Plum
Analysis III

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell

Aufgabe 1:
Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \sum_{1\leq k<i\leq n} \mu(A_k \cap A_i).$$

Aufgabe 2:
(i) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1+\frac{1}{n}}^{1+n} \frac{n^3}{1+(nx)^3}\,dx.$$

(ii) Es seien $d \in \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{B}_d$, $X \neq \emptyset$ und $f \in \mathcal{L}^1(X)$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{\sin(f(x))f(x)}{1+\mathrm{e}^{nf(x)}}\,dx = \int_X \sin(f_-(x))f_-(x)\,dx.$$

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass $K := \{x \in \mathbb{R}^5 : |x| \leq 1\}$ messbar (d.h. $K \in \mathfrak{B}_5$) ist und berechnen Sie $\lambda_5(K)$. Dabei bezeichnet $|\cdot|$ die euklidische Norm.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\lambda_4(\{x \in \mathbb{R}^4 : |x| \leq r\}) = \frac{1}{2}\pi^2 r^4$ gilt.

Aufgabe 4:
(i) Es sei A das Dreieck mit den Eckpunkten $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_A \cos(x^4)(1-y)^2\,d(x,y).$$

(ii) Es seien $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt[4]{x^2+y^2}\}$ und

$$f : B \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) := \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}z.$$

Ist f auf B integrierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie gegebenenfalls $\int_B f(x,y,z)\,d(x,y,z)$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2}\,dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ gilt.

Aufgabe 5:
Es seien $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ und $H := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ferner umlaufe der Weg γ den Rand der Menge B einmal in positiver Richtung.

Zeigen Sie, dass für $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ und $v \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ gilt:

$$\int_B u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) d(x,y) + \int_B (\nabla u)\cdot(\nabla v)\,d(x,y) = \int_\gamma (H(u\nabla v))\cdot d(x,y).$$

Aufgabe 6:
Es seien $d \in \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{B}_d$, $X \neq \emptyset$, $1 < p < q < \infty$ und $f \in \mathcal{L}^p(X) \cap \mathcal{L}^q(X)$. Zeigen Sie: Ist $\theta \in (0,1)$ und $r := \theta p + (1-\theta)q$, so gilt: $f \in \mathcal{L}^r(X)$ und

$$\int_X |f(x)|^r \, dx \leq \left(\int_X |f(x)|^p \, dx \right)^\theta \left(\int_X |f(x)|^q \, dx \right)^{1-\theta}.$$

Aufgabe 7:
Es seien $p \in [1, \infty]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$f_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \; f_\alpha(x,y) := \arctan(|(x,y)|^\alpha).$$

Bestimmen Sie sämtliche $\alpha \in \mathbb{R}$ für die $f_\alpha \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ gilt. Dabei bezeichnet $|\cdot|$ die euklidische Norm.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \sum_{1\leq k<i\leq n} \mu(A_k \cap A_i)$.

Beweis: Die Aussage kann mittels Vollständiger Induktion bewiesen werden.

IA: Für $n = 1$ gilt $\mu(A_1) = \mu(A_1)$ und für $n = 2$ ist aus der Vorlesung bekannt, dass

$$\mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

gilt.
IV: Für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \sum_{1\leq k<i\leq n} \mu(A_k \cap A_i).$$

IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Mit der σ-Subadditivität erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k) &= \mu(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \underset{\text{IV}}{\leq} \mu(A_{n+1}) + \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \sum_{1\leq k<i\leq n} \mu(A_k \cap A_i) \\
&= \mu\left(A_{n+1} \cup \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mu\left(A_{n+1} \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \sum_{1\leq k<i\leq n} \mu(A_k \cap A_i) \\
&= \mu\left(A_{n+1} \cup \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap A_{n+1})\right) + \sum_{1\leq k<i\leq n} \mu(A_k \cap A_i) \\
&\leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) + \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \cap A_{n+1}) + \sum_{1\leq k<i\leq n} \mu(A_k \cap A_i) \\
&= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) + \sum_{1\leq k<i\leq n+1} \mu(A_k \cap A_i).
\end{aligned}$$

□

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{n\to\infty} \int_{1+\frac{1}{n}}^{1+n} \frac{n^3}{1+(nx)^3}\, dx = 1$.

Beweis: Zu $n \in \mathbb{N}$ definiert man $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{1}{x^3+\frac{1}{n^3}} \mathbb{1}_{[1+\frac{1}{n},1+n]}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \frac{1}{x^3 + \frac{1}{n^3}} \mathbb{1}_{[1+\frac{1}{n},1+n]} \leq \frac{1}{x^3 + \frac{1}{(n+1)^3}} \mathbb{1}_{[1+\frac{1}{n+1},1+(n+1)]} = f_{n+1}(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, sowie

$$f_n(x) = \frac{1}{x^3 + \frac{1}{n^3}} \mathbb{1}_{[1+\frac{1}{n},1+n]} \to \frac{1}{x^3} \mathbb{1}_{(1,\infty)} \qquad (n \to \infty).$$

Mit dem Satz von Beppo-Levi folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1+\frac{1}{n}}^{1+n} \frac{n^3}{1+(nx)^3}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{1}{2}.$$

□

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{\sin(f)f}{1+e^{nf}}\,dx = \int_X \sin(f_-)f_-\,dx$.

Beweis: Zu $n \in \mathbb{N}$ definiert man $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{\sin(f(x))f(x)}{1+e^{nf(x)}}$. Dann gilt

$$|f_n| = \frac{|\sin(f)f|}{|1+e^{nf}|} \leq |\sin(f)f| =: g.$$

g ist wegen $|g| \leq |f|$ eine integrierbare Majorante. Weiter gilt

- $f(x) > 0$: $f_n(x) = \frac{\sin(f(x))f}{1+e^{nf(x)}} \to 0$ $(n \to \infty)$.
- $f(x) = 0$: $f_n(x) = 0$.
- $f(x) < 0$: $f_n(x) = \frac{\sin(f(x))f}{1+e^{nf(x)}} \to \sin(f(x))f(x)$ $(n \to \infty)$.

Insgesamt ergibt sich somit $f_n \to \sin(f_-)f_-$ für $n \to \infty$. Nach dem Satz von Lebesgue erhält man somit

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{\sin(f)f}{1+e^{nf}}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,dx = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_X \sin(f_-(x))f_-(x)\,dx.$$

$\square$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Behauptung: K ist messbar und es gilt $\lambda_5(K) = \frac{8}{15}\pi^2$.

Beweis: K ist als abgeschlossene Menge messbar. Weiter gilt für $x_5 \in \mathbb{R}$:

$$K_{x_5} = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \leq 1-x_5^2\right\},$$

also ist $K_{x_5} = \emptyset$ für $|x_5| > 1$. Mit dem Hinweis folgt $\lambda_4(K_{x_5}) = \frac{1}{2}\pi^2(1-x_5^2)^2$ für $|x_5| \leq 1$ und $\lambda_4(K_{x_5}) = 0$ für $|x_5| > 1$. Mit dem Prinzip von Cavalieri erhält man

$$\lambda_5(K) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_4(K_{x_5})\,dx_5 = \frac{1}{2}\pi^2 \int_{-1}^{1} (1-x_5^2)^2\,dx_5 = \pi^2\left[x_5 - \frac{2}{3}x_5^3 + \frac{1}{5}x_5^5\right]_0^1 = \frac{8}{15}\pi^2.$$

$\square$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
(i) *Behauptung:* Es gilt $\int_A \cos(x^4)(1-y)^2\,d(x,y) = \frac{\sin(1)}{12}$.

Beweis: Es gilt $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1,\ 1-x \leq y \leq 1\}$. Da A kompakt ist und $f \colon A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \cos(x^4)(1-y)^2$ stetig ist, ist f integrierbar. Nach dem Satz von Fubini gilt somit

$$\begin{aligned}\int_A \cos(x^4)(1-y)^2\,d(x,y) &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 \cos(x^4)(1-y)^2\,dy\,dx = -\frac{1}{3}\int_0^1 \cos(x^4)\left[(1-y)^3\right]_{1-x}^1 dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 x^3\cos(x^4)\,dx = \frac{1}{12}\left[\sin(x^4)\right]_0^1 = \frac{\sin(1)}{12}.\end{aligned}$$

$\square$

(ii) *Behauptung:* f ist auf B integrierbar mit $\int_B f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{4}$.

Beweis: Zunächst ist f nicht-negativ auf B und als stetige Funktion insbesondere messbar. Mittels der stetig differenzierbaren Transformation (Zylinderkoordinaten)

$$\phi \colon [0,\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\infty) \to,\ (r,\varphi,z) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$$

erhält man

$$B = \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) \colon 0 \leq r < \infty,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq \sqrt{r}\}.$$

Definiert man $I := \{(r,\varphi,z) \colon 0 \leq r < \infty,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq \sqrt{r}\}$ (dann gilt $\phi(I) = B$) so liefert der Transformationssatz zusammen mit dem Satz von Fubini

$$
\begin{aligned}
\int_B f(x,y,z)\,d(x,y,z) &= \int_I f(\phi(r,\varphi,z))|\det \phi'(r,\varphi,z)|\,d(r,\varphi,z)\\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{r}} r\mathrm{e}^{-r^2} z\,dz\,d\varphi\,dr = 2\pi \int_0^\infty r\mathrm{e}^{-r^2} \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\sqrt{r}} dr\\
&= \pi \int_0^\infty r^2 \mathrm{e}^{-r^2}\,dr = \pi \left(\lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{2} r\mathrm{e}^{-r^2} \right]_0^R + \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2}\,dr \right)\\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2}\,dr = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{4},
\end{aligned}
$$

wobei aus der Vorlesung bekannt ist, dass $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2}\,dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ gilt. Damit ist f auf B insbesondere integrierbar. □

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

Behauptung: Für $u \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ und $v \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ gilt:

$$
-\int_B u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) d(x,y) = \int_B (\nabla u)\cdot(\nabla v)\,d(x,y) - \int_\gamma (H(u\nabla v))\cdot d(x,y).
$$

Beweis: Definiert man $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $f(x,y) := u\nabla v = (u\frac{\partial v}{\partial x}, u\frac{\partial v}{\partial y})$, so gilt $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$. Mit dem Satz von Gauß erhält man somit

$$
\begin{aligned}
\int_B \left((\nabla u)\cdot(\nabla v) + u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right) d(x,y) &= \int_B \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) d(x,y)\\
= \int_B \operatorname{div}(u\nabla v)\,d(x,y) = \int_B \operatorname{div} f\,d(x,y) &= \int_\gamma (f_1\,dy - f_2\,dx) = \int_\gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial x}\,dy - u\frac{\partial v}{\partial y}\,dx \right)\\
= \int_\gamma \begin{pmatrix} -u\frac{\partial v}{\partial y} \\ u\frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot d(x,y) &= \int_\gamma (H(u\nabla v))\cdot d(x,y).
\end{aligned}
$$

□

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

Behauptung: Für alle $\theta \in (0,1)$ gilt

$$
\int_X |f(x)|^{\theta p + (1-\theta)q}\,dx \le \left(\int_X |f(x)|^p\,dx \right)^\theta \left(\int_X |f(x)|^q\,dx \right)^{1-\theta}.
$$

Beweis: Für $\lambda = \frac{1}{\theta}$ und $\lambda' = \frac{1}{1-\theta}$ gilt $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = \theta + (1-\theta) = 1$. Die Hölderungleichung liefert somit

$$
\begin{aligned}
\int_X |f(x)|^r\,dx = \int_X |f(x)|^{\theta p} |f(x)|^{(1-\theta)q}\,dx &\le \left(\int_X |f(x)|^{\theta p\lambda}\,dx \right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\int_X |f(x)|^{(1-\theta)q\lambda'}\,dx \right)^{\frac{1}{\lambda'}}\\
&= \left(\int_X |f(x)|^p\,dx \right)^\theta \left(\int_X |f(x)|^q\,dx \right)^{1-\theta}.
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir insbesondere $f \in \mathcal{L}^r(X)$. □

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

Behauptung: Es gilt $f_\alpha \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $\alpha \geq 0$ ist f_α in keinem $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ enthalten und für $\alpha < 0$ gilt

$$f_\alpha \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \ \Leftrightarrow \ p > -\frac{2}{\alpha}.$$

Beweis:

- Im Fall $p = \infty$ gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\|f_\alpha\|_\infty = \sup\{|f_\alpha(x,y)| : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\} \leq \frac{\pi}{2} < \infty,$$

d.h. es gilt $f_\alpha \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Sei nun $1 \leq p < \infty$. f_α ist nicht-negativ und als stetige Funktion messbar. Mittels Polarkoordinaten erhält man unter Verwendung des Transformationssatzes und des Satzes von Tonelli:

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} |f_\alpha(x,y)|^p \, d(x,y) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r \arctan(r^\alpha)^p \, d\varphi \, dr = 2\pi \int_0^\infty r \arctan(r^\alpha)^p \, dr.$$

Weiter gilt

$$\int_0^1 r \arctan(r^\alpha)^p \, dr \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \int_0^1 r \, dr = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^p < \infty.$$

Sei nun zunächst $\alpha \geq 0$. Dann gilt $r^\alpha \geq 1$ für alle $r \geq 1$ und somit

$$\int_1^\infty r \arctan(r^\alpha)^p \, dr \geq \left(\frac{\pi}{4}\right)^p \int_1^\infty r \, dr = \infty,$$

d.h. f_α liegt in keinem $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ falls $\alpha \geq 0$.

Sei nun $\alpha < 0$. Dann gilt $r^\alpha \to 0$ für $r \to \infty$. Nach den Regeln von de l'Hospital gilt außerdem $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$. Daher existiert ein $h > 0$ mit

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\arctan(x)}{x} \leq \frac{3}{2} \quad \text{für alle } 0 < x \leq h$$

und somit gilt $\frac{1}{2}x \leq \arctan(x) \leq \frac{3}{2}x$ für alle $0 \leq x \leq h$. Damit gilt

$$\int_1^\infty r \arctan(r^\alpha)^p \, dr < \infty \ \Leftrightarrow \ \int_1^\infty r^{\alpha p + 1} \, dr < \infty \ \Leftrightarrow \ \alpha p + 1 < -1 \ \Leftrightarrow \ p > -\frac{2}{\alpha},$$

d.h. $f_\alpha \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ genau dann, wenn $p > -\frac{2}{\alpha}$ (und $\alpha < 0$) gilt.

$\square$