Lösungsvorschläge Analysis III Klausur Frühjahr 2018

Aufgabe 1

a) Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A_0 \in \mathcal{A}$. Beweisen Sie, dass

$$\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}},\ A \mapsto \mu(A \cap A_0)$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert.

b) Seien $X \neq \emptyset$ eine Menge, $B \subseteq X$ nichtleer und

$$\mathcal{M} := \{A \subseteq X \ :\ A \subseteq B \text{ oder } A^c \subseteq B\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf X ist.

Lösungsvorschlag Aufgabe 1

a) Zunächst ist ν wohldefiniert, da $A \cap A_0 \in \mathcal{A}$ für jedes $A \in \mathcal{A}$ ist, und es gilt $\nu(A) = \mu(A \cap A_0) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Wir prüfen nun die Eigenschaften eines Maßes nach.

Es ist $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap A_0) = \mu(\emptyset) = 0$, da μ ein Maß ist.

Weiter sei $(A_j)_j$ eine disjunkte Folge in $\mathcal{A}$. Dann ist die Folge $(A_j \cap A_0)_j$ ebenfalls disjunkt und wir schließen mit der Maßeigenschaft von μ

$$\nu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) = \mu\Big(\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) \cap A_0\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \big(A_j \cap A_0\big)\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \cap A_0) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j).$$

Insgesamt ist ν ein Maß auf $\mathcal{A}$.

b) Wir prüfen die Definition einer σ-Algebra nach.

(1) Es ist $X^c = \emptyset \subseteq B$ und damit $X \in \mathcal{M}$.

(2) Sei $A \in \mathcal{M}$. Dann gilt

$$A \subseteq B \text{ oder } A^c \subseteq B \iff (A^c)^c \subseteq B \text{ oder } A^c \subseteq B \iff A^c \in \mathcal{M}.$$

(3) Sei $(A_j)_j$ eine Folge in $\mathcal{M}$. Also gilt $A_j \subseteq B$ oder $A_j^c \subseteq B$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

(I) Ist $A_j \subseteq B$ für alle $j \in \mathbb{N}$, so ist $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \subseteq B$, also auch $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{M}$.

(II) Ist $A_j \not\subseteq B$ für ein $j \in \mathbb{N}$, so ist $A_j^c \subseteq B$, also $\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right)^c = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j^c \subseteq B$ und damit wieder $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{M}$.

Insgesamt ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf X.

Aufgabe 2

a) Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} b & \text{falls } f(x) > b, \\ f(x) & \text{falls } a \leq f(x) \leq b, \\ a & \text{falls } f(x) < a. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g messbar ist.

b) Gegeben sei $\mathcal{M} := \{\emptyset, \{3,5\}, \{4\}, \{3,4,5\}\}$. Dann ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf $X = \{3,4,5\}$ (das dürfen Sie ohne Beweis verwenden). Weiter sei $f : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x-4)^2$.

Beweisen Sie, dass f $\mathcal{M}$-$\mathcal{B}_1$-messbar ist. Hierbei ist $\mathcal{B}_1 := \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Lösungsvorschlag Aufgabe 2

a) Da f messbar ist, sind die Mengen $\{f > b\}$, $\{a \leq f \leq b\}$ und $\{f < a\}$ in $\mathcal{B}_1$ enthalten. Weil g die Darstellung

$$g(x) = b\mathbb{1}_{\{f>b\}}(x) + f(x)\mathbb{1}_{\{a<f<b\}}(x) + a\mathbb{1}_{\{f<a\}}(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$ besitzt, ist g als Produkt und Summe $\mathcal{B}_1$-$\mathcal{B}_1$-messbarer Funktionen $\mathcal{B}_1$-$\mathcal{B}_1$-messbar.

b) Es ist $f(x) = \mathbb{1}_{\{3,5\}}(x)$ für $x \in X$. Da die Menge $\{3,5\} \in \mathcal{M}$ ist, ist f damit $\mathcal{M}$-$\mathcal{B}_1$-messbar nach einem Beispiel aus der Vorlesung.

Wir weisen dies nun zusätzlich explizit nach. Sei dazu $A \in \mathcal{B}_1$. Wir unterscheiden vier Fälle.

(i) $A \cap \{0,1\} = \emptyset$. Dann ist $f^{-1}(A) = \emptyset \in \mathcal{M}$.

(ii) $A \cap \{0,1\} = \{0,1\}$. Dann ist $f^{-1}(A) = X \in \mathcal{M}$.

(iii) $A \cap \{0,1\} = \{0\}$. Dann ist $f^{-1}(A) = \{4\} \in \mathcal{M}$.

(iv) $A \cap \{0,1\} = \{1\}$. Dann ist $f^{-1}(A) = \{3,5\} \in \mathcal{M}$.

Aufgabe 3

a) Im Folgenden sei stets $d \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{B}_d := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$. Weiter wird stets das Integral bezüglich des Lebesgue-Maßes betrachtet.

(a) Seien $X \in \mathcal{B}_d$, $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(X)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, +\infty)$ und $f := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ eine einfache Funktion in Normalform. Wie ist $\int_X f(x)\,dx$ definiert?

(b) Sei $X \in \mathcal{B}_d$ und $f : X \to [0, +\infty]$ sei $\mathcal{B}(X) - \overline{\mathcal{B}}_1$-messbar. Wie ist $\int_X f(x)\,dx$ definiert?

(c) X und f seien wie in (ii). Wann heißt f über X integrierbar?

b) Wie lautet der Konvergenzsatz von Lebesgue?

Lösungsvorschlag Aufgabe 3

Im Folgenden bezeichne λ_d stets das d-dimensionale Lebesguemaß auf $\mathcal{B}_d$.

a) (a) Man definiert

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \lambda_d(A_j) \in [0,+\infty].$$

(b) Sei nun $f : X \to [0,+\infty]$ $\mathcal{B}(X) - \overline{\mathcal{B}}_1$ messbar. Dann gibt es nach Vorlesung eine monoton wachsende Folge $(f_n)_n$ positiver einfacher Funktionen, die auf X punktweise gegen f konvergiert. Man setzt dann

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei das Integral der einfachen Funktionen wiederum über die eindeutig gegebene Normalform wie in a) definiert ist.

(c) Die messbare nichtnegative Funktion f heißt genau dann über X integrierbar, wenn

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

ist.

b) Seien $X \in \mathcal{B}_d$ und $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(X)$ mit den folgenden Eigenschaften. Die Folge $(f_n)_n$ konvergiere fast überall auf X und es gebe eine integrierbare Funktion $g : X \to [0,+\infty]$ mit

$$|f_n(x)| \le g(x)$$

für fast alle $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert so eine integrierbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, dass $(f_n)_n$ fast überall auf X gegen f konvergiert und

$$\int_X |f_n - f|\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{sowie} \quad \int_X f_n\,\mathrm{d}x \to \int_X f\,\mathrm{d}x$$

für $n \to \infty$ gelten.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie Ihre Antwort jeweils.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \log\left(2 + \tfrac{1}{n}\cos(nx)\right) \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x,$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^n \cos\left(\frac{x}{n}\right) \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

$\int_1^\infty g(t)dt < \infty$

Lösungsvorschlag Aufgabe 4

a) Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n(x) := \log(2 + \frac{1}{n}\cos(nx))\mathrm{e}^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Als stetige Funktion ist f_n $\overline{\mathcal{B}}_1$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-messbar. Weiter gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \log(2 + \underbrace{\tfrac{1}{n}\cos(nx)}_{\to 0,\ n\to\infty})\mathrm{e}^{-|x|} \to \log(2)\mathrm{e}^{-|x|} =: f(x)$$

für $n \to \infty$. f ist ebenfalls messbar als stetige Funktion. Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| = \log(2 + \tfrac{1}{n}\cos(nx))\mathrm{e}^{-|x|} \le \log(3)\mathrm{e}^{-|x|} =: g(x).$$

Wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \log(3)\left[\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right] = 2\log(3) < \infty$$

ist $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (g ist als stetige Funktion ebenfalls messbar) und der Konvergenzsatz von Lebesgue liefert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \log(2 + \tfrac{1}{n}\cos(nx))\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \log(2)\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = 2\log(2).$$

b) Wir setzen $f_n : (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \mathbb{1}_{(1,n)}(x)\cos\left(\frac{x}{n}\right)x^{-2}$. Dann ist f_n das Produkt zweier stetiger (also messbarer) Funktionen und einer Indikatorfunktion eines Intervalls (ebenfalls messbar), ist also messbar.
Zudem gilt für festes $x \in (1,\infty)$

$$f_n(x) \to \mathbb{1}_{(1,\infty)}(x)\cos(0)\,x^{-2} = x^{-2} =: f(x)$$

für $n \to \infty$, wobei f stetig, also messbar ist. Weiter ist $f_n \ge 0$, denn $f_n(x) = 0$ für $x \ge n$ und $f_n(x) > 0$ für $x \in (1,n)$, da $\cos\left(\frac{x}{n}\right) > \cos\left(\frac{n}{n}\right) = \cos(1) > 0$ (der Kosinus ist fallend auf $[0,\pi]$) und $x^{-2} > n^{-2} > 0$. Schließlich gilt $\cos\left(\frac{x}{n}\right) \le \cos\left(\frac{x}{n+1}\right)$ für $x \in (1,n)$ und somit

$$f_n(x) \le \mathbb{1}_{(1,n)}(x)\cos\left(\frac{x}{n+1}\right)x^{-2} \le \mathbb{1}_{(1,n+1)}(x)\cos\left(\frac{x}{n+1}\right)x^{-2} = f_{n+1}(x).$$

$\int_1^\infty g(t)dt$

Mit dem Satz von Beppo Levi folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \cos\left(\frac{x}{n}\right)x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = [-\frac{1}{x}]_{x=1}^{\infty} = 1.$$

Alternativ lässt sich f auch als integrierbare Majorante für $|f_n|$ benutzen und das Ergebnis folgt aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue.

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion $g : (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \displaystyle\int_1^\infty \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x$.

a) Zeigen Sie die Integrierbarkeit von g auf $(1,\infty)$.

b) Beweisen Sie, dass g auf $(1,\infty)$ differenzierbar ist.

$f(t,x) = e^{-tx^2}$

$|e^{-tx^2}|$

$= e^{-tx^2} \le h(t)$

$\forall x \ge 1\ \forall t \ge 1$

$\int_1^\infty \left(\int_1^\infty e^{-tx^2} dx\right) dt = \int_1^\infty \left(\int_1^\infty e^{-tx^2} dt\right) dx$

$= \int_1^\infty \left[-\frac{1}{x^2} e^{-tx^2}\right]_1^\infty = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx < \infty$

Lösungsvorschlag Aufgabe 5

a) Wir definieren $f : (1,\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-tx^2}$. f ist stetig und positiv, womit g wohldefiniert und positiv ist, also ist das Integral über g wohldefiniert. Nach Fubini für nicht-negative Funktionen gilt

$$\begin{aligned}\int_1^\infty |g(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_1^\infty \int_1^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_1^\infty \int_1^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty [-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-tx^2}]_{t=1}^\infty\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 < \infty,\end{aligned}$$

also ist g integrierbar.

b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ integrierbar auf ganz $\mathbb{R}$ ist. Daher gilt dies auch auf $(1,\infty)$ und wegen $f(x,t) \le \mathrm{e}^{-x^2}$ für alle $t \in (1,\infty)$ ist $x \mapsto f(x,t)$ integrierbar für alle $t \in (1,\infty)$.
Alternativ folgt die Integrierbarkeit auch aus der Integrierbarkeit von g, woraus $g < \infty$ fast überall folgt. Da g in t fallend ist, folgt $g(t) < \infty$ für alle $t \in (1,\infty)$, was die Behauptung ist.
Die Abbildung $t \mapsto f(x,t)$ ist differenzierbar auf $(1,\infty)$ für alle $x \in (1,\infty)$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -x^2\mathrm{e}^{-tx^2} \qquad \forall t \in (1,\infty).$$

Außerdem gilt

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \le x^2\mathrm{e}^{-x^2} =: h(x) \qquad \forall t \in (1,\infty)$$

und h ist integrierbar, denn

$$\int_1^\infty h(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_1^\infty x\cdot(-2x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{P.I.}}{=} -\frac{1}{2}\underbrace{[x\mathrm{e}^{-x^2}]_{x=1}^\infty}_{=-\mathrm{e}^{-1}} + \frac{1}{2}\int_1^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x < \infty$$

Nach dem Differenzierbarkeitssatz folgt, dass g auf $(1,\infty)$ mit $g'(t) = -\int_1^\infty x^2\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x$, $t \in (1,\infty)$, differenzierbar ist.

Aufgabe 6

a) Sei A das Parallelogramm mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$, $(1,1)$. Berechnen Sie das Integral $\int_A (\mathrm{e}^{-x}+y)\ \mathrm{d}(x,y)$.

b) Seien $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2+y^2 \le 1,\ z \in [0,1]\}$ und $f : B \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto z\log(x^2+y^2)$. Ist f auf B integrierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis zu Teil b): Die Stammfunktion von $s \mapsto \log(s)$ ist $s \mapsto s\log(s) - s$.

Lösungsvorschlag Aufgabe 6

a) Der Integrand ist stetig auf $\mathbb{R}^2$ und nicht-negativ, solange $y \ge 0$ gilt, was in A der Fall ist. Deshalb existiert das Integral und wir können Fubini benutzen. A besteht aus den zwei Dreiecken mit Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$ beziehungsweise $(1,0)$, $(1,1)$ und $(2,1)$. Somit gilt

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x \text{ oder } 1 \le x \le 2, x-1 \le y \le 1\}$$

und es folgt

$$\begin{aligned}\int_A \mathrm{e}^{-x} + y\ \mathrm{d}(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{e}^{-x}+y)\mathbb{1}_A(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{-x}+y)(\mathbb{1}_{0\le x\le 1}(x)\mathbb{1}_{0\le y\le x}(x,y) + \mathbb{1}_{1<x\le 2}(x)\mathbb{1}_{x-1\le y\le 1}(x,y))\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1\int_0^x (\mathrm{e}^{-x}+y)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^2\int_{x-1}^1 (\mathrm{e}^{-x}+y)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 [y\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}y^2]_{y=0}^x\ \mathrm{d}x + \int_1^2 [y\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}y^2]_{y=x-1}^1\ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x^2\ \mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1)^2\ \mathrm{d}x \\ &= [-(x+1)\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{6}x^3]_{x=0}^1 + [(x-1)\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}(x-1)^3]_{x=1}^2 \\ &= -2\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{6} + 1 - 0 + \mathrm{e}^{-2} + 1 - \frac{1}{6} - 0 - \frac{1}{2} + 0 \\ &= \frac{3}{2} + \mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass mit partieller Integration

$$\int \pm x\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \mp x\mathrm{e}^{-x} \pm \int \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \mp(1+x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Alternativ lässt sich A schreiben als

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1, y \le x \le y+1\}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_A \mathrm{e}^{-x} + y\ \mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1\int_y^{y+1} (\mathrm{e}^{-x}+y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 [-\mathrm{e}^{-x} + xy]_{x=y}^{y+1}\ \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 (-\mathrm{e}^{-y-1} + \mathrm{e}^{-y} + y)\ \mathrm{d}y \\ &= [\mathrm{e}^{-y-1} - \mathrm{e}^{-y} + \frac{1}{2}y^2]_{y=0}^1 = (\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{2}) - (\mathrm{e}^{-1} - 1 + 0) = \frac{3}{2} + \mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

b) Wir benutzen Zylinderkoordinaten Φ für den Transformationssatz und stellen fest, dass $\Phi(A) = B$ mit $A := (0,1] \times [0,2\pi] \times [0,1]$. Φ ist injektiv auf A° und f ist stetig auf B (also messbar), somit folgt mit Fubini für nicht-negative Funktionen

$$\int_B |f| \,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{\text{Trafo}}{=} \int_A |f \circ \Phi| \cdot |\det \Phi'| \,\mathrm{d}(r,\phi,z) \overset{\text{Fub}}{=} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 z(-\log(r^2)) \cdot r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}z$$
$$= \left(\int_0^1 z \,\mathrm{d}z\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\phi\right) \cdot \left(\int_0^1 -r \log(r^2) \,\mathrm{d}r\right)$$
$$\overset{\text{Hinweis}}{=} \frac{1}{2} \cdot 2\pi \frac{1}{2} \cdot [r^2 - \underbrace{r^2 \log(r^2)}_{\to 0 (r \to 0)}]_0^1 = \frac{\pi}{2} < \infty.$$

Somit ist f integrierbar auf B (und analog $\int_B f \,\mathrm{d}(x,y,z) = -\frac{\pi}{2}$).

Aufgabe 7

a) Seien $f \in L^\infty((0,\infty)) \cap L^3((0,\infty))$ und $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)x^{-\frac{1}{4}}$.

Zeigen Sie, dass $g \in L^2((0,\infty))$ ist mit $\|g\|_2 \leq C\,(\|f\|_\infty^2 + \|f\|_3^2)^{\frac{1}{2}}$, wobei $C > 0$ eine von f unabhängige Konstante ist.

b) Seien f_n, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen und für jede Menge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\lambda_d(A) < \infty$ gelte $(f_n)|_A \to f|_A$ für $n \to \infty$ fast überall auf $\mathbb{R}^d$.

Folgern Sie, dass die Folge $(f_n)_n$ dann fast überall auf $\mathbb{R}^d$ gegen f konvergiert.

Lösungsvorschlag Aufgabe 7

a) Es gilt

$$\|g\|_2^2 = \int_0^\infty \frac{|f(x)|^2}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x}_{=:I} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{|f(x)|^2}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x}_{=:II}.$$

zu I: Da $f \in L^\infty((0,\infty))$, gilt $|f|^2 \in L^\infty((0,1))$ (mit $\| |f|^2 \|_\infty = \|f\|_\infty^2$), zudem $(x \mapsto \sqrt{x}) \in L^1((0,1))$, somit folgt mit Hölder ($p = \infty$, $p' = 1$)

$$I \leq \| |f|^2 \|_\infty \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \|f\|_\infty^2 \cdot [2\sqrt{x}]_{x=0}^1 = 2\,\|f\|_\infty^2 < \infty.$$

zu II: Da $f \in L^3((0,\infty))$, gilt $|f|^2 \in L^{\frac{3}{2}}((0,1))$, zudem $(x \mapsto \sqrt{x}) \in L^3((1,\infty))$, somit folgt mit Hölder ($p = \frac{3}{2}$, $p' = 3$)

$$II \leq \| |f|^2 \|_{\frac{3}{2}} \cdot \left(\int_1^\infty \frac{1}{(\sqrt{x})^3} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\int_0^\infty (|f|^2)^{\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left(\int_0^\infty |f|^3 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left([-2x^{-\frac{1}{2}}]_{x=1}^\infty\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\,\|f\|_3^2 < \infty.$$

Daher folgt $g \in L^2((0,\infty))$ mit

$$\|g\|_2 = (I + II)^{\frac{1}{2}} \leq \left(2\,\|f\|_\infty^2 + \underbrace{2^{\frac{1}{3}}}_{\leq 2} \|f\|_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}(\,\|f\|_\infty^2 + \|f\|_3^2)^{\frac{1}{2}}.$$

b) Wir setzen $A_n := U_n(0)$ (Kugel um 0 mit Radius n) für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $A_n \in \mathfrak{B}_d$ und $\lambda_d(A_n) < \infty$, daher existiert nach Voraussetzung eine Nullmenge N_n, sodass

$$f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} f(x) \qquad \forall x \in A_n \setminus N_n. \qquad (*)$$

Setze $N := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$, dann ist N nach Vorlesung eine Nullmenge. Sei nun $x \in \mathbb{R}^d \setminus N$, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_n$, zudem $x \notin N_n \subseteq N$. Somit folgt $f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} f(x)$ nach $(*)$. Dies bedeutet $f_n \to f$ fast überall auf $\mathbb{R}^d$.