Umbruch von Katja
Version 1 18.12.2019

SS 2019 18.09.2019

Plum
Analysis III

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 7 P.
Bemerkungen: Nachklausur

Aufgabe 1:
Es seien $X := \{1,2,3,4\}$ und $\mathcal{E} := \{\{1,3\},\{2,3,4\}\}$.

(i) Geben Sie die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ an. Ein Beweis ist nicht erforderlich.

(ii) Entscheiden Sie (mit Beweis), ob die folgenden Funktionen $f\colon X \to \mathbb{R}$ jeweils $\sigma(\mathcal{E})$-$\mathfrak{B}_1$-messbar sind:

(a) $f(x) := (x-2)^2$, (b) $f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x$.

Aufgabe 2:

(i) Berechnen Sie
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\, dx.$$

Hinweis: Kenntnisse aus Analysis I dürfen ohne Beweis benutzt werden.

(ii) Es seien $M \geq 0$ und $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ messbar mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [1,\infty)$. Zeigen Sie:
$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{\arctan(\frac{x}{n})}}{x^2} f(x)\, dx = \int_1^\infty \frac{f(x)}{x^2}\, dx.$$

Aufgabe 3:
Begründen Sie, dass $A := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 5,\ x^2+y^2 \geq 1\right\}$ messbar (d.h. $A \in \mathfrak{B}_3$) ist, und berechnen Sie $\lambda_3(A)$.

Aufgabe 4:

(i) Es sei A das Dreieck mit den Eckpunkten $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Berechnen Sie das Integral
$$\int_A |x|\mathrm{e}^{1-y}\, d(x,y).$$

(ii) Es sei $B := [0,1]^2$ und der Weg γ durchlaufe den Rand ∂B einmal in positiver Richtung. Berechnen Sie das Integral
$$\int_\gamma \left[(yx - x^3 + \sin(y))\, dy + (\arctan(x) - 2x^2 y)\, dx\right].$$

Aufgabe 5:
Es sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $$F(x) := \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\, dt.$$

Zeigen Sie, dass F wohldefiniert und differenzierbar ist, sowie für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$$xF(x) + 2F'(x) = 0.$$

Aufgabe 6:
Es seien $p \in (1,\infty)$, $f \in \mathcal{L}^p([1,\infty))$, $\alpha > \frac{2p-1}{p}$ und
$$g_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \setminus U_1(0) \to \mathbb{R},\ g_\alpha(x,y) := \frac{f(|(x,y)|)}{|(x,y)|^\alpha}.$$

Hierbei bezeichnet $|\cdot|$ die euklidische Norm und $U_1(0) := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |(x,y)| < 1\right\}$.

Zeigen Sie, dass $g_\alpha \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^2 \setminus U_1(0))$ für alle $q \in [1,p)$ gilt.

Aufgabe 7:
Es sei $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \mathrm{e}^{x-\pi}$.

(i) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten von f.

(ii) Zeigen Sie:
$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{1+k^2} = \frac{\pi}{2}\frac{\cosh(\pi)}{\sinh(\pi)} - \frac{1}{2}.$$

Hinweis: Sie dürfen $\|f\|_2^2 = 2\sinh(\pi)\cosh(\pi)$ ohne Beweis verwenden.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(i) *Behauptung:* $\sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$.

(ii) (a) *Behauptung:* f ist nicht $\sigma(\mathcal{E})$-$\mathfrak{B}_1$-messbar.

Beweis: Es ist $\{0\} = [0,0] \in \mathfrak{B}_1$. Wäre f $\sigma(\mathcal{E})$-$\mathfrak{B}_1$-messbar, so müsste gelten:

$$\{2\} = f^{-1}(\{0\}) \in \sigma(\mathcal{E}).$$

Dies ist nicht der Fall, also ist f nicht $\sigma(\mathcal{E})$-$\mathfrak{B}_1$-messbar. $\square$

(b) *Behauptung:* f ist $\sigma(\mathcal{E})$-$\mathfrak{B}_1$-messbar.

Beweis: Es gilt

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 0, \quad f(3) = -1, \quad \text{und} \quad f(4) = 0.$$

Damit erhält man für beliebiges $a \in \mathbb{R}$:

$$f^{-1}((-\infty, a]) = \begin{cases} \emptyset \in \sigma(\mathcal{E}), & a < -1, \\ \{3\} \in \sigma(\mathcal{E}), & -1 \leq a < 0, \\ \{2,3,4\} \in \sigma(\mathcal{E}), & 0 \leq a < 1, \\ \{1,2,3,4\} \in \sigma(\mathcal{E}), & 1 \leq a. \end{cases}$$

Da $\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$ ein Erzeuger von $\mathfrak{B}_1$ ist, ist f also $\sigma(\mathcal{E})$-$\mathfrak{B}_1$-messbar. $\square$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx = 1$.

Beweis: Zu $n \in \mathbb{N}$ definiert man $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$. Dann sind alle f_n als stückweise stetige Funktionen messbar. Weiter gilt $1 - \frac{x}{n} \geq 0$ für alle $x \in [0,n]$ und somit insgesamt $f_n(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Analysis I ist die Folge $\left((1 + \frac{x}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes feste $x > -1$ monoton wachsend. Daher gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \mathbb{1}_{[0,n]}(x) \leq \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} e^{-2x} \mathbb{1}_{[0,n+1]}(x) = f_{n+1}(x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \mathbb{1}_{[0,n]}(x) \to e^x e^{-2x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \quad (n \to \infty).$$

Mit dem Satz von Beppo-Levi folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1.$$

$\square$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{e^{\arctan(\frac{x}{n})}}{x^2} f(x)\, dx = \int_1^\infty \frac{f(x)}{x^2}\, dx$.

Beweis: Zu $n \in \mathbb{N}$ definiert man $g_n : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $g_n(x) := \frac{e^{\arctan(\frac{x}{n})}}{x^2} f(x)$. Dann sind alle g_n messbar und es gilt

$$|g_n(x)| = \frac{e^{\arctan(\frac{x}{n})}}{x^2} |f(x)| \leq \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{x^2} |f(x)| \leq M e^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2} =: g(x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [1,\infty)$. Da nach der Vorlesung $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx < \infty$ gilt, ist g eine integrierbare Majorante. Weiter gilt für festes $x \in [1,\infty)$

$$g_n(x) = \frac{e^{\arctan(\frac{x}{n})}}{x^2} f(x) \to \frac{f(x)}{x^2} \quad (n \to \infty).$$

Nach dem Satz von Lebesgue erhält man schließlich

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{e^{\arctan(\frac{x}{n})}}{x^2} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty g_n(x)\, dx = \int_1^\infty \lim_{n\to\infty} g_n(x)\, dx = \int_1^\infty \frac{f(x)}{x^2}\, dx.$$

$\square$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Behauptung: A ist messbar und es gilt $\lambda_3(A) = \frac{32}{3}\pi$.

Beweis: A ist als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen und daher messbar. Mit Hilfe der stetig differenzierbaren Transformation (Zylinderkoordinaten)

$$\phi\colon [0,\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (r,\varphi,z) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$$

erhält man

$$A = \left\{ (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) \colon 1 \le r \le \sqrt{5}, 0 \le \varphi \le 2\pi, |z| \le \sqrt{5-r^2} \right\}.$$

Definiert man $I := \left\{ (r,\varphi,z) \colon 1 \le r \le \sqrt{5}, 0 \le \varphi \le 2\pi, |z| \le \sqrt{5-r^2} \right\}$ (dann gilt $\phi(I) = A$) so liefert der Transformationssatz zusammen mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\lambda_3(A) &= \int_A 1\,dx = \int_I |\det \phi'(r,\varphi,z)|\, d(r,\varphi,z) = \int_1^{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{5-r^2}}^{\sqrt{5-r^2}} r\,dz\,d\varphi\,dr \\ &= 2\pi \int_1^{\sqrt{5}} 2r\sqrt{5-r^2}\,dr = 2\pi \left[-\frac{2}{3}(5-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{32}{3}\pi.\end{aligned}$$

□

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) *Behauptung:* Es gilt $\int_A |x|\mathrm{e}^{1-y}\,d(x,y) = \mathrm{e} - 2$.

Beweis: Es gilt $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - |x| \right\}$. Da A kompakt ist und $f\colon A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := |x|\mathrm{e}^{1-y}$ stetig ist, ist f integrierbar. Nach dem Satz von Fubini und mit Hilfe partieller Integration erhält man somit

$$\begin{aligned}\int_A |x|\mathrm{e}^{1-y}\,d(x,y) &= \int_{-1}^1 \int_0^{1-|x|} |x|\mathrm{e}^{1-y}\,dy\,dx = \int_{-1}^1 |x| \left[-\mathrm{e}^{1-y} \right]_0^{1-|x|} dx = \int_{-1}^1 |x| \left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{|x|} \right) dx \\ &= 2\int_0^1 \left(x\mathrm{e} - x\mathrm{e}^{|x|} \right) dx = \left[\mathrm{e}x^2 \right]_0^1 - 2\left[x\mathrm{e}^x \right]_0^1 + 2\int_0^1 \mathrm{e}^x\,dx \\ &= \mathrm{e} - 2\mathrm{e} + 2(\mathrm{e} - 1) = \mathrm{e} - 2.\end{aligned}$$

□

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\int_\gamma \left[(yx - x^3 + \sin(y))\,dy + (\arctan(x) - 2x^2y)\,dx \right] = \frac{1}{6}$.

Beweis: Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (f_1(x,y),\ f_2(x,y)) := (yx - x^3 + \sin(y),\ 2x^2y - \arctan(x))$$

ist stetig partiell differenzierbar und B ist zulässig. Der Satz von Gauß liefert somit

$$\begin{aligned}\int_\gamma \left[(yx - x^3 + \sin(y))\,dy + (\arctan(x) - 2x^2y)\,dx \right] &= \int_\gamma \left[f_1(x,y)\,dy - f_2(x,y)\,dx \right] \\ &= \int_B \operatorname{div} f(x,y)\,d(x,y).\end{aligned}$$

Es gilt $\operatorname{div} f(x,y) = y - 3x^2 + 2x^2 = y - x^2$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Da B kompakt ist und $\operatorname{div} f$ stetig ist, ist $\operatorname{div} f$ integrierbar und der Satz von Fubini liefert

$$\begin{aligned}\int_B \operatorname{div} f(x,y)\,d(x,y) &= \int_0^1 \int_0^1 (y - x^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[yx - \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=0}^1 dy \\ &= \int_0^1 \left(y - \frac{1}{3} \right) dy = \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y \right]_0^1 = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

□

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:
Behauptung: F ist wohldefiniert, differenzierbar und es gilt $xF(x) + 2F'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Nach der Vorlesung gilt $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi} < \infty$. Wegen $|\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)| \le \mathrm{e}^{-t^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,dt$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent, d.h. F ist wohldefiniert.

Definiere nun $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,t) := \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$. Dann gilt $|f(x,t)| \le \mathrm{e}^{-t^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. die Abbildung $t \mapsto f(x,t)$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ integrierbar. Ferner ist für $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung $x \mapsto f(x,t)$ partiell differenzierbar mit partieller Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)$. Außerdem gilt für alle $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-te^{-t^2}\sin(xt)\right| \le |t|\,e^{-t^2} =: g(t).$$

Da g integrierbar ist, liefert der Differenzierbarkeitssatz die Differenzierbarkeit von F und es gilt

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2}\sin(xt)\,dt$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Partielle Integration liefert für alle $x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = \left[\frac{1}{2}e^{-t^2}\sin(xt)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-t^2}x\cos(xt)\,dt = 0 - \frac{1}{2}xF(x)$$

und somit gilt $xF(x) + 2F'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

Behauptung: Es gilt $g_\alpha \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^2 \setminus U_1(0))$ für alle $q \in [1,p)$.

Beweis: Alle auftretenden Funktion sind offensichtlich messbar. Für alle $q \in [1,p)$ gilt wegen $\alpha > \frac{2p-1}{p}$:

$$(1-\alpha q)\underbrace{\frac{p}{p-q}}_{>0} < \left(1 - \frac{2p-1}{p}q\right)\frac{p}{p-q} = \frac{q+p-2pq}{p-q} \overset{1\le q}{\le} \frac{q-p}{p-q} = -1.$$

Nach der Vorlesung gilt daher $\int_1^\infty r^{\frac{(1-\alpha q)p}{p-q}}\,dr < \infty$, d.h. es gilt $r^{\frac{1-\alpha q}{q}} \in \mathcal{L}^{\frac{pq}{p-q}}([1,\infty))$. Da nach Voraussetzung $f \in \mathcal{L}^p([1,\infty))$ gilt, liefert die Höldersche Ungleichung mit $\lambda := p$ und $\lambda' = \frac{pq}{p-q}$ (dann gilt $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{p} + \frac{p-q}{pq} = \frac{1}{q}$; vgl. Aufgabe 49 Übungsblatt 13)

$$\left(\int_1^\infty (|f(r)|r^{\frac{1-\alpha q}{q}})^q\,dr\right)^{\frac{1}{q}} \le \|f\|_p \left(\int_1^\infty r^{\frac{1-\alpha q}{q}\frac{pq}{p-q}}\,dr\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

sowie $fr^{\frac{1-\alpha q}{q}} \in \mathcal{L}^q([1,\infty))$. Mittels Polarkoordinaten erhält man unter Verwendung des Transformationssatzes und des Satzes von Tonelli für alle $q \in [1,p)$:

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus U_1(0)} |g_\alpha(x,y)|^q\,d(x,y) = \int_1^\infty \int_0^{2\pi} \frac{|f(r)|^q}{r^{\alpha q}} r\,d\varphi\,dr = 2\pi \int_1^\infty |f(r)|^q r^{1-\alpha q}\,dr.$$

Insgesamt folgt also $g_\alpha \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^2 \setminus U_1(0))$ für alle $q \in [1,p)$.

Bemerkung: Der Beweis kann analog mit der normalen Hölderschen Ungleichung geführt werden. Hierbei müssen lediglich die Exponenten angepasst werden. □

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

(i) *Behauptung:* Es gilt $c_k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(1-ik)}\sinh(\pi)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis: f ist als stückweise stetige Funktion messbar und wegen ihrer Beschränktheit auch in $L^2([0,2\pi])$. Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} c_k = \langle f, b_k\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} e^{(1-ik)x-\pi}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-ik)}\left[e^{(1-ik)x-\pi}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-ik)}\left(e^{2ik\pi+\pi} - e^{-\pi}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-ik)}\underbrace{\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}_{=2\sinh(\pi)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(1-ik)}\sinh(\pi). \end{aligned}$$

□

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{1+k^2} = \frac{\pi}{2}\frac{\cosh(\pi)}{\sinh(\pi)} - \frac{1}{2}$.

Beweis: Mit der Parsevalschen Gleichung erhält man

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2 = |c_0|^2 + \sum_{k=1}^\infty \left(|c_k|^2 + |c_{-k}|^2\right) = \frac{2}{\pi}\sinh^2(\pi) + \frac{2}{\pi}\sinh^2(\pi)\sum_{k=1}^\infty\left(\frac{1}{|1-ik|^2} + \frac{1}{|1+ik|^2}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\sinh^2(\pi) + \frac{2}{\pi}\sinh^2(\pi)\sum_{k=1}^\infty\left(\frac{1}{1+k^2} + \frac{1}{1+k^2}\right) = \frac{2}{\pi}\sinh^2(\pi)\left(1 + 2\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{1+k^2}\right). \end{aligned}$$

Mit dem Hinweis $\|f\|_2^2 = 2\sinh(\pi)\cosh(\pi)$ folgt somit

$$1 + 2\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{1+k^2} = \pi\frac{\cosh(\pi)}{\sinh(\pi)} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{1+k^2} = \frac{\pi}{2}\frac{\cosh(\pi)}{\sinh(\pi)} - \frac{1}{2}.$$

□