Analysis 3 – Herbst 2017

Aufgabe 1 Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_B \frac{1+x^n y^n}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \pi \ln 2$, wobei $B = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 \frac{x^k(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln 2.$

Lösung. a) Betrachte $f_n : B \to \mathbb{R}$, $f_n(x,y) = \frac{1+x^n y^n}{1+x^2+y^2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionen f_n sind stetig und somit messbar. Für alle $(x,y) \in B$ gilt insbesondere $|x| < 1$ und $|y| < 1$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}.$$

Außerdem gilt $|f_n(x,y)| \leq \frac{2}{1+x^2+y^2} \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x,y) \in B$. Da $\lambda_2(B) < \infty$ ist, ist die konstante Funktion 2 eine integrierbare Majorante. Der Satz von Lebesgue und eine Rechnung in Polarkoordinaten zeigen nun

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_B \frac{1+x^n y^n}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y) &= \lim_{n\to\infty}\int_B f_n(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_B \lim_{n\to\infty} f_n(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)\\ &= \int_B \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \pi\int_0^1 \frac{2r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r\\ &= \pi \ln(1+r^2)\Big|_0^1 = \pi \ln 2.\end{aligned}$$

b) Für alle $x \in (0,1)$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k(1-x)}{1+x} = \frac{1-x}{1+x}\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1+x}.$$

Betrachte also $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x}$. Die Funktionen f_n sind stetig und somit messbar. Es gilt für alle $x \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Außerdem gilt $|f_n(x)| \leq \frac{2}{1+x} \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in (0,1)$. Da $\lambda((0,1)) < \infty$ ist, ist die konstante Funktion 2 eine integrierbare Majorante. Der Satz von Lebesgue zeigt nun

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 \frac{x^k(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln x\Big|_0^1 = \ln 2. \qquad \square$$

Aufgabe 2

a) Sei X eine Menge, $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf X und $f : X \to X$ eine Abbildung. Definiere

$$\mathcal{A} = \left\{ A \subseteq X \,\middle|\, A = f^{-1}(B) \text{ für ein } B \in \mathcal{B} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X ist.

b) Seien $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ Borel-messbare Funktionen für $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n} < 1 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass M ein Borelmenge ist.

Lösung. a) Nach Definition gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Da $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra ist, liegt X in $\mathcal{B}$. Es gilt $f^{-1}(X) = X$ und somit folgt $X \in \mathcal{A}$. Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann gibt es $B \in \mathcal{B}$ mit $A = f^{-1}(B)$. Da $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra ist, liegt auch B^{c} in $\mathcal{B}$. Außerdem gilt

$$A^{\mathsf{c}} = \left(f^{-1}(B)\right)^{\mathsf{c}} = X \setminus \{x \in X \mid f(x) \in B\} = \{x \in X \mid f(x) \notin B\} = f^{-1}(B^{\mathsf{c}}) \in \mathcal{A}.$$

Seien schließlich $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann existieren $B_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $A_n = f^{-1}(B_n)$. Da $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra ist, liegt auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ in $\mathcal{B}$. Somit erhalten wir

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \in \mathcal{B}.$$

Insgesamt erfüllt $\mathcal{A}$ alle Eigenschaften einer σ-Algebra.
b) Definiere $g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{n}$. Die Funktion g ist messbar als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen. Da $[0, 1)$ eine Borelmenge ist, ist auch

$$M = g^{-1}([0, 1))$$

eine Borelmenge. □

Aufgabe 3 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar. Definiere

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(t) = \int_t^{t+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Zeigen Sie, dass g stetig ist.
b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{t \to \infty} g(t) = 0$ gilt.

Lösung. a) Betrachte $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t, x) = \mathbb{1}_{(t,t+1)}(x) f(x)$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $x \mapsto h(t, x)$ messbar, da $h(t, \cdot)$ das Produkt einer einfachen messbaren Funktion und der messbaren Funktion f ist. Es gilt $|h(t, x)| \leq |f(x)|$ für alle $t, x \in \mathbb{R}$ und die Funktion $|f|$ ist nach Voraussetzung integrierbar. Seien $t_0, x \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Es gilt

$$\lim_{t \to t_0} h(t, x) = \lim_{t \to t_0} \mathbb{1}_{(t,t+1)}(x) f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (t_0, t_0 + 1), \\ 0, & x \notin (t_0, t_0 + 1) \end{cases} = h(t_0, x),$$

d.h. $h(\cdot, x)$ ist stetig. Da $g(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t, x)\,\mathrm{d}x$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, folgt die Behauptung nun aus dem Stetigkeitssatz.
b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{1}_{(t,t+1)}(x) f(x) = 0.$$

Außerdem gilt
$$\left|\mathbb{1}_{(t,t+1)}(x)f(x)\right| \le |f(x)|$$
für alle $t, x \in \mathbb{R}$. Also ist $|f|$ eine integrierbare Majorante und der Satz von Lebesgue liefert

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(t,t+1)}(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t\to\infty} \mathbb{1}_{(t,t+1)}(x)f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \qquad \square$$

Aufgabe 4

a) Gegeben sei die Fläche

$$M_1 = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi) \,|\, 0 < r < 1, 0 < \varphi < 2\pi\}$$

und die Funktion
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$
Berechnen Sie $\int_{M_1} f\,\mathrm{d}\sigma$.

b) Gegeben sei die Fläche

$$M_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z^2 = x^2 - y^2, 0 < z, 0 < y < 1, y < x < 1\right\}.$$

Berechnen Sie das Oberflächenmaß $\sigma(M_2)$.

Lösung. a) Betrachte $G : (0,1) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$, $G(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi)$. Die Fläche M_1 wird von der stetig differenzierbaren Funktion G parametrisiert. Die Gramsche Determinante lautet

$$\begin{aligned} g_G(r,\varphi) &= \det G'(r,\varphi)^\intercal G'(r,\varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2+1 \end{pmatrix} = 1 + r^2. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_{M_1} f\,\mathrm{d}\sigma = \int_{(0,1)\times(0,2\pi)} f(G(r,\varphi))\sqrt{g_G(r,\varphi)}\,\mathrm{d}(r,\varphi) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 1 + r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{8}{3}\pi.$$

b) Seien $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < y < 1, y < x < 1\}$ und $h : \Delta \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$. Dann ist h stetig differenzierbar mit

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} \\ \frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \Delta$ und M_2 ist der Graph von h. Folglich ist M_2 eine C^1-Fläche und es gilt

$$\begin{aligned}
\sigma(M_2) &= \int_\Delta \sqrt{1 + |\nabla h(x,y)|_2^2}\,\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2-y^2} + \frac{y^2}{x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{2}\int_0^1 \int_y^1 \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{x^2-y^2}\Big|_{x=y}^{x=1}\,\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 y}\cos y\,\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2 y\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.
\end{aligned}$$
□

Aufgabe 5
a) Sei $D = [0,1] \times [1,2]$. Berechnen Sie

$$\int_D \frac{\mathrm{e}^{x/y}}{y^3}\,\mathrm{d}(x,y).$$

b) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_x^1 \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Lösung. a) Betrachte $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^{-3}\mathrm{e}^{x/y}$. Die Funktion f ist stetig und somit messbar sowie positiv. Nach dem Satz von Tonelli gilt

$$\begin{aligned}
\int_D f\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_D \frac{\mathrm{e}^{x/y}}{y^3}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_1^2 \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x/y}}{y^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{x/y}}{y^2}\Big|_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{1/y}}{y^2} - \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= -\mathrm{e}^{1/y}\Big|_1^2 + \frac{1}{y}\Big|_1^2 = \mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

b) Setze $D = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, x < y < 1\}$. Betrachte $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \mathrm{e}^{x/y}$. Die Funktion f ist stetig und somit messbar und positiv. Für alle $y \in (0,1)$ gilt $D_y = \{x \mid 0 < x < 1, x < y < 1\} = (0,y)$ und $D_y = \emptyset$ für alle $y \in \mathbb{R} \setminus (0,1)$. Für alle $x \in (0,1)$ gilt $D^x = \{y \mid 0 < x < 1, x < y < 1\} = (x,1)$ und $D^x = \emptyset$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus (0,1)$. Der Satz von Tonelli liefert

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \int_x^1 \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^y \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y\mathrm{e}^{x/y}\Big|_{x=0}^{x=y}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 (\mathrm{e}-1)y\,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{e}-1}{2}.
\end{aligned}$$
□

Aufgabe 6 Sei $\varepsilon \in (0,1)$ und $D_\varepsilon = B((1,0),2) \setminus \bar{B}(0,\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^2$. Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = \frac{x}{|x|_2^2}.$$

Zeigen Sie

$$\int_{D_\varepsilon} \operatorname{div} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

und

$$\int_{\partial B\big((1,0),2\big)} (f|\nu)\;\mathrm{d}\sigma = 2\pi,$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale an $B((1,0),2)$ ist.

Lösung. Für alle $x \in D_\varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{div} f(x) &= \partial_1\left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right) + \partial_2\left(\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)\\ &= \frac{1}{x_1^2+x_2^2} - \frac{2x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \frac{1}{x_1^2+x_2^2} - \frac{2x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{2}{x_1^2+x_2^2} - \frac{2(x_1^2+x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2} = 0.\end{aligned}$$

Die Menge D_ε hat den C_1-Rand $\partial D_\varepsilon = \partial B((1,0),2) \cup \partial\left(\mathbb{R}^2 \setminus B(0,\varepsilon)\right)$, die Funktion f liegt in $C^1(D_\varepsilon,\mathbb{R}^2) \cap C_b(\bar{D}_\varepsilon,\mathbb{R}^2)$. Nach dem Satz von Gauß gilt

$$0 = \int_{D_\varepsilon} \operatorname{div} f\,\mathrm{d}\lambda_3 = \int_{\partial D_\varepsilon} (f|\nu)\;\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial B\big((1,0),2\big)} (f|\nu)\;\mathrm{d}\sigma - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} (f|\nu)\;\mathrm{d}\sigma.$$

Wir berechnen mit $\nu(x) = \frac{x}{|x|_2}$ für alle $x \in \partial B(0,\varepsilon)$ das Integral

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} (f|\nu)\;\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{1}{|x|_2^3}\,(x|x)\;\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial B(0,\varepsilon)} 1\,\mathrm{d}\sigma = 2\pi.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Aufgabe 7 Seien $m \in \mathbb{N}$ und $B = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^m$. Seien $p \in (1,\infty)$, $0 < \alpha < m(1-\frac{1}{p})$ und $f \in L^p(B)$. Sei

$$g : B \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{|x|^\alpha}, & x \in B \setminus \{0\},\\ 0, & x = 0.\end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g in $L^1(B)$ liegt.

Lösung. Wähle $p' \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Nach Voraussetzung gilt $m - \alpha p' > 0$. Betrachte $h : B \to \mathbb{R}$, $h(x) = |x|^{-\alpha}$ für $x \in B \setminus \{0\}$ und $h(0) = 0$. Die Funktion h ist messbar und eine Rechnung mit Polarkoordinaten zeigt

$$\|h\|_{p'}^{p'} = \int_B |h(x)|^{p'}\,\mathrm{d}x = \int_B |x|^{-\alpha p'}\,\mathrm{d}x = \omega_m \int_0^1 r^{-\alpha p' + m - 1}\,\mathrm{d}r < \infty,$$

da $-\alpha p' + m - 1 > -1$ ist. Die Funktion g ist als Produkt messbarer Funktionen auch messbar und die Höldersche Ungleichung zeigt nun

$$\int_B |g(x)|\,\mathrm{d}x = \|g\|_1 \le \|f\|_p \|h\|_{p'} < \infty,$$

d.h. die Funktion g ist integrierbar. □