{z}|,$$
$$|\cos^2(z) - \cos^2(\tilde{z})| = |-2\sin(\xi_{z,\tilde{z}})\cos(\xi_{z,\tilde{z}})||z-\tilde{z}| = |-\sin(2\xi_{z,\tilde{z}})||z-\tilde{z}| \leq |z - \tilde{z}|.$$

Damit erhalten wir für $(x,y), (\tilde{x},\tilde{y}) \in D$:

$$\begin{aligned}\|f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y})\|^2 &= \frac{1}{9}\left[(\sin(x) + \cos^2(y) - \sin(\tilde{x}) - \cos^2(\tilde{y}))^2 + (\cos^2(x) + \sin(y) - \cos^2(\tilde{x}) - \sin(\tilde{y}))^2\right] \\ &\leq \frac{1}{9}\left[(|x-\tilde{x}| + |y-\tilde{y}|)^2 + (|x-\tilde{x}| + |y-\tilde{y}|)^2\right] \\ &\leq \frac{2}{9}(\sqrt{2}\sqrt{|x-\tilde{x}|^2 + |y-\tilde{y}|^2})^2 \leq \frac{4}{9}\|(x,y) - (\tilde{x},\tilde{y})\|^2,\end{aligned}$$

d.h. f ist Lipschitz-stetig mit Konstante $L := \frac{2}{3} < 1$ und daher eine Kontraktion. $\square$

Behauptung: f besitzt genau einen Fixpunkt in D.

Beweis: D ist per Definition abgeschlossen. Außerdem gilt für $(x,y) \in D$:

$$f_1(x,y) = \frac{1}{3}(\sin(x) + \cos^2(y)) \in [-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}] \subseteq [-1,1],$$
$$f_2(x,y) = \frac{1}{3}(\cos^2(x) + \sin(y)) \in [-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}] \subseteq [-1,1],$$

d.h. es gilt $f(D) \subseteq D$. Außerdem ist f nach Teil (i) eine Kontraktion. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert somit ein eindeutiger Fixpunkt $(x^*,y^*) \in D$ mit $f(x^*,y^*) = (x^*,y^*)$. $\square$

Aufgabe 6:
Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1)$.

(i) Zeigen Sie, dass für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ gilt:
$$\int_\gamma v \cdot dx = 0.$$

(ii) Weiter sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $M \geq 0$. Beweisen Sie:
$$\left|\int_\gamma f(x)\cdot dx\right| \leq L(\gamma) M \sup\{\|\gamma(t)\| : t \in [0,1]\}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(i) *Behauptung:* Für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $\int_\gamma v \cdot dx = 0$.

Beweis: Nach Definition des Wegintegrals gilt

$$\int_\gamma v \cdot dx = \sum_{i=1}^n \int_\gamma v_i\, dx_i = \sum_{i=1}^n v_i \int_0^1 \gamma_i'(t)\, dt = \sum_{i=1}^n v_i(\gamma_i(1) - \gamma_i(0)) = 0.$$

$\square$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\left|\int_\gamma f(x)\cdot dx\right| \leq L(\gamma) M \sup\{\|\gamma(t)\| : t \in [0,1]\}$.

Beweis: Da $f(0) \in \mathbb{R}^n$ gilt $\int_\gamma f(0)\cdot dx = 0$ nach Teil (i). Damit erhält man

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(x)\cdot dx\right| &= \left|\int_\gamma (f(x) - f(0))\cdot dx\right| \leq \int_0^1 |(f(\gamma(t)) - f(0))\cdot \gamma'(t)|\, dt \\ &\leq \int_0^1 \underbrace{\|f(\gamma(t)) - f(0)\|}_{\leq M\|\gamma(t) - 0\|} \|\gamma'(t)\|\, dt \leq M\int_0^1 \|\gamma(t)\|\|\gamma'(t)\|\, dt \\ &\leq M \sup\{\|\gamma(t)\| : t \in [0,1]\} \underbrace{\int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt}_{=L(\gamma)}.\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 7:
Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$y'' - 3y' + 2y = 20\cos(2x), \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -1.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:
Behauptung: Die Lösung des Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$y(x) = e^x + 2e^{2x} - \cos(2x) - 3\sin(2x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Beweis: Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Differentialgleichung lautet $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Damit ist

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{2x} \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung. Um nun eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, verwendet man den Ansatz $y_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$(6a - 2b)\sin(2x) - (2a + 6b)\cos(2x) \stackrel{!}{=} 20\cos(2x).$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man schließlich die gesuchten Konstanten $a = -1$ und $b = -3$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet schließlich

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^x + Be^{2x} - \cos(2x) - 3\sin(2x) \quad (x \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt $A = 1$ und $B = 2$ und somit

$$y(x) = e^x + 2e^{2x} - \cos(2x) - 3\sin(2x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$\square$