Schnaubelt
Analysis III

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: XX P.

Aufgabe 1 a) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{x^2+n^2}\,\mathrm{d}x$.

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}-x}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 2 Es seien I eine beliebige, nichtleere Indexmenge und nichtleere Mengen X_i mit zugehörigen σ-Algebren $\mathcal{A}_i$, für $i \in I$, sowie eine Menge $X \neq \emptyset$ gegeben. Wir betrachten nun eine Familie von Funktionen $(f_i)_{i\in I}$ wobei $f_i\colon X_i \to X$ und definieren das folgende Mengensystem $\mathcal{A}$ auf X. Es sei

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq X \mid f_i^{-1}(A) \in \mathcal{A}_i \text{ für alle } i \in I\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X ist.

b) Zeigen Sie weiter, dass $\mathcal{A}$ die größte σ-Algebra $\mathcal{C}$ auf X ist bezüglich derer alle f_i $\mathcal{A}_i$-$\mathcal{C}$-messbar sind.

Aufgabe 3 Seien $m \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ integrierbar. Wir definieren

$$F\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}; \quad F(t) = \int_{B(0,t^2)} f\left(\tfrac{x}{t}\right) \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\lambda_m(x).$$

Zeigen Sie, dass F stetig und integrierbar ist.

Aufgabe 4 Sei $R > 0$. Es bezeichne

$$B_+ := B(0,R) \cap \{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1,x_2,x_3 > 0\}.$$

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{B_+} \sqrt{1+|x|_2^3}\,\mathrm{d}\lambda_3(x).$$

b) Sei

$$f\colon B_+ \to \mathbb{R}; \quad f(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_3}|x|_2^{-3}.$$

Ist f integrierbar auf B_+? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 Sei $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x,\ 0 < z < y^2,\ x^2 < y + \sqrt{z}\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_A x\mathrm{e}^{-(y+\sqrt{z})^2}\,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z).$$

Aufgabe 6 Sei $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 1, 0 \le z \le 1\}$ und es bezeichne $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1, 0 < z < 1\}$ die Mantelfläche des Zylinders. Berechnen Sie

$$\int_M \left(\begin{pmatrix} xy^2 \\ yx^2 \\ z(x^2+y^2) \end{pmatrix} \middle| \nu(x,y,z) \right) \mathrm{d}\sigma,$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale an Z bezeichne.

Hinweis: Satz von Gauß. Sie können davon ausgehen, dass Z einen Lipschitz-Rand besitzt und die Kanten $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1, z \in \{0,1\}\}$ $\sigma_{\partial Z}$-Nullmengen sind.

Aufgabe 7 Seien $1 < p, p' < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R})$ gegeben und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Zeigen Sie, dass

$$\|f\|_p = \sup_{g \in L^{p'}(\mathbb{R}), \|g\|_{p'} = 1} \|fg\|_1 .$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\tilde{g} = \frac{|f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p/p'}}$.

Aufgabe 1

Lösungsvorschlag. a) *Behauptung:* $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{x^2+n^2}\,\mathrm{d}x = 0\,.$

Sei $f_n\colon (0,1)\to\mathbb{R}; x\mapsto \frac{n\sqrt{x}}{x^2+n^2}$, so ist f_n als stetige Funktion messbar. Es gilt

$$|f_n(x)| = \frac{nx}{x^2+n^2}\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ auf $(0,1)$ integrierbar ist. Somit besitzt die Folge der f_n eine integrierbare Majorante und wir können den Satz von Lebesgue anwenden. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{x^2+n^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{x}}{x^2+n^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0\,. \qquad \square$$

b) *Behauptung:* $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}-x}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = 1-\mathrm{e}^{-1}\,.$

Sei $g_n\colon (0,1)\to\mathbb{R}; x\mapsto \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}-x}}{1+x^n}$, so ist g_n als stetige Funktion messbar. Es gilt

$$|f_n(x)| \leq \mathrm{e}^{-x}\,.$$

Somit besitzt die Folge der g_n wiederum eine integrierbare Majorante und wir können den Satz von Lebesgue anwenden. Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}-x}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}-x}}{1+x^n} + \lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}-x}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}-x}}{1+x^n} + \int_1^\infty \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}-x}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= 1-e^{-1}\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Lösungsvorschlag. a) Wir rechnen die Definition nach:

(i) Die leere Menge $\emptyset$ ist in $\mathcal{A}$ enthalten, da für jedes $i\in I$ $f_i^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\mathcal{A}_i$, da $\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra ist.

(ii) Sei $A\in\mathcal{A}$. Folglich gilt $f_i^{-1}(A)\in\mathcal{A}_i$ für alle $i\in I$. Da $\mathcal{A}_i$ ein σ-Algebra ist, ist somit $f_i^{-1}(A)^\intercal = f_i^{-1}(A^\intercal)\in\mathcal{A}_i$. Daraus folgt $A^\intercal\in\mathcal{A}$.

(iii) Seien $A_n\in\mathcal{A}$, $n\in\mathbb{N}$. Somit gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_i^{-1}(A_n)\in\mathcal{A}_i$ für alle $i\in I$, wobei wir wieder genutzt haben, dass die $\mathcal{A}_i$ σ-Algebren sind. Da $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_i^{-1}(A_n) = f_i^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ folgt somit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\in cA$.

Also ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra.

b) Sei $\mathcal{C}$ die größte σ-Algebra bezüglich derer alle f_i messbar sind. Das heißt, dass für alle $M\in\mathcal{C}, i\in I$ das Urbild $f_i^{-1}(M)$ in $\mathcal{A}_i$ liegt. Somit gilt $M\in\mathcal{A}$. Also folgt $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}$, was die Behauptung zeigt.

$\square$

Aufgabe 3

Lösungsvorschlag. Wir transformieren zunächst obiges Integral und wollen anschließend den *Stetigkeitssatz* aus der Vorlesung anwenden.

Man beachte, dass $\phi\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m; x\mapsto\frac{x}{t}$ für alle $t\in(0,\infty)$ ein Diffeomorphismus ist. Nach dem Transformationssatz gilt

$$F(t) = \int_{B(0,t^2)} f\left(\tfrac{x}{t}\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\lambda_m(x) = \int_{B(0,t)} f(u)\mathrm{e}^{-t}t^m\,\mathrm{d}\lambda_m(u)\,,$$

sofern eine der Seiten integrierbar ist. Sei

$$g\colon (0,\infty)\times B_{\mathbb{R}^m}(0,1)\to\mathbb{R};\quad g(t,x)=\mathbb{1}_{B(0,t)}(x)f(x)\mathrm{e}^{-t}t^m\,.$$

Für festes $t\in(0,\infty)$ ist die Funktion $x\mapsto g(x,t)$ offensichtlich messbar und es gilt

$$|g(t,x)|\le\left(\sup_{t\in(0,\infty)}\mathrm{e}^{-t}t^m\right)f(x)=\mathrm{e}^{-m}m^m f(x)\,,$$

was nach Voraussetzung eine von t unabhängige integrierbare Majorante darstellt. (Insbesondere ist F wohldefiniert und lässt sich wie oben transformieren.) Sei $t_0\in(0,\infty)$.

Die Funktion $t\mapsto g(t,x)$ ist für alle $x\notin\partial B(0,t_0)$ stetig in t_0. Da $\partial B(0,t_0)$ eine λ_m-Nullmenge ist, sind somit die Voraussetzungen des *Stetigkeitssatz* der Vorlesung erfüllt und die Funktion F ist folglich stetig in t_0.

Betrachten wir nun die Integrierbarkeit von F. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty|F|(t)\,\mathrm{d}t&=\int_0^\infty\left|\int_{B(0,t)}f(x)\mathrm{e}^{-t}t^m\,\mathrm{d}\lambda_m(x)\right|\mathrm{d}t\\&\le\int_0^\infty\mathrm{e}^{-t}t^m\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}\lambda_m(x)\,\mathrm{d}t\\&\le\|f\|_1\int_0^\infty\mathrm{e}^{-t}t^m\,\mathrm{d}t<\infty\,.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4

Lösungsvorschlag. Nach Vorlesung wird die geschlitzte Sphäre $B(0,R)\setminus(-\infty,0]\times\{0\}\times\mathbb{R}$ parametrisiert durch

$$\Phi_3\colon(0,R)\times(-\pi,\pi)\times(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})\to\mathbb{R}^3;\quad\Phi_3(r,\varphi,\theta)=\begin{pmatrix}r\cos(\varphi)\cos(\theta)\\r\sin(\varphi)\cos(\theta)\\r\sin(\theta)\end{pmatrix}$$

mit $\det(\Phi_3')(r,\varphi,\theta)=r^2\cos(\theta)$. Folglich wird B_+ parametrisiert durch $\Phi:=\Phi_3|_{(0,R)\times(0,\frac{\pi}{2})\times(0,\frac{\pi}{2})}$.

a) Als stetige Funktion über einer beschränkten Menge ist die Funktion $x\mapsto\sqrt{1+|x|_2^3}$ integrierbar auf B_+. Mit dem Transformationssatz und dem Satz von Fubini-Tonelli folgt

$$\begin{aligned}\int_{B_+}\sqrt{1+|x|_2^3}\,\mathrm{d}\lambda_3(x)&=\int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+r^3}\left|\det(\Phi')(r,\varphi,\theta)\right|\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\\&=\int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+r^3}r^2\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^R\sqrt{1+r^3}r^2\,\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{6}\int_0^{1+R^3}\sqrt{u}\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{9}\left((1+R^3)^{\frac{3}{2}}-1\right)\,.\end{aligned}$$

b) *Behauptung:* Die Funktion f ist integrierbar.

Beweis. Die Funktion f ist stetig und somit messbar auf B_+. Es gilt

$$|f(x)|=\sqrt{x_3}|x|_2^{-3}\le\sqrt{|x|_2}|x|_2^{-3}=|x|_2^{-5/2}\,.$$

Da wir uns im $\mathbb{R}^d$ mit $d=3$ befinden und $\frac{5}{2}<3$ ist nach Vorlesung $x\mapsto|x|_2^{-5/2}$ auf $B(0,R)\supset B_+$ integrierbar. Wir haben also eine integrierbare Majorante von $|f|$ gefunden, weshalb auch f integrierbar ist. □

Aufgabe 5

Lösungsvorschlag. Da der Integrand auf A nicht-negativ ist, können wir den Satz von Fubini-Tonelli anwenden. Da $z < y^2$ und $y + \sqrt{z} > 0$ gilt, muss auch $y > 0$ gelten. Somit folgt

$$\begin{aligned}\int_A x\mathrm{e}^{-(y+\sqrt{z})^2}\,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z) &= \int_0^\infty \int_{\sqrt{z}}^\infty \int_0^{\sqrt{y+\sqrt{z}}} x\mathrm{e}^{-(y+\sqrt{z})^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \int_{\sqrt{z}}^\infty \left(y+\sqrt{z}\right)\mathrm{e}^{-(y+\sqrt{z})^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \tfrac{1}{4}\int_0^\infty \int_{(\sqrt{z}+\sqrt{z})^2}^\infty \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}z \\ &= \tfrac{1}{4}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-4z}\,\mathrm{d}z \\ &= \tfrac{1}{16}\,.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6

Lösungsvorschlag. Es bezeichne $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1, z \in \{0,1\}\}$ und sei weiter $B_i = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 < 1, z = i\}$ für $i \in \{0,1\}$, so ist ∂Z die disjunkte Vereinigung von M, B_0, B_1 und K. Nach Hinweis gilt $\sigma_{\partial Z}(K) = 0$. Also können wir das Integral zunächst über ∂Z mit Gauß berechnen und anschließend den Teil auf den Zylinderdeckeln B_0, B_1 abziehen.

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yx^2 \\ z(x^2+y^2)\end{pmatrix}$, so ist f stetig und beschränkt auf Z. Es gilt $\operatorname{div}(f)(x,y,z) = 2x^2+2y^2$. Nach dem Hinweis sind die Voraussetzungen des Satzes von Gauß für Z erfüllt und daher

$$\int_{\partial Z}\left(\begin{pmatrix} xy^2 \\ yx^2 \\ z(x^2+y^2)\end{pmatrix} \,\middle|\, \nu(x,y,z)\right)\mathrm{d}\sigma = \int_Z \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}\lambda_3 = \int_Z 2x^2+2y^2\,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z)\,.$$

Durch Transformation in Zylinderkoordinaten ergibt sich

$$\int_Z \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}\lambda_3 = \int_0^1\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} 2r^2 r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^1 2r^3\,\mathrm{d}r = \pi\,.$$

Für die Oberflächen B_i ergibt sich

$$\int_{B_0}(f\mid\nu)\,\mathrm{d}\sigma = \int_{B_0}\left(\begin{pmatrix} xy^2 \\ yx^2 \\ 0\cdot(x^2+y^2)\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\mathrm{d}\sigma = 0$$

und

$$\int_{B_1}(f\mid\nu)\,\mathrm{d}\sigma = \int_{B_1}\left(\begin{pmatrix} xy^2 \\ yx^2 \\ x^2+y^2\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\mathrm{d}\sigma = \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} r^3\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\,.$$

Somit erhalten wir

$$\int_M (f\mid\nu)\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial Z}(f\mid\nu)\,\mathrm{d}\sigma - \int_{B_0}(f\mid\nu)\,\mathrm{d}\sigma - \int_{B_1}(f\mid\nu)\,\mathrm{d}\sigma - \int_K (f\mid\nu)\,\mathrm{d}\sigma = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

□

Aufgabe 7

Lösungsvorschlag. Mit Hölder folgt sofort, dass

$$\sup_{g\in L^{p'}(\mathbb{R}),\|g\|_{p'}=1} \|fg\|_1 \leq \sup_{g\in L^{p'}(\mathbb{R}),\|g\|_{p'}=1} \|f\|_p\|g\|_{p'} = \|f\|_p\,.$$

Es verbleibt zu zeigen, dass $\|f\|_p \leq \sup_{g\in L^{p'}(\mathbb{R}),\|g\|_{p'}=1} \|fg\|_1$. Für $f=0$ ist dies trivial. Sei also $f\neq 0$ und betrachte entsprechend des Hinweises die Funktion $\tilde{g} = \frac{|f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p/p'}}$. Es gilt $p' = \frac{p}{p-1}$ und somit

$$\|\tilde{g}\|_{p'}^{p'} = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{|f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p/p'}}\right|^{p'} \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\|f\|_p^p}\int_{\mathbb{R}} |f|^{(p-1)p'}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^p} = 1\,.$$

Das Supremum ist also nach unten beschränkt durch

$$\begin{aligned}\sup_{g\in L^{p'}(\mathbb{R}),\|g\|_{p'}=1} \|fg\|_1 \geq \|f\tilde{g}\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f|\left|\frac{|f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p/p'}}\right|\mathrm{d}\lambda &= \frac{1}{\|f\|_p^{p/p'}}\int_{\mathbb{R}}|f|^p\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{\|f\|_p^{p-1}}\|f\|_p^p = \|f\|_p\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt. □