Reichel
Analysis II

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: ? P.
Bemerkungen: Nachklausur

Aufgabe 1:
Untersuchen Sie folgende uneigentliche Integrale auf Konvergenz:

a) $\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{x}\right) dx,$ b) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^5)}{x^4} dx.$

Aufgabe 2:
Für $c \geq 0$ sei die Menge M_c definiert durch

$$M_c := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + (\tanh y)^2 \leq c\}.$$

(a) Beweisen Sie, dass die Menge M_c abgeschlossen ist.

(b) Bestimmen Sie alle $c \geq 0$, für die M_c kompakt ist.

Erinnerung: $\tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$.

Aufgabe 3:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 e^y - y \cos x$.

(a) Zeigen Sie, dass ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$ und eine C^∞-Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ existiert mit $g(0) = 0$ und $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in I$.

(b) Besitzt die Funktion g aus Teil (a) ein lokales Extremum in $x = 0$? Falls ja, entscheiden Sie, ob es sich um ein lokales Minimum oder lokales Maximum handelt.

Aufgabe 4:
Gegeben seien Vektoren

$$u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2), \qquad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1), \qquad w = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

und eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \sqrt{2}.$$

Bestimmen Sie $\nabla f(0,0)$ sowie $\frac{\partial f}{\partial w}(0,0)$.

Aufgabe 5:
Gegeben sind $a, b, c > 0$ und das Ellipsoid

$$E := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1\right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\max\{xyz : \quad (x,y,z) \in E\}$ existiert und berechnen Sie den Wert.

Aufgabe 6:
Es sei $G := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $F : G \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F(x,y) := \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Weiter sei der Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to G$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ gegeben. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int^{\gamma} F(x,y) \cdot d(x,y).$$

Besitzt die Funktion F eine Stammfunktion auf G? Begründen Sie.

Aufgabe 7:
Bestimmen Sie eine Lösung $y : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x}\, y \ln y, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^e.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

a) *Behauptung:* Das Integral ist divergent.
Beweis. Für $x \in (0,1]$ ist $\sin(x) > 0$. Daher folgt
$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{x} \geq \frac{1}{x} \geq 0, \quad \text{für alle } x \in (0,1].$$
Aus der Monotonie des Integrals folgt für alle $\varepsilon \in (0,1)$
$$\int_\varepsilon^1 \left(\frac{1}{\sin(x)} + \frac{1}{x}\right) dx \geq \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = -\ln(\varepsilon) \to \infty \quad (\varepsilon \to 0+).$$
Damit existiert der Limes
$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \left(\frac{1}{\sin(x)} + \frac{1}{x}\right) dx$$
nicht und das Integral ist divergent.

Behauptung: Das Integral ist konvergent.

Beweis. Betrachte die Funktion $f : (-1,2) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \ln(1+x)$. Dann ist f nach Vorlesung unendlich oft stetig differenzierbar auf $(-1,2)$ und nach dem Satz von Taylor existiert für jedes $x \in (0,1]$ ein $\xi \in (0,x)$ mit
$$0 \leq f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 = 0 + x - \frac{1}{2(1+\xi)^2}x^2 \leq x.$$
Für $\varepsilon \in (0,1)$ und alle $x \in [\varepsilon, 1]$ gilt daher
$$\left|\frac{\ln(1+x^5)}{x^4}\right| \leq \frac{x^5}{x^4} = x.$$
Weiter ist $\int_0^1 x dx < \infty$ und nach dem Konvergenzkriterium aus der Vorlesung (Lemma 1.33) konvergiert das Integral
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^5)}{x^4} dx.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) Wir defineren die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 + (\tanh y)^2$. Dann ist f als Komposition stetiger Funktionen selbst wieder stetig. Da für alle $c \in \mathbb{R}$ die Menge (c, ∞) offen ist, erhalten wir aus Satz 3.10 das auch $f^{-1}((c,\infty))$ offen ist. Die Abgeschlossenheit von M_c folgt nun aus der Identität
$$M_c = \mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}((c,\infty)).$$

(b) *Behauptung:* M_c ist kompakt $\iff 0 \leq c < 1$.

Beweis. Nach Teil (a) ist M_c abgeschlossen für alle $c \geq 0$. Nach Satz 3.12 ist daher M_c kompakt genau dann wenn M_c beschränkt ist. Es gilt nach Analysis 1, dass $\mathbb{R} \ni y \mapsto \tanh y$ streng monoton wachsend ist auf $\mathbb{R}$ und
$$\lim_{y \to \pm\infty} \tanh y = \pm 1.$$
Insbesondere ist $(\tanh y)^2 < 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$, $y \mapsto (\tanh y)^2$ streng monoton fallend (bzw. wachsend) auf $(-\infty, 0]$ (bzw. $[0,\infty)$) und
$$\lim_{y \to \pm\infty} (\tanh y)^2 = 1.$$
Sei $c \geq 1$ und $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ mit $y_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Dann ist $(0, y_n) \in M_c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da $(\tanh y_n)^2 < 1 \leq c$ und
$$\|(0,y_n)\| = |y_n| \to \infty (n \to \infty).$$
Also ist M_c für $c \geq 1$ nicht beschränkt. Sei $c \in [0,1)$. Anngenommen, es existiert eine Folge $(x_n, y_n)_n \subset M_c$ mit $\|(x_n,y_n)\| \to \infty$. Dann folgt wegen
$$\max\{x_n^2, (\tanh y_n)^2\} \leq x_n^2 + (\tanh y_n)^2 \leq c < 1$$
dass $|x_n| \leq \sqrt{c}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also muss gelten $|y_n| \to \infty$ für $n \to \infty$ und wir erhalten den Widerspruch
$$1 \leftarrow (\tanh y_n)^2 \leq c < 1 \qquad (n \to \infty).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) Es ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $f(0,0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 e^y - \cos(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1 \neq 0$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen existiert ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine C^∞-Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = 0$, sodass

$$f(x, g(x)) = 0, \quad \text{für alle } x \in I.$$

(b) *Behauptung:* Die Funktion g besitzt im Punkt $x = 0$ ein lokales Minimum.

Beweis. Nach (a) sind $f, g \in C^\infty$. Zweimaliges differenzieren, die Kettenregel und der Satz von Schwartz liefern für $x \in I$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} f(x, g(x)) = f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x))g'(x), \\ 0 &= \frac{d}{dx}[f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x))g'(x)] \\ &= f_{xx}(x, g(x)) + f_{xy}(x, g(x))g'(x) + (f_{xy}(x, g(x)) + f_{yy}(x, g(x))g'(x))g'(x) + f_y(x, g(x))g''(x). \end{aligned}$$

Einsetzen von $x = 0$ liefert $0 = -g'(0)$ und $2 = g''(0)$. Nach Analysis 1 besitzt die Funktion g im Punkt $x = 0$ ein lokales Minimum.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

Behauptung: Es gilt $\nabla f(0,0) = (-\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$, $\frac{\partial f}{\partial w}(0,0) = -\frac{4}{3\sqrt{2}}$.

Beweis. Nach Satz 4.18 gilt für jeden Einheitsvektor $e \in \mathbb{R}^2$ die Beziehung $\frac{\partial f}{\partial e}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot e = f_x(0,0)e_1 + f_y(0,0)e_2$. Nach Voraussetzung erhalten wir also das Gleichungssytem

$$\begin{cases} f_x(0,0) + 2f_y(0,0) &= -1 \\ -f_x(0,0) + f_y(0,0) &= 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x(0,0) \\ f_y(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und die eindeutige Lösung ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} f_x(0,0) \\ f_y(0,0) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow f_x(0,0) = -\frac{5}{3}, \quad f_y(0,0) = \frac{1}{3}.$$

Wir erhalten

$$\nabla f(0,0) = (-\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial w}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3\sqrt{2}}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

Behauptung: $\max\{xyz : \quad (x,y,z) \in E\} = \sqrt{\frac{abc}{27}}$.

Beweis. Definiere die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto xyz$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1$. Dann sind $f, g \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und das Maximierungsproblem lässt sich schreiben als:

$$\max\{f(x,y,z) : \ (x,y,z) \in N\} \quad \text{mit} \quad N := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ g(x,y,z) = 0\}.$$

Existenz des Maximums: Es ist klar, dass die Menge N beschränkt und abgeschlossen ist. Damit besitzt die stetige Funktion f laut Vorlesung ein Maximum auf der kompakten Menge N.Es gilt also $\sup\{f(x,y,z) : (x,y,z) \in N\} = \max\{f(x,y,z) : \ (x,y,z) \in N\} = f(x^*, y^*, z^*)$ für ein $(x^*, y^*, z^*) \in E$. Weiter ist für $x = \sqrt{a/3}, y = \sqrt{b/3}, z = \sqrt{c/3}$, $f(x,y,z) \neq 0$ und daher auch $x^*, y^*, z^* \neq 0$.

Berechnung des Maximums: Wegen $(0,0,0) \notin N$, ist $\nabla g(x^*, y^*, z^*) = 2(x^*/a, y^*/b, z^*/c) \neq (0,0,0)$ und daher $\mathrm{Rang}(\nabla g(x^*, y^*, z^*)) = 1$. Nach Satz 7.1 existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \nabla f(x^*, y^*, z^*) + \lambda \nabla g(x^*, y^*, z^*) = (y^*z^*, x^*z^*, x^*y^*) + 2\lambda(x^*/a, y^*/b, -z^*/c).$$

und wir erhalten das System

$$\begin{cases} y^*z^* = -\lambda\frac{2}{a}x^*, \\ x^*z^* = -\lambda\frac{2}{b}y^*, \\ x^*y^* = -\lambda\frac{2}{c}z^*. \end{cases}$$

Insbesondere folgt $\lambda \neq 0$. Multiplizieren der Zeilen mit x^*, y^* beziehungsweise z^* ergibt

$$\frac{(x^*)^2}{a} = \frac{(y^*)^2}{b} = \frac{(z^*)^2}{c}$$

und aus $(x^*, y^*, z^*) \in N$ folgt

$$\frac{(x^*)^2}{a} = \frac{(y^*)^2}{b} = \frac{(z^*)^2}{c} = \frac{1}{3}.$$

Wir erhalten

$$|x^*| = \sqrt{\frac{a}{3}}, \quad |y^*| = \sqrt{\frac{b}{3}}, \quad |z^*| = \sqrt{\frac{c}{3}},$$

und schließlich

$$|f(x^*, y^*, z^*)| = \sqrt{\frac{abc}{27}}.$$

Daher ist

$$x^* = \sqrt{\frac{a}{3}}, \quad y^* = \sqrt{\frac{b}{3}}, \quad z^* = \sqrt{\frac{c}{3}},$$

und $\max\{xyz : \quad (xyz) \in E\} = \sqrt{abc/27}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

Es gilt

$$\int^{\gamma} F(x,y) \cdot d(x,y) = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos(t)) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Da $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ und ${}^{\gamma}\!\int F(x,y) \cdot d(x,y) \neq 0$ ist F nicht konservativ. Nach Satz 8.13 aus der Vorlesung ist F kein Gradientenfeld und besitzt somit keine Stammfunktion auf G.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

Behauptung: Die Lösung des Anfangswertproblems ist gegeben durch $y : (0, \pi) \to \mathbb{R}, y(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{e} \sin(x)}$.

Beweis. Die Funktion $f\colon (0, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y) := \frac{y \ln(y) \cos(x)}{\sin(x)}$. Es gilt: f ist stetig auf $(0, \pi) \times \mathbb{R}$ und stetig partiell differenzierbar bezüglich y. Weiter gilt $f(x,y) = g(x)h(y)$ mit $g(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ und $h(y) = y \ln(y)$. Es gilt $h(\pi/2) = \pi \ln(\pi/2)/2 \neq 0$ und nach Satz 9.2 kann durch Auflösen der folgenden Gleichung die Lösung y gefunden werden:

$$\int_{x_0}^{x} g(s)\, dx = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{h(s)}\, ds,$$

wobei $x_0 = \pi/2$ und $y_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ ist. Nun ist

$$\int_{x_0}^{x} g(s) ds = \int_{x_0}^{x} \frac{\cos s}{\sin s} ds = [\ln(\sin s)]_{s=\frac{\pi}{2}}^{s=x} = \ln(\sin(x)) \quad \text{und}$$

$$\int_{y_0}^{y(t)} h(s) ds = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{s \ln s} = [\ln(\ln s)]_{s=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}^{s=y(x)} = \ln(\ln y(x)) - \ln(\ln \mathrm{e}^{\mathrm{e}}) = \ln(\ln y(x)) - 1.$$

Damit erhalten wir die Lösung durch

$$\ln(y(x)) = \mathrm{e} \sin x \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e} \sin(x)} \quad (x \in (0, \pi)).$$