

Schmoeger Analysis III

Dauer: 120 min.

Lösung: offiziell

Aufgabe 1

- a) Seien $X \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Menge mit endlich vielen Elementen und $\mathcal{K} := \{\{x\} \mid x \in X\}$ die Menge aller einelementigen Teilmengen von X . Zeigen Sie, dass dann $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{B}(X) = \mathcal{P}(X)$ gelten.
- b) Gegeben sei die σ -Algebra $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Weiter definieren wir die Abbildung

$$\mu(A) := \begin{cases} \infty & \text{falls } |A| \text{ unendlich,} \\ 0 & \text{falls } |A| \text{ endlich,} \end{cases}$$

für $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Hierbei bezeichnet $|A|$ die Anzahl der Elemente einer Menge $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definiert μ ein Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

- a) Seien X, Y nichtleere Mengen, $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra auf X , sowie $\mathcal{B}$ eine σ -Algebra auf Y . Weiter sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion. Wann heißt f $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar?
- b) Formulieren Sie den Satz von Beppo Levi (Satz von der monotonen Konvergenz).
- c) Formulieren Sie den Satz von Fubini.

Aufgabe 3

- a) Sei $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit $\text{esssup}_{x \in \mathbb{R}} |q(x)| = \|q\|_\infty < \infty$. Weiter seien $t \in \mathbb{R}$ und $(t_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $t_n \rightarrow t$, $n \rightarrow \infty$. Schließlich sei $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ für ein $p \in [1, \infty)$. Wir setzen

$$g_n(x) := e^{t_n q(x)} f(x), \quad g(x) := e^{t q(x)} f(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Konvergenz $\|g_n - g\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

- b) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\cos(n^2 x^2) + n^2 x^2}{\sqrt{x^2 + n^4}} dx.$$

Aufgabe 4

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-x)^2} f(x) dx.$$

- a) Formulieren Sie den Differenzierbarkeitssatz für Parameterintegrale.
- b) Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

Aufgabe 5

Seien $v = (v_1, \dots, v_4) \in \mathbb{R}^4$ mit $v_1 > 0$ und $K := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 \leq r\}$ die 3-dimensionale Kugel mit Radius $r > 0$. Hierbei ist $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^3$. Weiter bezeichne

$$C := \{(1-s)(0, y) + sv \in \mathbb{R}^4 \mid y \in K, s \in [0, 1]\}$$

den 4-dimensionalen Kegel mit Spitze v .

- Begründen Sie, dass C messbar ist (das heißt $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^4)$ ist).
- Beweisen Sie die Gleichung $\lambda_4(C) = \frac{v_1}{4} \lambda_3(K)$. Hierbei bezeichnet λ_d das d -dimensionale Lebesguemaß.

Aufgabe 6

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x, y, z) := \begin{cases} (x^2 + y^2)^{-1/2} e^{-|z|} & \text{für } 0 < x^2 + y^2 \leq 1, \\ (x^2 + y^2)^{-3/2} e^{-|z|} & \text{für } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^3 \setminus (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R})} g(x, y, z) \, d(x, y, z)$.

Aufgabe 7

Sei $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Gegeben seien eine Folge $(f_n)_n$ in $L^2(X, \mathbb{R})$ und eine Funktion $f \in L^2(X, \mathbb{R})$ derart, dass die Konvergenz

$$\int_X f_n \varphi \, dx \rightarrow \int_X f \varphi \, dx, \quad n \rightarrow \infty,$$

für alle $\varphi \in L^2(X, \mathbb{R})$ gilt. Folgern Sie die Abschätzung $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^2} \geq \|f\|_{L^2}$.

Lösungsvorschlag Aufgabe 1

- a) Zunächst ist jede einelementige Menge abgeschlossen und damit auch X als endliche Vereinigung einelementiger (abgeschlossener) Mengen. Also ist $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Die Inklusion $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist klar, da $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ die feinste σ -Algebra über X ist. Es bleibt $\mathcal{P}(X) \subseteq \sigma(\mathcal{K})$ zu zeigen. Dann folgt nämlich $\sigma(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{P}(X) \subseteq \sigma(\mathcal{K})$, da $\mathcal{K}$ nach obiger Argumentation ebenfalls Teilmenge von $\mathcal{B}(X)$ ist und $\sigma(\mathcal{K})$ die kleinste σ -Algebra ist, die $\mathcal{K}$ enthält. Sei also $A \in \mathcal{P}(X)$. Dann ist $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \in \sigma(\mathcal{K})$, da die einelementige Menge $\{x\}$ in $\mathcal{K}$ enthalten ist für jedes $x \in A$, die Vereinigung abzählbar ist und $\sigma(\mathcal{K})$ eine σ -Algebra ist. Also folgt $\mathcal{P}(X) \subseteq \sigma(\mathcal{K})$.
- b) Zunächst ist $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Weiter gilt $\mu(\emptyset) = 0$, da $\emptyset$ endlich ist. Also ist (M1) erfüllt. Sei nun $A_j := \{j\}$ für $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $(A_j)_j$ eine disjunkte Folge in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und es gilt $\mu(A_j) = 0$ für $j \in \mathbb{N}$, da A_j einelementig ist. Allerdings gilt auch die Ungleichung

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \mu(\mathbb{N}) = \infty > 0 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j).$$

Also ist μ kein Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Lösungsvorschlag Aufgabe 2

- a) Die Abbildung f heißt genau dann $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar, wenn für jede Menge $B \in \mathcal{B}$ die Beziehung $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ gilt.
- b) Seien $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $(f_n)_n$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$. Weiter gelte $f_n \leq f_{n+1}$ auf X für alle $n \in \mathbb{N}$ und es existiere $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$. Dann ist die Funktion f messbar und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \, dx = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx = \int_X f(x) \, dx.$$

- c) Seien $k, l \in \mathbb{N}$, $d := k + l$ und $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ integrierbar. Weiter seien $y_0 \in \mathbb{R}^l$ und $x_0 \in \mathbb{R}^k$. Definiere

$$\begin{aligned} f_{y_0}(x) &:= f(x, y_0) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^k, \\ f^{x_0}(y) &:= f(x_0, y) \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^l. \end{aligned}$$

Dann existieren solche Nullmengen $M \subseteq \mathbb{R}^k$ und $N \subseteq \mathbb{R}^l$, dass die Funktionen $f^x : \mathbb{R}^l \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^k \setminus M$ und $f_y : \mathbb{R}^k \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ für alle $y \in \mathbb{R}^l \setminus N$ integrierbar sind. Weiter sind auch die Funktionen

$$\begin{aligned} F(x) &:= \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^l} f^x(y) \, dy & x \in \mathbb{R}^k \setminus M, \\ 0 & x \in M, \end{cases} \\ G(y) &:= \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^k} f_y(x) \, dx & y \in \mathbb{R}^l \setminus N, \\ 0 & y \in N, \end{cases} \end{aligned}$$

integrierbar und

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z) \, dz = \int_{\mathbb{R}^k} F(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^l} G(y) \, dy.$$

Lösungsvorschlag Aufgabe 3

- a) Da die Exponentialfunktion stetig ist, sind die Funktionen g_n und g Verkettungen und Produkte messbarer Funktionen und damit wieder messbar. Weiter existiert so eine Nullmenge $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $K \in [0, \infty)$, dass $|q(x)| \leq K$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus M$ gilt. Da die Folge $(t_n)_n$ konvergiert, existiert außerdem eine Zahl T mit $|t_n| \leq T$ für $n \in \mathbb{N}$. Somit folgt die Abschätzung

$$|g_n(x)| = e^{t_n |q(x)|} |f(x)| \leq e^{TK} |f(x)|$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus M$ und $n \in \mathbb{N}$. Mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion gilt weiter die Konvergenz

$$g_n(x) = e^{t_n q(x)} f(x) \rightarrow e^{t q(x)} f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus M$. Da $h(x) := \begin{cases} e^{TK} |f(x)| & x \in \mathbb{R} \setminus M, \\ 0 & x \in M, \end{cases}$ eine Funktion in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ ist, liefert der Satz von Lebesgue die Behauptung.

- b) Definiere $f_n(x) := \frac{\cos(n^2 x^2) + n^2 x^2}{\sqrt{x^2 + n^4}}$ für $x \in [0, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Da f_n als Komposition stetiger Funktionen stetig ist, ist es insbesondere messbar. Zuerst erhalten wir die Konvergenz

$$f_n(x) = \frac{\cos(n^2 x^2) + n^2 x^2}{\sqrt{x^2 + n^4}} = \frac{\overbrace{\cos(n^2 x^2)}^{\rightarrow 0} + x^2}{\underbrace{\frac{n^2}{\sqrt{\frac{x^2}{n^4} + 1}}}_{\rightarrow 1}} \rightarrow x^2, \quad n \rightarrow \infty.$$

Weiter schätzen wir ab

$$|f_n(x)| \leq \frac{1 + n^2 x^2}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2} + x^2 \leq 1 + x^2 =: g(x), \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da die Funktion g als stetige Funktion auf dem Kompaktum $[0, 1]$ beschränkt ist, ist sie dort auch Lebesgue-integrierbar. Wir erhalten erneut mit dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n(x) \, dx = \int_{[0,1]} x^2 \, dx = \frac{1}{3}.$$

Lösungsvorschlag Aufgabe 4

- a) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $h : U \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $g : X \rightarrow [0, +\infty]$ integrierbar und $N \subseteq X$ eine Nullmenge mit den folgenden Eigenschaften.

- (i) Für festes $t \in U$ ist die Abbildung $x \mapsto h(t, x)$ integrierbar.
- (ii) Ist $x \in X \setminus N$, so ist $U \ni t \mapsto h(t, x)$ partiell differenzierbar.
- (iii) Die Abschätzung

$$\left| \frac{\partial h}{\partial t_j}(t, x) \right| \leq g(x)$$

ist für jedes $t \in U$, $x \in X \setminus N$ und $j \in \{1, \dots, k\}$ erfüllt.

Dann ist die Funktion $H : U \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_X h(t, x) \, dx$ partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial H}{\partial t_j}(t) = \int_X \frac{\partial h}{\partial t_j}(t, x) \, dx, \quad t \in U, \quad j \in \{1, \dots, k\}.$$

b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Abschätzungen

$$|F(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-(x-y)^2}}_{\leq 1} |f(y)| dy \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty,$$

da f integrierbar ist.

Wir prüfen im Folgenden die Voraussetzungen des Differenzierbarkeitssatzes nach. Dazu setzen wir

$$h(t, x) := e^{-(t-x)^2} f(x), \quad t, x \in \mathbb{R},$$

was als Produkt messbarer Funktionen wieder messbar ist. Obige Ungleichung zeigt, dass $h(t, \cdot)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ integrierbar ist, also gilt (i).

Weiter ist die Exponentialfunktion beliebig oft stetig differenzierbar und damit auch $h(\cdot, x)$ für jedes feste $x \in \mathbb{R}$. Wir erhalten

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, x) = -2(t-x)e^{-(t-x)^2} f(x)$$

für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, also gilt (ii).

Für $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|ye^{-y^2}| = |y|e^{-y^2} \leq e^{|y|-y^2} \leq \begin{cases} e^{|y|} & |y| < 2, \\ e^{-1/2y^2} & |y| \geq 2, \end{cases} \leq e^2,$$

wobei wir die Ungleichung $1 + |y| \leq e^{|y|}$ verwenden. Damit ergibt sich

$$\left| \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) \right| \leq 2e^2 |f(x)|$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. Da f integrierbar ist, ist auch (iii) erfüllt. Wir schließen mit dem Differenzierbarkeitssatz für Parameterintegrale, dass F differenzierbar ist mit

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) dx = -2 \int_{-\infty}^{\infty} (t-x)e^{-(t-x)^2} f(x) dx.$$

Lösungsvorschlag Aufgabe 5

- a) Der Kegel C ist messbar, da er abgeschlossen ist. Das sieht man wie folgt ein. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in C , die gegen ein $x \in \mathbb{R}^4$ konvergiert. Dann existieren Folgen $(s_n)_n$ in $[0, 1]$ und $(y_n)_n$ in K mit

$$x_n = (1-s_n)(0, y_n) + s_n v, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere konvergiert die Folge der ersten Komponenten $(x_n^1)_n$, also $x_n^1 = s_n v_1 \rightarrow x^1$. Da $v_1 > 0$ und $[0, 1]$ abgeschlossen sind, schließen wir, dass die Folge $(s_n)_n$ gegen ein $s \in [0, 1]$ konvergiert. Also konvergiert auch die Folge mit den Gliedern $(1-s_n)(0, y_n)$. Ist letztere Folge eine Nullfolge, so ist $x = sv \in C$. Ist sie keine Nullfolge, so kann $(s_n)_n$ nicht gegen 1 konvergieren, da $(y_n)_n$ beschränkt ist. Also konvergiert auch die Folge $(y_n)_n$, und zwar gegen ein $y \in K$, da K abgeschlossen ist. In jedem Fall liegt $x \in C$.

- b) Mit Teil a) ist das Prinzip von Cavalieri anwendbar. Schreibe $x = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4$ für $x \in \mathbb{R}^4$. Für $x_1 \notin [0, v_1]$ ist der Schnitt $C^{x_1} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, v) \in C\}$ leer. Für $x_1 \in [0, v_1]$ setze $s := \frac{x_1}{v_1} \in [0, 1]$ und es folgt

$$C^{x_1} = \{(1-s)y + s(v_2, \dots, v_4) \mid y \in K\}.$$

Also gilt mit der Translationsinvarianz des Lebesguemaßes, dem Transformationssatz und dem Satz von Tonelli

$$\begin{aligned} \lambda_3(C^{x_1}) &= \lambda_3(\{(1-s)y \mid y \in K\}) = \int_0^{r(1-s)} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tilde{r}^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\tilde{r} = 4\pi \int_0^{r(1-s)} \tilde{r}^2 d\tilde{r} \\ &= \frac{4}{3} \pi (r(1-s))^3 = \frac{4}{3} \pi \left(r(1 - \frac{x_1}{v_1})\right)^3. \end{aligned}$$

Mit dem Prinzip von Cavalieri folgt

$$\lambda_4(C) = \int_0^{v_1} \lambda_3(C^{x_1}) dx_1 = \frac{4}{3} \pi \int_0^{v_1} \left(r(1 - \frac{x_1}{v_1})\right)^3 dx_1 = \frac{v_1}{4} \lambda_3(K).$$

Lösungsvorschlag Aufgabe 6

Die Menge $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > 1\}$ ist messbar, da sie offen ist. Weiter ist die Menge $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\} = \mathbb{R}^3 \setminus (A \cup (\{(0, 0\} \times \mathbb{R}))$ ebenfalls in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ enthalten. Insgesamt ist

$$g(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{-1/2} e^{-|z|} \chi_B(x, y, z) + (x^2 + y^2)^{-3/2} e^{-|z|} \chi_A(x, y, z)$$

auf $\mathbb{R}^3 \setminus (\{(0, 0\} \times \mathbb{R})$ messbar als Komposition messbarer Funktionen. Hierbei stehen χ_A und χ_B für die charakteristischen Funktionen der Mengen A und B .

Wir verwenden Zylinderkoordinaten Φ und erhalten die Darstellungen $A = \Phi(K_1)$ sowie $B = \Phi(K_2)$ mit

$$K_1 := (1, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}, \quad K_2 := (0, 1] \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}.$$

Weiter ist Φ auf den offenen Mengen K_1° und K_2° injektiv. Da g positiv ist, erhalten wir mit dem Transformationssatz und dem Satz von Tonelli

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0\} \times \mathbb{R})} g(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \int_A g(x, y, z) \, d(x, y, z) + \int_B g(x, y, z) \, d(x, y, z) \\ &= \int_{K_1} g \circ \Phi |\det \Phi'| \, d(r, \varphi, z) + \int_{K_2} g \circ \Phi |\det \Phi'| \, d(r, \varphi, z) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_1^{\infty} r^{-3} e^{-|z|} r \, dr \, d\varphi \, dz \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^{-1} e^{-|z|} r \, dr \, d\varphi \, dz \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z|} \, dz + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z|} \, dz = 8\pi < \infty. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag Aufgabe 7

Ist $\|f\|_{L^2} = 0$, so ist die behauptete Ungleichung klar. Sei also $\|f\|_{L^2} > 0$. Wir wählen $\varphi = f \in L^2(X, \mathbb{R})$ in der vorausgesetzten Konvergenzaussage. Dann erhalten wir mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung die Abschätzung

$$\|f\|_{L^2}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n f \, dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n f \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^2} \|f\|_{L^2}.$$

Division durch $\|f\|_{L^2}$ ergibt nun die Behauptung.