Schnaubelt
Analysis III

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 7 P.

Bemerkungen: Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit drei Punkten bewertet.

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{\cos(x/n)+\mathrm{e}^{-n}n}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

b) Seien $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein endlicher Maßraum und $f\colon X\to\mathbb{R}$ integrierbar.
Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X \frac{1}{n}\ln(1+\mathrm{e}^{nf(x)})\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_X f_+(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$.

Aufgabe 2 Wir definieren die Mengensysteme

$$\mathcal{A}_{endl} := \{A\subseteq\mathbb{R} \mid A \text{ oder } A^{\complement} \text{ ist endlich}\}$$

und

$$\mathcal{A}_{abz} := \{A\subseteq\mathbb{R} \mid A \text{ oder } A^{\complement} \text{ ist abzählbar}\}\,.$$

Aus der Vorlesung ist bereits bekannt, dass $\mathcal{A}_{abz}$ eine σ-Algebra ist.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_{endl}$ keine σ-Algebra ist.

b) Bestimmen Sie die von $\mathcal{A}_{endl}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{A}_{endl})$.

c) Wir definieren die Funktion

$$\mu\colon \mathcal{A}_{abz}\to\mathbb{R};\quad \mu(A)=\begin{cases}0, & A \text{ abzählbar}\,,\\ 1, & A^{\complement} \text{ abzählbar}\,.\end{cases}$$

Zeigen Sie, dass μ ein Maß ist. (Sie können annehmen, dass die Abbildung wohldefiniert ist.)

Aufgabe 3 Sei $f\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F\colon(1,2)\to\mathbb{R};\quad t\mapsto\int_0^\infty x^t\mathrm{e}^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x$$

differenzierbar ist mit $F'(t)=\int_0^\infty\left[\ln(x)x^t\mathrm{e}^{-tx}f(x)-x^{t+1}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\right]\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 4 Sei $P:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le\frac{3}{4}, z=x^2-y^2\}$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_P\left(1+4z+8y^2\right)\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

Aufgabe 5 Sei $A:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \mathrm{e}^y<z<\frac{\pi}{2}<x\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_A\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2x}\mathrm{e}^y\right)\mathrm{e}^{2y}}{x^2}\,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z)\,.$$

©fsmi.uni-karlsruhe.de fsmi.kit fsmikit
E-Mail: mathe-klausuren@fsmi.uni-karlsruhe.de

Aufgabe 6 Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ mit $f \in o(r^{1-m})$ für $r \to \infty$, das heißt

$$\lim_{|x|_2 \to \infty} \frac{|f(x)|_2}{|x|_2^{1-m}} = 0\,,$$

und weiter $\partial_k f_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$ für alle $k \in \{1, \dots, m\}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^m} \operatorname{div} f(x) \,\mathrm{d}\lambda_m(x) = 0\,.$$

Aufgabe 7 Seien $p \in [1, \infty)$ und $m \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f_\alpha \colon \mathbb{R}^m \setminus B(0,1) \to \mathbb{R};\ f_\alpha(x) = \ln\left(1 + |x|_2^\alpha\right)$$

in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m \setminus B(0,1))$ liegt.

Hinweis: Man kann aus Betrachtung von $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ für $x \to 0^+$ eine geeignete Abschätzung für den Logarithmus herleiten.

© fsmi.uni-karlsruhe.de fsmi.kit fsmikit
E-Mail: mathe-klausuren@fsmi.uni-karlsruhe.de

Aufgabe 1

a) *Behauptung:* $\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\cos(x/n) + \mathrm{e}^{-n} n}{x^2} \,\mathrm{d}x = 1\,.$

Sei $f_n \colon (1,\infty) \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{\cos(x/n)+\mathrm{e}^{-n}n}{x^2}$, so ist f_n als stetige Funktion messbar. Es gilt $\max_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{-n} n = \frac{1}{\mathrm{e}}$ und somit

$$|f_n(x)| \leq \frac{1+\mathrm{e}^{-1}}{x^2}\,.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ auf $(1,\infty)$ integrierbar ist. Somit besitzt die Folge der f_n eine integrierbare Majorante und wir können den Satz von Lebesgue anwenden. Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\cos(x/n) + \mathrm{e}^{-n} n}{x^2} \,\mathrm{d}x &= \int_1^\infty \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(x/n) + \mathrm{e}^{-n} n}{x^2} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^\infty = 1\,.\end{aligned}$$

b) *Behauptung:* $\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{1}{n} \ln(1+\mathrm{e}^{nf(x)})\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X f_+ \,\mathrm{d}\mu\,.$

Sei $f_n \colon X \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{1}{n}\ln(1+\mathrm{e}^{nf(x)})$, so ist f_n als Komposition messbarer Funktionen messbar. Für $x \in X$ mit $f(x) < 0$ gilt

$$|f_n(x)| \leq \ln(1+\mathrm{e}^0) = \ln(2)\,.$$

Für $x \in X$ mit $f(x) \geq 0$ gilt hingegen

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}\ln(2\mathrm{e}^{nf(x)}) = \frac{\ln(2)}{n} + f(x)\,.$$

Zusammen ergibt sich für alle $x \in X$

$$|f_n(x)| \leq \ln(2) + |f(x)|\,.$$

Dies stellt eine integrierbare Majorante von f_n dar, da nach Voraussetzung f integrierbar ist und X ein endlicher Maßraum ist. Somit können wir den Satz von Lebesgue anwenden.

Für $x \in X$ mit $f(x) \geq 0$ gilt wiederum

$$f(x) = \frac{1}{n}\ln(\mathrm{e}^{nf(x)}) \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n}\ln(2\mathrm{e}^{nf(x)}) = \frac{\ln(2)}{n} + f(x)$$

und somit muss $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für $x \in \{f \geq 0\}$ gelten. Andererseits gilt für $x \in \{f < 0\}$

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n}\ln(2) \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Daraus folgt die Behauptung

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{1}{n}\ln(1+\mathrm{e}^{nf(x)})\,\mathrm{d}\mu(x) \overset{\text{Lebesgue}}{=} \int_X \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(1+\mathrm{e}^{nf(x)})\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X f_+\,\mathrm{d}\mu\,.$$

□

Aufgabe 2

a) Das Mengensystem $\mathcal{A}_{\text{endl}}$ ist keine σ-Algebra, da es nicht abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen ist. Seien beispielsweise $x_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \mathbb{N}$ paarweise verschiedene Elemente, so ist $\{x_i\} \in \mathcal{A}_{\text{endl}}$, aber $A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{x_i\}$ ist nicht endlich. Da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, muss auch das Komplement von A überabzählbar sein, andernfalls würde $A \cup A^{\complement} = \mathbb{R}$ abzählbar sein. Insbesondere ist $A^{\complement}$ nicht endlich. Somit gilt $A \notin \mathcal{A}_{\text{endl}}$.

b) Offensichtlich gilt $\mathcal{A}_{\text{endl}} \subseteq \mathcal{A}_{\text{abz}}$ und somit $\sigma(\mathcal{A}_{\text{endl}}) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_{\text{abz}}) = \mathcal{A}_{\text{abz}}$. Sei $A \in \mathcal{A}_{\text{abz}}$, so ist A oder $A^{\complement}$ abzählbar. Sei zunächst $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{x_i\}$ abzählbar, so gilt $A \in \sigma(\mathcal{A}_{\text{endl}})$ als abzählbare Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{A}_{\text{endl}}$.

Ist hingegen $A^{\complement} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{x_i\}$ abzählbar, so gilt $A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}}\{x_i\}^{\complement}$, wobei $\{x_i\}^{\complement} \in \mathcal{A}_{\text{endl}}$. Folglich gilt nach Vorlesung auch $A \in \sigma(\mathcal{A}_{\text{endl}})$, da $\sigma(\mathcal{A}_{\text{endl}})$ abgeschlossen unter abzählbaren Schnitten ist. Also gilt $\mathcal{A}_{\text{abz}} \subseteq \sigma(\mathcal{A}_{\text{endl}})$ und die Behauptung folgt.

Aufgabe 3 Wir wenden den *Differentiationssatz* der Vorlesung an. Sei dazu

$$g\colon (1,2)\times(0,\infty) \to \mathbb{R}; \quad g(t,x) = x^t \mathrm{e}^{-tx} f(x)\,.$$

Wir stellen wie in Analysis 1 leicht fest, dass die Funktion $x \mapsto x^\alpha \mathrm{e}^{-x}$ für $x, \alpha \in (0,\infty)$ ein globales Maximum bei $x = \alpha$ annimmt. Somit

$$\left|x^t \mathrm{e}^{-tx} f(x)\right| \le (x + x^2)\mathrm{e}^{-x}|f(x)| \le (\mathrm{e}^{-1} + 4\mathrm{e}^{-2})|f(x)|$$

für $(t,x) \in (1,2)\times(0,\infty)$. Also ist $g(t,\cdot)$ für alle $t \in (1,2)$ integrierbar. Die partielle Ableitung von g ist dabei gerade durch

$$\partial_t g(t,x) = \partial_t \left[\mathrm{e}^{\ln(x)t}\mathrm{e}^{-tx} f(x)\right] = \ln(x)x^t\mathrm{e}^{-tx}f(x) - x^{t+1}\mathrm{e}^{-tx}f(x)$$

gegeben. Es verbleibt eine von t unabhängige Majorante für $\partial_t g(t,x)$ zu bestimmen. Wir wissen (oder sehen mit l'Hospital ein), dass die Funktion $x\ln(x)$ für $x \to 0$ gegen 0 konvergiert. Weiter ist bekannt, dass $x^\alpha \mathrm{e}^{-x} \to 0$ für $x \to \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$, gilt. Somit ist die Funktion $x \mapsto \ln(x)(x + x^2)\mathrm{e}^{-x}$ beschränkt durch eine Konstante $C > 0$ für alle $x \in (0,\infty)$. Ebenso kann man $x \mapsto (x^2 + x^3)\mathrm{e}^{-x}$ gegen ein $\hat{C} > 0$ abschätzen. Es folgt

$$\begin{aligned}\left|\ln(x)x^t\mathrm{e}^{-tx}f(x) - x^{t+1}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\right| &\le \left|\ln(x)(x+x^2)\mathrm{e}^{-x}f(x)\right| + \left|(x^2+x^3)\mathrm{e}^{-x}f(x)\right| \\ &\le (C + \hat{C})|f(x)|\,.\end{aligned}$$

Dies ist eine von t unabhängige integrierbare Majorante. Die Behauptung folgt nun aus dem *Differentiationssatz* der Vorlesung. $\square$

Aufgabe 4 Die Fläche P ist nach Definition der Graph der C^1-Funktion $h\colon B(0,\sqrt{3/4}) \to \mathbb{R};\ h(x,y) = x^2 - y^2$. Die Gramsche Determinante der Parametrisierung $F\colon B(0,\sqrt{3/4}) \to \mathbb{R}^3; F(x,y) = (x,y,h(x,y))$, ist also nach Vorlesung durch

$$\sqrt{g_F(x,y)} = \sqrt{1 + |\nabla h(x,y)|_2^2} = \sqrt{1 + \left|\begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}\right|_2^2} = \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}$$

gegeben. Durch Transformation in Polarkoordinaten berechnet sich das Integral nun folgendermaßen

$$\begin{aligned}\int_P 1 + 4z + 8y^2 \,\mathrm{d}\sigma &= \int_{B(0,\sqrt{\frac{3}{4}})} (1 + 4(x^2-y^2) + 8y^2)\sqrt{g_F(x,y)}\,\mathrm{d}(x,y) \\ &= \int_{B(0,\sqrt{\frac{3}{4}})} (1 + 4(x^2+y^2))\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) \\ &= \int_0^{\sqrt{\frac{3}{4}}} \int_0^{2\pi} (1+4r^2)\sqrt{1+4r^2}\, r \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,.\end{aligned}$$

Die Subsitution $u = 1 + 4r^2$ mit “ $\mathrm{d}u = 8r\,\mathrm{d}r$” liefert

$$= 2\pi \int_1^4 \frac{1}{8} u\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{5}u^{5/2}\right]_1^4 = \frac{31\pi}{10}\,. \qquad \square$$

Aufgabe 5 Es gilt für $(x,y,z) \in A$, dass $x > \pi/2$ und $y \le \ln(\pi/2)$ gilt. Folglich ist $\cos\left(\frac{\pi}{2x}\mathrm{e}^y\right) \ge \cos(\pi/2) = 0$ für $(x,y,z) \in A$. Der Integrand ist somit nicht-negativ und wir können den Satz von Fubini-Tonelli anwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_A \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2x}\mathrm{e}^y\right)\mathrm{e}^{2y}}{x^2}\,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z) &= \int_0^{\pi/2}\int_{-\infty}^{\ln(z)}\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2x}\mathrm{e}^y\right)\mathrm{e}^{2y}}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ \underset{\left[\substack{u=\frac{1}{x} \\ \mathrm{d}u=\frac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x}\right]}{=} &\int_0^{\pi/2}\int_{-\infty}^{\ln(z)}\int_{2/\pi}^{0} -\cos\left(\frac{\pi}{2}u\mathrm{e}^y\right)\mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_{-\infty}^{\ln(z)} \left[\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}u\mathrm{e}^y\right)\right]_0^{2/\pi} \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{-\infty}^{\ln(z)} \sin(\mathrm{e}^y)\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ \underset{\left[\substack{u=\mathrm{e}^y \\ \mathrm{d}u=\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x}\right]}{=} &\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^z \sin(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\cos(z))\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - [\sin(z)]_0^{\pi/2}\right) = 1 - \frac{2}{\pi}\,. \qquad \square\end{aligned}$$

Aufgabe 6 Nach Voraussetzung ist $\operatorname{div} f(x) = \sum_{k\in\{1,\dots,m\}} \partial_k f_k$ integrierbar. Der Satz von Lebesgue zeigt dann

$$\int_{\mathbb{R}^m} \operatorname{div} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{B(0,r)} \operatorname{div} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $B(0,r) \subseteq \mathbb{R}^m$ für $r > 0$ eine offene Menge mit C^1-Rand ist. Insbesondere ist $f \in C_b^1(B(0,r), \mathbb{R}^m)$. Wir können also den Divergenzsatz von Gauß anwenden und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^m} \operatorname{div} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{\partial B(0,r)} (f(x) \mid \nu(x))\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{\partial B(0,r)} \Big(f(x) \;\Big|\; \frac{x}{r}\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^m} \operatorname{div} f(x)\,\mathrm{d}x\right| &\le \lim_{r\to\infty} \int_{\partial B(0,r)} \left|\Big(f(x) \;\Big|\; \frac{x}{r}\Big)\right|\mathrm{d}x \le \lim_{r\to\infty} \int_{\partial B(0,r)} |f(x)| \left|\frac{x}{r}\right| \mathrm{d}x \\ &\le \lim_{r\to\infty} \max_{x\in\partial B(0,r)} |f(x)|\sigma(\partial B(0,r)) \\ &= \sigma(\partial B(0,1)) \lim_{r\to\infty} \max_{x\in\partial B(0,r)} |f(x)| r^{m-1} = 0\,,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $f \in o(r^{1-m})$ verwendet haben. $\square$

Aufgabe 7 *Vorüberlegung:* Nach dem Satz von l'Hospital gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(x+1)}{1} = 1\,.$$

Also existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in [0,\delta]$ gilt $\frac{1}{2} \le \frac{\ln(1+x)}{x} \le 2$, beziehungsweise

$$\frac{1}{2}x \le \ln(1+x) \le 2x, \qquad \text{für } x \in [0,\delta]\,.$$

Sei $p \in [1,\infty)$. Für $\alpha \ge 0$ und $x \ge 1$ gilt $\ln(1+|x|_2^\alpha) \ge \ln(2) > 0$. Somit kann $x \mapsto \ln(1+|x|_2)$ nicht in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m \setminus B(0,1))$ liegen. Sei also $\alpha < 0$. Dann existiert ein Radius $r > 1$ so, dass für alle $x \in B(0,r)^\complement$ der Betrag $|x|_2^\alpha < \delta$ ist. Auf $B(0,r) \setminus B(0,1)$ ist f_α beschränkt also integrierbar, wohingegen auf $B(0,r)^\complement$ wir die folgende Abschätzung erhalten

$$\frac{1}{2}\int_{B(0,r)^\complement} |x|_2^\alpha\,\mathrm{d}\lambda_m \le \int_{B(0,r)^\complement} |f_\alpha|\,\mathrm{d}\lambda_m \le 2\int_{B(0,r)^\complement} |x|_2^\alpha\,\mathrm{d}\lambda_m\,.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $|x|_2^\alpha \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(0,1))$ genau dann gilt, wenn $\alpha < -\frac{m}{p}$. Insbesondere ist $|x|_2^\alpha$ auf $B(0,r) \setminus \overline{B}(0,1)$ beschränkt und somit integrierbar, also gilt

$$|x|_2^\alpha \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m \setminus B(0,r)) \iff \alpha < -\frac{m}{p}\,.$$

Aufgrund obiger Abschätzungen überträgt sich dieses Verhalten auch auf f_α. Zusammenfassend gilt also

$$f_\alpha \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m \setminus B(0,1)) \iff \alpha < -\frac{m}{p}\,.$$

$\square$