5 Lösungen ~~Analysis II~~, März ~~2019~~ 2020

Name: Matrikelnummer: Punkte:

**Aufgabe 1:**

(i) Entscheiden Sie ob die folgenden Integrale existieren. Falls ja, berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\text{a)} \int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx\,, \qquad \text{b)} \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx\,.$$

(ii) Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_0^\pi (4x+5+\cos(x))e^{2x^2+5x+\sin(x)}\,dx\,.$$

**Lösungsvorschlag:**

(i) a) Das Integral existiert nicht, da

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2}\ln(T^2+1) = \infty\,.$$

b) Dieses Integral existiert und es gilt

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{T\to\infty}\arctan(T) = \frac{\pi}{2}\,.$$

(ii) Definiere die Funktion

$$F:[0,\pi]\to\mathbb{R}, x\mapsto e^{2x^2+5x+\sin(x)}.$$

Nach der Kettenregel ist dann $F$ stetig differenzierbar mit

$$F'(x) = e^{2x^2+5x+\sin(x)}\cdot(4x+5+\cos(x))$$

für alle $x\in[0,\pi]$. Mit dem Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung folgt dann:

$$\int_0^\pi (4x+5+\cos(x))e^{2x^2+5x+\sin(x)}\,dx = \int_0^\pi F'(x)\,dx = F(\pi)-F(0) = e^{2\pi^2+5\pi+\sin(\pi)}-e^0 = e^{2\pi^2+5\pi}-1.$$



Name: Matrikelnummer: Punkte:

**Aufgabe 2:**

(i) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die Menge

$$A := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le f(x) \subseteq \mathbb{R}^2\}$$

abgeschlossen ist.

(ii) Untersuchen Sie die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ auf Beschränktheit, Offenheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit.

$$B := \{(a,b)\in\mathbb{N}^2 : \|(a,b)\| < 42\}\,,$$

wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

**Lösungsvorschlag:**

(i) Wenn $A$ die leere Menge ist, dann ist $A$ abgeschlossen. Sei $A$ nicht leer und $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $A$ mit Grenzwert $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Es ist zu zeigen, dass $(x,y)$ in $A$ liegt, das heißt $0\le y\le f(x)$.

Zunächst folgt aus $\|(x_k,y_k)-(x,y)\|_2\to 0$, $(k\to\infty)$, dass

$$x_k\to x,\ (k\to\infty) \qquad \text{und} \qquad y_k\to y,\ (k\to\infty).$$

Mit der Stetigkeit von $f$ schließen wir weiter, dass $f(x_k)\to f(x)$ für $k\to\infty$. Da $(x_k,y_k)$ zu $A$ gehört, gilt $0\le y_k\le f(x_k)$ für jedes $k\in\mathbb{N}$. Diese Ungleichung bleibt, wegen der Stetigkeit von $f$, im Grenzwert erhalten, also gilt $0\le y\le f(x)$. □

(ii) Da alle Normen auf $\mathbb{R}^2$ äquivalent sind ist es egal welche Norm wir verwenden. Wir wählen hier die 2-Norm. Ausserdem verwenden wir, dass $a=|a|\le\|(a,b)\|_2$ und $b=|b|\le\|(a,b)\|_2$. Somit folgt für $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ mit $\|(a,b)\|_2<42$, dass $0<a,b<42$. Das bedeutet, dass $B\subseteq\{1,\dots,41\}\times\{1,\dots,41\}$ eine endliche Menge ist. Als solche ist $B$ beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Weiter ist $B$ nicht leer, da zum Beispiel $(1,1)\in B$. Jedoch ist für kein $\delta>0$ die Umgebung $U_\delta(1,1)$ in $B$ enthalten und damit ist die Menge nicht offen.

6

Name: Matrikelnummer: Punkte:

**Aufgabe 3:**

(i) Zeigen Sie, dass durch $d(x,y) := \sqrt{|x-y|}$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

(ii) Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass der Abstand einer kompakten, nichtleeren Menge $K \subset X$ und einer dazu disjunkten Menge $\emptyset \neq A \subset X$ stets positiv ist.

**Lösungsvorschlag:**

(i)
- Die Symmetrieeigenschaft für $d(x,y)$ folgt direkt aus der Symmetrieeigenschaft des Betrages $|x-y| = |y-x|$.
- Die Positivität von $d$, d.h. $d(x,y) \geq 0$, folgt direkt aus der Positivität der Betragsfunktion. Ebenso folgt aus der Definition von $d(x,y)$, genauer gesagt aus der Monotonie der Wurzelfunktion und der Positivität der Betragsfunktion, die folgenden Äquivalenzen

$$d(x,y) = 0 \iff \sqrt{|x-y|} = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y.$$

- Bleibt noch die Dreiecksungleich zu zeigen. Sei dafür $x,y,z \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned} d(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|x-z+z-y|} &\leq \sqrt{|x-z|+|z-y|} \\ &\leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|y-z|} \\ &= d(x,z) + d(z,y), \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $|x-z| \geq 0$, $|y-z| \geq 0$ und für $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt, dass

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

wie man sehr leicht durch quadrieren sieht.

Somit ist $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ eine Metrik. □

(ii) Sei $A \subset X$ abgeschlossen, $K \subset X$ kompakt und $A \cap K = \emptyset$.
Angenommen, es gilt

$$d(A,K) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} = 0.$$

Dann gibt es eine Folge $(x_k)_k$ in $K$ mit $d(x_k, A) \to 0$. Da $K$ (folgen-)kompakt ist, gibt es eine in $K$ konvergente Teilfolge $(x_{k_j})_j$. Sei der Grenzwert gegeben durch

$$\xi := \lim_{j\to\infty} x_{k_j}.$$

Da die Abstandsfunktion stetig ist folgt also auch $d(\xi, A) = 0$. Aber $\xi \in K$ und daher $\xi \in X \setminus A$. Das Komplement $X \setminus A$ ist offen, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Dann muss aber für alle $a \in A$ der Abstand $d(\xi, a) \geq \varepsilon$ und somit $d(\xi, A) \geq \varepsilon$ sein. $\lightning$
Also war die Annahme falsch und damit ist die Behauptung bewiesen. □



Name: Matrikelnummer: Punkte:

**Aufgabe 4:**
Untersuchen Sie die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x_1)\sin(x_2)}{x_1^2+x_2^2}, & \text{für} \quad x = (x_1,x_2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für} \quad x = (0,0). \end{cases}$$

im Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ auf:

(i) Stetigkeit,

(ii) partielle Differenzierbarkeit,

(iii) Differenzierbarkeit.

**Lösungsvorschlag:**

(i) Betrachte eine Folge $x = (x_k)_k \in \mathbb{R}^2$ mit $x_k = (x_1, x_2)_k$, $x_1 = x_2 = y$ und $x \to 0$ für $k \to \infty$. Dann gilt

$$\lim_{(x_1,x_2)\to 0} \frac{\sin(x_1)\sin(x_2)}{x_1^2+x_2^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(y)}{y}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \neq 0$$

Somit ist $f$ bei 0 nicht stetig.

(ii) Für die partielle Ableitung in $x_1$-Richtung erhalten wir per Definition der partiellen Ableitung

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\sin(t)\sin(0)}{t^2+0^2} - 0\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)\cdot 0}{t^3} = 0.$$

Die Ableitung in $x_2$-Richtung funktioniert analog.

(iii) Da $f$ nicht stetig ist, kann es nicht differenzierbar sein.

7

Name: Matrikelnummer: Punkte:

**Aufgabe 5:**
Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 < y < x^2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(i) alle Richtungsableitungen von $f$ existieren in $(0,0)$.

(ii) $f$ ist nicht stetig in $(0,0)$.

**Lösungsvorschlag:**

(i) Sei $\tilde{v} := (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Falls $v_2 > 0$ existiert ein $t_0 > 0$ so dass $v_2 > t_0 v_1^2$. Somit gilt

$$t_0 v_2 > (t_1 v_1)^2\,,$$

und damit $f(tv_1, tv_2) = 0$ für alle $0 < t \leq t_0$.
Falls $v_2 \leq 0$ folgt per Definition $f(tv_1, tv_2) = 0$ für alle $t > 0$.
Also erhalten wir für beliebiges $v \in \mathbb{R}^2$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+tv) - f(0)}{h} = \frac{0}{h} = 0\,.$$

Somit existieren alle Richtungsableitung von $f$ in $(0,0)$. □

(ii) Wir betrachten die Nullfolgen $(0, \frac{1}{n})$ und $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^4})$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$f(0, \frac{1}{n}) = 0\,, \qquad \text{und} \qquad f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^4}) = 1\,.$$

Also ist $f$ nicht stetig in $(0,0)$. □



Name: Matrikelnummer: Punkte:

**Aufgabe 6:**
Sei $D := [0,5] \times [0,2]$ und

$$g : D \to \mathbb{R}; \quad g(u,v) = \tfrac{1}{2}u^4 - u^2v^2 + 54v - 9.$$

(i) Zeigen Sie, dass es Punkte $x_1, x_2 \in D$ gibt so, dass $g(x_1) = \min_{x \in D} g(x)$ und $g(x_2) = \max_{x \in D} g(x)$.

(ii) Zeigen Sie weiter, dass $x_1, x_2$ auf dem Rand von $D$ liegen.

**Lösungsvorschlag:** Die Funktion $g$ ist offensichtlich auf $D = [0,5] \times [0,2]$ stetig.

(i) Weil ihr Definitionsbereich $D$ beschränkt und abgeschlossen und somit kompakt ist, folgt aus der Vorlesung, dass $g$ sein Minimum und Maximum annimmt. Es gibt also die gesuchten Punkte $x_1, x_2 \in D$.

(ii) Als Polynom ist $g$ beliebig oft differenzierbar auf $(0,5) \times (0,2)$. Läge $x_j$ in $(0,5) \times (0,2)$ für $j = 1$ oder $j = 2$, dann würde gelten $g'(x_j) = 0$. Wir berechnen leicht, dass

$$\partial_1 g(u,v) = 2u^3 - 2uv^2 = 2u(u^2 - v^2) \qquad \text{und} \qquad \partial_2 g(u,v) = -2u^2v + 54.$$

Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \partial_1 g(u,v) = 0 \quad &\iff \quad u = 0 \text{ oder } (u \neq 0 \text{ und } u^2 = v^2) \\ &\iff \quad u = 0 \text{ oder } (u \neq 0 \text{ und } v = u) \text{ oder } (u \neq 0 \text{ und } v = -u). \end{aligned}$$

Diese Bedingungen setzten wir in $\partial_2 g(u,v)$ ein. Für alle $v \in (0,2)$ ist $\partial_2 g(0,v) = 54 \neq 0$ und damit hat $g$ in $(0,v)$ kein Extremum. Weiter haben wir

$$\partial_2 g(u,u) = -2u^3 + 54 = 0 \quad \iff \quad u = \sqrt[3]{\tfrac{54}{2}} = 3$$

und

$$\partial_2 g(u,-u) = 2u^3 + 54 = 0 \quad \iff \quad u = \sqrt[3]{-\tfrac{54}{2}} = -3.$$

Das zeigt, dass $g$ keine stationären Punkte hat, denn $(3,3)$ und $(-3,3)$ liegen nicht im Definitionsbereich von $g$. Es folgt, dass $g$ Minimum und Maximum auf dem Rand annehmen muss.

8

Name: Matrikelnummer: Punkte:

## Aufgabe 7:

(i) Zeigen Sie, dass sich die Gleichung $x + y + z = \sin(xyz)$ in einer Umgebung $V$ von $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ eindeutig nach $z$ auflösen lässt. D.h. auf einer geeigneten Umgebung $U$ von $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ existiert eine Funktion $u$ mit der Eigenschaft, dass

$$\{(x, y, u(x, y)) : (x, y) \in U\}$$

die Lösungsmenge obiger Gleichung in $V$ darstellt.

(ii) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von $u$ an der Stelle $(0,0)$.

**Lösungsvorschlag:**

(i) Wir benötigen von der Funktion $f(x, y, z) = x+y+z-\sin(xyz)$ die partiellen Ableitungen

$$D_p f = \begin{pmatrix} 1 - yz\sin(xyz) \\ 1 - xz\sin(xyz) \\ 1 - xy\sin(xyz) \end{pmatrix}.$$

Um den Satz über implizite Funktionen anwenden zu können muss die Ableitung bzgl. $z$ ungleich 0 sein. Für $(x, y, z) = (0,0,0)$ gilt $1 - xy\sin(xyz) = 1$. Also existiert in eine Umgebung $U$ von $(0,0)$ eine Funktion $u$ mit der Eigenschaft, dass

$$\{(x, y, u(x, y)) : (x, y) \in U\}$$

die Lösungsmenge der Gleichung $x + y + z = \sin(xyz)$ in $V$ darstellt $\square$

(ii) Nach dem Satz über implizite Funktionen ergibt sich für die Ableitung von $u$

$$D_{(0,0)}u = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, u(0, 0))\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} (0, 0, u(0, 0)) = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$