Prof. Dorothee Frey
Analysis III

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 7 P.
keine Hilfsmittel

Aufgabe 1

Sei $(X,\mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \coloneqq \{1,2,\dots,n\} \subseteq \mathbb{N}$.

(a) Es sei $\mathcal{E} \coloneqq \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Bestimmen Sie $\sigma(\mathcal{E})$.

(b) Zeigen Sie, dass es kein endliches Maß μ auf $(X,\mathcal{A})$ geben kann mit $\mu(A_{2^{n+1}}) \geq \mu(A_{2^n}) + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

(a) Sei $(X,\mathcal{A})$ ein messbarer Raum und für $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ sowie $f \colon X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktionen. Zeigen Sie, dass

$$A \coloneqq \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}.$$

messbar ist, d.h., dass $A \in \mathcal{A}$.

(b) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} \frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^2}\,\mathrm{d}\lambda^1(x).$$

Aufgabe 3

Für $t > 0$ betrachten wir

$$F(t) \coloneqq \int_{(0,\infty)} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-tx}}{x}\,\mathrm{d}\lambda^1(x).$$

Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist und dass $F(t) = \log(t)$ für alle $t > 0$.

Aufgabe 4

Es sei $K \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < 4x^2 + y^2 + z^2 < 2,\ z > 0\}$. Bestimmen Sie

$$\int_K z^3\,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z).$$

Aufgabe 5

(a) Sei $B \coloneqq \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \max\{|x|,|y|\} \leq \sqrt{1-z^2}\right\}$. Berechnen Sie $\lambda^3(B)$.

(b) Bestimmen Sie

$$\int_0^1 \left(\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\log(x)} \right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Aufgabe 6

Seien $M \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1,\ x^2+y^2 = z^2\}$ und $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (xz, yz, 2z^2)$.

(a) Berechnen Sie $\int_M \langle f, \nu \rangle\,\mathrm{d}\sigma$ direkt.

(b) Berechnen Sie das Integral aus a) mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

Aufgabe 7

(a) Seien $d \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$ und $B \coloneqq B_{\mathbb{R}^d}(0,1) \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f\colon B \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\|x\|_2^\alpha (1 - \|x\|_2)^\beta}$$

in $\mathcal{L}^p(B)$ liegt.

(b) Seien $n, d \in \mathbb{N}$ und $p \in (1, \infty]$ mit $n > d\big(1 - \frac{1}{p}\big)$. Sei ferner $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $g(x) = (1 + \|x\|_2)^n f(x)$ in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ liegt. Zeigen Sie, dass dann $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 1
Lösungsvorschlag:

(a) *Behauptung*: Es gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Beweis. „$\subseteq$“: Per Definition ist $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra und als solche eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Also ist die Inklusion „$\subseteq$“ trivial.

„$\supseteq$“: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\{n\} \in \sigma(\mathcal{E})$ für alle $n \in \mathbb{N}$: Denn ist $n = 1$, so folgt $\{1\} = A_1 \in \mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Ist dagegen $n > 1$, so ist $\{n\} = A_n \backslash A_{n-1} = A_n \cap A_{n-1}^c \in \sigma(\mathcal{E})$, da $\sigma(\mathcal{E})$ als σ-Algebra durchschnitts- und komplementstabil ist und $\mathcal{E}$ enthält. Ist nun $A \subseteq \mathbb{N}$, so ist A als Teilmenge der abzählbaren Menge $\mathbb{N}$ ebenfalls abzählbar. Somit folgt aus der Stabilität unter abzählbarer Vereinigung, dass $A = \bigcup_{n\in A}\{n\}$ in $\sigma(\mathcal{E})$ liegen muss. Dies zeigt „$\supseteq$“ und damit insgesamt $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. □

(b) *Behauptung*: Es gibt kein endliches Maß μ auf $(X, \mathcal{A})$ mit $\mu(A_{2^{n+1}}) \geq \mu(A_{2^n}) + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung per Widerspruch. Angenommen, es existiert ein endliches Maß μ auf $(X, \mathcal{A})$ mit $\mu(A_{2^{n+1}}) \geq \mu(A_{2^n}) + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $B_n \coloneqq A_{2^{n+1}} \backslash A_{2^n} = \{2^n + 1, \ldots, 2^{n+1}\} \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ eine disjunkte Folge mit $B \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \mathbb{N}\backslash\{1, 2\}$. Ferner erhalten wir aus der Voraussetzung, der Endlichkeit und der Additvität von μ, dass

$$\mu(B_n) = \mu(A_{2^{n+1}}) - \mu(A_{2^n}) \geq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aus der Monotonie und der σ-Additivität von μ erhalten wir dann

$$\mu(\mathbb{N}) \geq \mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

d.h., $\mu(\mathbb{N}) = \infty$. Dies steht allerdings im Widerspruch zur Endlichkeit von μ. □

Aufgabe 2

Lösungsvorschlag:

(a) *Behauptung*: Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und für $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n : X \to \mathbb{R}$ sowie $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktionen. Dann ist

$$A \coloneqq \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}.$$

messbar.

Beweis. Sei $x \in X$. Dann ist aus der Analysis 2 bekannt, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ genau dann gilt, wenn

$$\forall k \in \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}. \tag{1}$$

Daher setzen wir $A_{k,n} \coloneqq \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}\}$ für $k, n \in \mathbb{N}$. Dann ist $A_{k,n}$ messbar für alle $k, n \in \mathbb{N}$: In der Tat, die Funktion $g_{k,n} : X \to \mathbb{R}$, $g_{k,n}(x) = |f_n(x) - f(x)| - \frac{1}{k}$ ist als Komposition messbarer Funktionen messbar und daher $A_{k,n} = (g_{k,n})^{-1}((-\infty, 0])$ als Urbild einer messbaren Menge ebenfalls messbar. Hieraus sowie aus (1) und der Stabilität von $\mathcal{A}$ unter abzählbarer Schnitt- und Vereinigungsbildung folgern wir

$$A = \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in N} \bigcap_{n\geq N} A_{k,n} \in \mathcal{A}.$$

(b) *Behauptung.* Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} \frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^2} \, \mathrm{d}\lambda^1(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$f_n\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^2}.$$

Dann ist f_n als stetige Funktion insbesondere messbar. Aus der Analysis I ist bekannt, dass für jedes $x \in (0,\infty)$ die Beziehung $\sqrt[n]{x} \longrightarrow 1$ für $n \to \infty$ gilt. Also konvergiert f_n punktweise gegen f, wobei

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ haben wir

$$|f_n(x)| \leq 1 \quad \text{für alle } x \in (0,1)$$

und

$$|f_n(x)| \leq \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2} \leq \frac{x^{\frac{1}{2}}}{0+x^2} = x^{-\frac{3}{2}} \quad \text{für alle } x \in [1,\infty).$$

Hieraus folgt $|f_n| \leq g$ für alle $n \geq 2$, wobei wir

$$g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \min\{1, x^{-\frac{3}{2}}\} = \begin{cases} 1, & x \in (0,1), \\ x^{-\frac{3}{2}}, & x \in [1,\infty) \end{cases}$$

gesetzt haben. Dann ist g als Komposition messbarer Funktionen messbar und $g \in \mathcal{L}^1((0,\infty))$, da

$$\begin{aligned} \int_{(0,\infty)} g(x) \, \mathrm{d}\lambda^1(x) &= \int_{(0,1)} 1 \, \mathrm{d}\lambda^1(x) + \int_{[1,\infty)} x^{-\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}\lambda^1(x) \\ &= 1 + \lim_{m\to\infty} \int_{[1,m]} x^{-\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}x \\ &= 1 + \lim_{m\to\infty} -[2x^{-\frac{1}{2}}]|_1^m = 1 + 1 = 2 < \infty, \end{aligned}$$

wobei wir den Satz von der monotonen Konvergenz und Gleichheit des Riemann- und Lebesgue-Integrals für stetige Integranden auf kompakten Intervallen verwendet haben. Also ist g eine integrierbare Majorante und der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert nun

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} \frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^2} \, \mathrm{d}\lambda^1(x) = \int_{(0,\infty)} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}\lambda^1(x). \tag{2}$$

Das Integral auf der rechten Seite lässt sich wiederum mit dem Satz von der monotonen Konvergenz und der Übereinstimmung von Riemann- und Lebesgue-Integral für stetige Integranden auf kompakten Intervallen berechnen:

$$\int_{(0,\infty)} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}\lambda^1(x) = \lim_{m\to\infty} \int_0^m \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} [\arctan(x)]|_0^m = \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Aus (2), (3) folgt schließlich

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} \frac{x^{\frac{1}{n}}}{1+x^2} \,\mathrm{d}\lambda^1(x) = \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

Aufgabe 3
Lösungsvorschlag:

Behauptung. Für $t > 0$ sei

$$F(t) := \int_{(0,\infty)} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-tx}}{x} \,\mathrm{d}\lambda^1(x).$$

Dann ist F differenzierbar und es gilt $F(t) = \log(t)$ für alle $t > 0$.

Beweis. Wir betrachten

$$g\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(t,x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-tx}}{x}$$

und fixieren $a, b \in (0,\infty)$ mit $a < 1 < b$. Wir überprüfen die drei Voraussetzungen des Differentiationssatzes für $g|_{(a,b)\times(0,\infty)}$.

(i) *Voraussetzung 1.* Für jedes $t \in (a,b)$ ist $g(t,\cdot) \in \mathcal{L}^1((0,\infty))$.

Beweis. Sei $t \in (a,b)$ beliebig aber fest. Für $x \in (0,1]$ gilt dann

$$g(t,x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x} - t\frac{\mathrm{e}^{-tx} - 1}{tx}. \tag{4}$$

Die Terme auf der rechten Seite lassen sich mit Hilfe des Mittelwertsatzes abschätzen: In der Tat, aus dem Mittelwertsatz folgt, dass für jedes $y \in (0,\infty)$ ein $\xi \in (0,y)$ so existiert, dass

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-y} - 1}{y}\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^0}{y}\right| = |-\mathrm{e}^{-\xi}| \leq 1,$$

also insbesondere

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-y} - 1}{y}\right| \leq 1 \quad \text{für alle } y \in (0,\infty).$$

Nutzen wir dies in (4), so folgt

$$|g(t,x)| \leq \left|\frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x}\right| + t\left|\frac{\mathrm{e}^{-tx} - 1}{tx}\right| \leq 1 + t \leq 1 + b. \tag{5}$$

Andererseits gilt für $x \in (1,\infty)$

$$|g(t,x)| \leq \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} + \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{x} \leq \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-tx} \leq 2\mathrm{e}^{-ax}. \tag{6}$$

Setzen wir

$$h_1\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad h_1(x) = \begin{cases} 1 + b, & x \in (0,1], \\ 2\mathrm{e}^{-ax}, & x \in (1,\infty), \end{cases}$$

so haben wir also $|g(t,x)| \leq h_1(x)$ für alle $x \in (0,\infty)$. Ferner ist h_1 integrierbar, da

$$\int_{(0,\infty)} h_1(x) \,\mathrm{d}\lambda^1(x) = \int_{(0,1]} (1+b) \,\mathrm{d}\lambda^1(x) + 2\int_{(1,\infty)} \mathrm{e}^{-ax} \,\mathrm{d}\lambda^1(x)$$

$$= 1 + b + 2 \lim_{m\to\infty} \int_1^m \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = 1 + b + 2 \lim_{m\to\infty} \left[-\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}\right]_1^m \quad = 1 + b + \frac{2\mathrm{e}^{-a}}{a} < \infty,$$

wobei wir den Satz von der monotonen Konvergenz und die Gleichheit von Lebesgue- und Riemann-Integral für stetige Integranden auf kompakten Intervallen verwendet haben. Aus der Integrierbarkeit von h_1 folgt wegen $|g(t,\cdot)| \le h_1$ unmittelbar die Integrierbarkeit von $g(t,\cdot)$. □

(ii) *Voraussetzung 2.* Für festes $x \in (0,\infty)$ ist die Funktion $(a,b) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t,x)$ differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial t} = \mathrm{e}^{-tx}, \quad t \in (a,b).$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar durch Nachrechnen. □

(iii) *Voraussetzung 3.* Es existiert $h_2 \in \mathcal{L}^1((0,\infty))$ so, dass

$$\left|\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}\right| \le h_2(x) \quad \text{für alle } (t,x) \in (a,b)\times(0,\infty).$$

Beweis. Wir setzen $h_2\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $h_2(x) = \mathrm{e}^{-ax}$. Dann ist h_2 als stetige Funktion messbar. Für alle $t \in (a,b)$ und $x \in (0,\infty)$ gilt ferner

$$\left|\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}\right| = |\mathrm{e}^{-tx}| \le \mathrm{e}^{-ax} = h_2(x)$$

und h_2 ist integrierbar, denn es gilt nach dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\int_{(0,\infty)} h_2(x)\,\mathrm{d}\lambda^1(x) = \lim_{m\to\infty} \int_{(0,m)} \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}\lambda^1(x) = \lim_{m\to\infty} \left[-\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}\right]_0^m = \frac{1}{a} < \infty.$$ □

Somit sind die Voraussetzungen des Differenziationssatzes für $g|_{(a,b)\times(0,\infty)}$ erfüllt. Durch Ausschöpfun von $(0,\infty) = \bigcup_{a<1<b}(a,b)$ und Anwendung des Differentiationssatzes folgt daher, dass

$$F\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_{(0,\infty)} g(t,x)\,\mathrm{d}\lambda^1(x)$$

wohldefiniert und differenzierbar ist mit Ableitung

$$F'(t) = \int_{(0,\infty)} \partial_t g(t,x)\,\mathrm{d}\lambda^1(x) = \int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}\lambda^1(x) \quad \text{für alle } t \in (0,\infty).$$

Das Integral auf der rechten Seite lässt sich wieder mit dem Satz von der monotonen Konvergenz und der Übereinstimmung von Lebesgue- und Riemann-Integralen für stetige Integranden auf kompakten Intervallen explizit bestimmen:

$$\int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}\lambda^1(x) = \lim_{m\to\infty} \int_0^m \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \left[-\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{t}\right]\Big|_0^m = \frac{1}{t}.$$

Wir folgern insgesamt $F'(t) = \frac{1}{t}$ und damit $F(t) = \log(t) + C$ für alle $t \in (0,\infty)$ und eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Wegen $g(1,\cdot) = 0$ folgt trivialerweise $F(1) = 0$ und damit $C = 0$. Also ist

$$F(t) = \log(t), \quad t \in (0,\infty).$$

□

Aufgabe 4

Lösungsvorschlag:

Behauptung: Es gilt

$$\int_K z^3 \,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) = \frac{7}{24}\pi.$$

Beweis. Wir definieren die stetige und damit messbare Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = z^3.$$

Zu bestimmen ist das Integral $\int_K f(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z)$. Wir betrachten hierfür zunächst die lineare Transformation

$$\Phi_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi_1(x,y,z) = (2x,y,z).$$

Definieren wir dann die messbare Menge $A \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 < x^2+y^2+z^2 < 2,\ z > 0\}$, so folgt

$$\begin{aligned} K &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 < 4x^2+y^2+z^2 < 2,\ z > 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \Phi_1(x,y,z) \in A\} \\ &= \Phi_1^{-1}(A). \end{aligned}$$

Wegen $\Phi_1^{-1}(x,y,z) = (x/2,y,z)$ und $(\Phi_1^{-1})'(x,y,z) = \operatorname{diag}(1/2,1,1)$ für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, impliziert der Transformationssatz

$$\begin{aligned} \int_K z^3\,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) &= \int_{\Phi_1^{-1}(A)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) \\ &= \int_A f(\Phi_1^{-1}(x,y,z)) \cdot |\det(\Phi_1^{-1})'(x,y,z)|\,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) \\ &= \int_A z^3 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z). \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des letzten Integrals nutzen wir die bijektive Kugelkoordinatenabbildung

$$\Phi_2\colon (0,\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi) \to \mathbb{R}^3\backslash H_3, \quad \Phi_2(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ r\cos(\vartheta) \end{pmatrix},$$

wobei $H_3 \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = 0, y \geq 0\}$. Ferner gilt $\det \Phi_2'(r,\varphi,z) = r^2\sin(\vartheta)$ für alle $(r,\varphi,\vartheta) \in (0,\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)$. Wir stellen fest, dass $A\backslash H_3 = \Phi_2(U)$ mit

$$\begin{aligned} U &\coloneqq \left\{(r,\varphi,\vartheta) \in (0,\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi) \colon 1 < r^2 < 2,\ \vartheta < \frac{\pi}{2}\right\} \\ &= (1,\sqrt{2})\times(0,2\pi)\times\big(0,\frac{\pi}{2}\big). \end{aligned}$$

Da H_3 eine λ^3-Nullmenge ist, erhalten wir mit dem Transformationssatz und dem Satz von Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}\int_A z^3 \,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) &= \int_{A\setminus H_3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z)\\ &= \int_U f(\Phi_2(r,\varphi,\vartheta))\cdot|\det\Phi_2'(r,\varphi,\vartheta)|\,\mathrm{d}\lambda^3(r,\varphi,\vartheta)\\ &= \int_U r^3\cos^3(\vartheta)\cdot r^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\lambda^3(r,\varphi,\vartheta)\\ &= \int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5\cos^3(\vartheta)\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\\ &= 2\pi\left[\frac{r^6}{6}\right]_1^{\sqrt{2}}\left[-\frac{\cos(\vartheta)^4}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{12}\pi.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_K z^3\,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) = \int_A z^3\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) = \frac{7}{24}\pi.$$

wie gewünscht. □

Aufgabe 5

(a) *Behauptung.* Sei $B := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon 0\le\max\{|x|,|y|\}\le\sqrt{1-z^2}\right\}$. Dann ist B messbar und es gilt $\lambda^3(B)=\frac{16}{3}$.

Beweis. Offenbar ist $B\subseteq\mathbb{R}^3$ abgeschlossen und damit insbesondere messbar. Für $z\in[-1,1]$ ist

$$B_z := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon (x,y,z)\in B\} = [-\sqrt{1-z^2},\sqrt{1-z^2}]^2,$$

für $z\in\mathbb{R}\setminus[-1,1]$ ist offenbar $B_z=\emptyset$. Nach dem Prinzip von Cavalieri ist daher

$$\lambda^3(B) = \int_0^1 \lambda^2(B_z)\,\mathrm{d}\lambda^1(z) = \int_{-1}^1 (2\sqrt{1-z^2})^2\,\mathrm{d}\lambda^1(z) = 4\left[z-\frac{z^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{16}{3}.$$

□

(b) *Beweis.* Wir betrachten

$$f\colon (1,\mathrm{e})\times(0,1)\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\log(x)}\right)\chi_D(x,y),$$

wobei

$$D := \{(x,y)\in(1,\mathrm{e})\times(0,1)\colon \mathrm{e}^y<x\}. \tag{7}$$

Dann ist f als Komposition messbarer Funktionen messbar (beachte, dass D offen, also messbar und damit χ_D messbar ist). Ferner ist offenbar f beschränkt (es gilt $|f|\le 1$) und damit integrierbar über $(1,\mathrm{e})\times(0,1)$. Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned}\int_{(1,\mathrm{e})\times(0,1)} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^2(x,y) &= \int_{(1,\mathrm{e})}\left(\int_{(0,1)} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^1(y)\right)\mathrm{d}\lambda^1(x)\\ &= \int_{(0,1)}\left(\int_{(1,\mathrm{e})} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^1(x)\right)\mathrm{d}\lambda^1(y)\end{aligned} \tag{8}$$

Durch die Anwendung des Logarithmus erhält man aus (7)

$$D = \{(x,y)\in(1,\mathrm{e})\times(0,1)\colon y<\log(x)\}.$$

Für das erste iterierte Integral in (8) folgt daher

$$\begin{aligned}\int_{(1,\mathrm{e})}\left(\int_{(0,1)} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^1(y)\right)\,\mathrm{d}\lambda^1(x) &= \int_{(1,\mathrm{e})}\left(\int_{(0,\log(x))}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\log(x)}\right)\mathrm{d}\lambda^1(y)\right)\,\mathrm{d}\lambda^1(x)\\ &= \int_{(1,\mathrm{e})}\left[\frac{2}{\pi}\log(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\log(x)}\right)\right]_0^{\log(x)}\,\mathrm{d}\lambda^1(x)\\ &= \frac{2}{\pi}\int_{(1,\mathrm{e})}\log(x)\,\mathrm{d}\lambda^1(x).\end{aligned}$$

Mit partieller Integration erhält man für das Integral rechts

$$\int_{(1,\mathrm{e})}\log(x)\,\mathrm{d}\lambda^1(x) = \int_1^{\mathrm{e}}\log(x)\,\mathrm{d}x = [x\log(x)-x]_1^e = 1.$$

Insgesamt folgt also

$$\int_{(1,\mathrm{e})}\left(\int_{(0,1)} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^1(y)\right)\,\mathrm{d}\lambda^1(x) = \frac{2}{\pi}. \tag{9}$$

Andererseits ist nach (7) das zweite iterierte Integral in (8)

$$\int_{(0,1)}\left(\int_{(1,\mathrm{e})} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^1(y)\right)\,\mathrm{d}\lambda^1(x) = \int_0^1\left(\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\log(x)}\right)\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y. \tag{10}$$

Aus (8), (9) und (10) folgt schließlich

$$\int_0^1\left(\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\log(x)}\right)\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}.$$

Aufgabe 6

(a) *Behauptung*: Es gilt $\int_M \langle f,\nu\rangle\,\mathrm{d}\sigma = -\frac{\pi}{2}$.

Beweis. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass M eine C^{1-}-Hyperfläche ist. Wir definieren $T := (0,2\pi)\times(0,1)$ und

$$F\colon T\to\mathbb{R}^3,\quad F(\varphi,z) = \begin{pmatrix} z\cos(\varphi)\\ z\sin(\varphi)\\ z\end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$F'(\varphi,z) = \begin{pmatrix} -z\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\\ z\cos(\varphi) & \sin(\varphi)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

und damit (unter Verwendung von $\cos^2+\sin^2=1$)

$$g_F(\varphi,z) = \det(F'(\varphi,z)^tF'(\varphi,z)) = \det\begin{pmatrix} z^2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = 2z^2,\quad \text{also}\quad \sqrt{g_F(\varphi,z)} = \sqrt{2}z \tag{11}$$

für alle $(\varphi,z)\in T$. Ferner ist das äußere Normalenfeld an $F(T)$ gegeben durch

$$\nu(F(\varphi,z)) = \frac{(\partial_\varphi F(\varphi,z) \times \partial_z F(\varphi,z))}{\|(\partial_\varphi F(\varphi,z) \times \partial_z F(\varphi,z))\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}z}\begin{pmatrix} z\cos(\varphi) \\ z\sin(\varphi) \\ -z \end{pmatrix} \tag{12}$$

für $(\varphi, z) \in T$. Da

$$\begin{aligned} N_1 &:= \{0\}, \\ N_2 &:= \{(0,z,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \in (0,1)\}, \\ N_3 &:= \{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1\}. \end{aligned}$$

σ_M-Nullmengen sind, ist auch $M \setminus F(T) = N_1 \cup N_2 \cup N_2$ eine σ_M-Nullmenge. Daher erhalten wir unter Verwendung von (11), (12) und dem Satz von Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned} \int_M \langle f, \nu \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int_{F(T)} \langle f, \nu \rangle \,\mathrm{d}\sigma &= \int_T \langle f(F(\varphi,z)), \nu(F(\varphi,z)) \rangle \sqrt{g_F(\varphi,z)} \,\mathrm{d}\lambda^2(\varphi,z) \\ &= \int_T \left\langle \begin{pmatrix} z^2\cos(\varphi) \\ z^2\sin(\varphi) \\ 2z^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z\cos(\varphi) \\ z\sin(\varphi) \\ -z \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\lambda^2(\varphi,z) \\ &= \int_T \left[z^3(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) - 2z^3 \right] \mathrm{d}\lambda^2(\varphi,z) \\ &= -\int_0^{2\pi} \int_0^1 z^3 \,\mathrm{d}\lambda^1(z) \,\mathrm{d}\lambda^1(\varphi) = -2\pi \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^1 = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(b) Wir betrachten den Kegel

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \in (0,1),\, x^2 + y^2 < z^2\}.$$

Dann ist K offen und beschränkt und $\partial K = M \cup D$ eine C^{1-}-Hyperfläche, wobei

$$D := \{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Ferner ist offenbar $f \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$. Nach dem Satz von Gauß gilt daher

$$\int_K (\mathrm{div} f)(x,y,z) \,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) = \int_{\partial K} \langle f, \nu \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int_M \langle f, \nu \rangle \,\mathrm{d}\sigma + \int_D \langle f, \nu \rangle \,\mathrm{d}\sigma,$$

also

$$\int_M \langle f, \nu \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int_K (\mathrm{div} f)(x,y,z) \,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) - \int_D \langle f, \nu \rangle \,\mathrm{d}\sigma. \tag{13}$$

Wir berechnen nun die Integrale auf der rechten Seite von (13). Es gilt

$$(\mathrm{div} f)(x,y,z) = (\partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3)(x,y,z) = z + z + 4z = 6z \quad \text{für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

also unter Verwendung von Zylinderkoordinaten und dem Satz von Fubini-Tonelli

$$\int_K (\mathrm{div} f)(x,y,z) \,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) = 6 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^z zr \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi = \frac{3\pi}{2}. \tag{14}$$

Andererseits definiert $F \colon B(0,1) \to D$, $F(x,y) = (x,y,1)$ eine Parametrisierung mit $g_F = 1$ und $D \setminus F(B(0,1)) = \{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ ist eine $\sigma_{\partial K}$-Nullmenge. Ferner ist das äußere Normalenfeld an $F(B(0,1))$ gegeben durch $\nu(x,y,1) = e_3$ für alle $(x,y,1) \in F(B(0,1))$. Es folgt

$$\int_D \langle f, \nu\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int_{B(0,1)} \langle f(x,y,1), e_3\rangle \,\mathrm{d}\lambda^2(x,y) = 2\int_{B(0,1)} \mathrm{d}\lambda^2(x,y) = 2\lambda^2(B(0,1)) = 2\pi. \tag{15}$$

Also folgt aus (13) und (14), (15) schließlich $\displaystyle\int_M \langle f, \nu\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$,

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil a).

Aufgabe 7
Lösungsvorschlag:

(a) *Behauptung.* Die Funktion f liegt genau dann in $\mathcal{L}^p(B)$, wenn $\alpha < \frac{d}{p}$ und $\beta < \frac{1}{p}$.

Beweis. Seien $p \in [1,\infty)$ und $d \in \mathbb{N}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sowie $B := B_{\mathbb{R}^d}(0,1)\setminus\{0\}$ und

$$f\colon B \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\|x\|_2^\alpha (1-\|x\|_2)^\beta}.$$

Wir bemerken, dass f radialsymmetrisch ist, d.h., es gilt $f(x) = g(\|x\|_2)$ für alle $x \in B$, wobei

$$g\colon (0,1) \to \mathbb{R}, \quad g(r) = \frac{1}{r^\alpha (1-r)^\beta}.$$

Eine Anwendung von Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^d$ zeigt

$$\int_B |f|^p \,\mathrm{d}\lambda^d = \omega_{d-1}\int_0^1 |g(r)|^p r^{d-1}\,\mathrm{d}r = \omega_{d-1}\int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha p - d+1}(1-r)^{\beta p}}\,\mathrm{d}r,$$

wobei $\omega_{d-1} := \sigma(\partial B(0,1))$ das Oberflächenmaß der $d-1$-dimensionalen Einheitssphäre bezeichnet (beachte $\omega_0 := 1$). Hieraus lesen wir ab, dass obiges Integral genau dann endlich ist, wenn $\alpha p - d + 1 < 1$ und $\beta p < 1$, d.h., wenn $\alpha < \frac{d}{p}$ und $\beta < \frac{1}{p}$. □

(b) *Behauptung.* Seien $n, d \in \mathbb{N}$ und $p \in (1,\infty]$ mit $n > d\big(1 - \frac{1}{p}\big)$. Sei ferner $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $g(x) = (1+\|x\|_2)^n f(x)$ in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ liegt. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Für $p \in (1,\infty]$ sei p' der konjugierte Koeffizient, d.h., $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p} \in [1,\infty)$. Wieder sehen wir durch d-dimensionale Polarkoordinaten, dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+\|x\|_2)^{np'}}\,\mathrm{d}\lambda^d(x) = \omega_{d-1}\int_0^\infty \frac{r^{d-1}}{(1+r)^{np'}}\,\mathrm{d}r \le \omega_{d-1}\int_0^\infty \frac{1}{(1+r)^{np'-d+1}}\,\mathrm{d}r < \infty,$$

da nach Voraussetzung

$$np' - d + 1 > d\left(1 - \frac{1}{p}\right)\cdot p' - d + 1 = \frac{d}{p'}\cdot p' - d + 1 = 1.$$

Also liegt die Funktion $h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+\|x\|_2)^{-n}$ in $\mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R}^d)$. Wegen

$$f(x) = \frac{1}{(1+\|x\|_2)^n}\cdot\big((1+\|x\|_2)^n f(x)\big) = h(x)g(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$\|f\|_1 = \|h\cdot g\|_1 \le \|h\|_{p'}\|g\|_p < \infty,$$

da $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ nach Vorassetzung. Also liegt f wie gewünscht in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. □