Frey
Analysis III

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 7 P.
Bemerkungen: /

Aufgabe 1

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{C} \coloneqq \big\{A \in \mathcal{A} \colon \mu(A) \in \{0, 1\}\big\}.$$

eine σ-Algebra auf X definiert.

(b) Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\mu(\{f \le n\}) = 1$.

Aufgabe 2

Es sei μ das Maß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ definiert durch $\mu(\{k\}) = \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ und $f \coloneqq \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{\{k\}}$. Bestimmen Sie $\int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu$.

(b) Sei $f\colon \mathbb{N} \to [0, \infty]$. Zeigen Sie $\int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^\infty \frac{f(k)}{k}$.

(c) Für $t > 0$ sei $g_t\colon \mathbb{N} \to [0, \infty]$, $g_t(k) = \mathrm{e}^{-tk}$ und $G(t) \coloneqq \int_{\mathbb{N}} g_t(k) \,\mathrm{d}\mu(k)$. Zeigen Sie, dass G differenzierbar ist und berechnen Sie $G'(t)$ für $t > 0$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{\sqrt{n^2 x + 1}}{n x^2 + 2} \,\mathrm{d}\lambda(x), \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^2} \arctan(n(x^2 - y)) \,\mathrm{d}\lambda^2(x, y).$$

*Hinweis für die Hörer*innen von Prof. Dr. Schnaubelt*: Mit λ^2 ist das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^2$ gemeint, das Prof. Dr. Schnaubelt mit λ_2 bezeichnet hat.

Aufgabe 4

Seien $d \in \mathbb{N}$ und $B \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen. Wir definieren

$$K \coloneqq \{(\mathrm{e}^{-t} x, t^2) \in \mathbb{R}^{d+1} \colon x \in B,\, t \in [0, \infty)\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass K messbar ist (d.h., dass $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+1})$ gilt).

(b) Zeigen Sie $\lambda^{d+1}(K) = \frac{2\lambda^d(B)}{d^2}$.

*Hinweis für die Hörer*innen von Prof. Dr. Schnaubelt*: Mit λ^d bzw. λ^{d+1} ist das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{R}^{d+1}$ gemeint, das Prof. Dr. Schnaubelt mit λ_d bzw. λ_{d+1} bezeichnet hat.

Aufgabe 5

Es sei $E \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+\frac{1}{4}z^2 < 1, x^2+y^2 > (1-\frac{z}{2})^2\}$. Bestimmen Sie

$$\int_E \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \, \mathrm{d}\lambda^3(x,y,z).$$

Aufgabe 6

Seien $M \coloneqq \{(x,y,x^2-y^2+1) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 < 1\}$ und $\nu = (\nu_1,\nu_2,\nu_3) \colon M \to \mathbb{R}^3$ das Einheitsnormalenfeld auf M mit $\nu_3(x) > 0$ für alle $x \in M$. Ferner sei $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (0,0,-xy)$.

(a) Berechnen Sie $\int_M \langle \mathrm{rot} f, \nu \rangle \, \mathrm{d}\sigma$ direkt.

(b) Berechnen Sie das Integral aus a) mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Hinweis: Es gilt $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

*Hinweis für die Hörer*innen von Prof. Dr. Schnaubelt*: Mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ gemeint, das Prof. Dr. Schnaubelt mit $(\cdot|\cdot)$ bezeichnet hat.

Aufgabe 7

(a) Es sei $g \colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g(1) = 1$. Wir definieren das Vektorfeld

$$f \colon \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = g(\|x\|_2) \frac{x}{\|x\|_2}.$$

Zeigen Sie: Ist $\mathrm{div} f \geq 0$, so gilt

$$g(r) \geq \frac{1}{r^2} \quad \text{für alle } r \geq 1.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Menge $A_r \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^3 \colon 1 < \|x\|_2 < r\}$ für $r > 1$.

(b) Seien $p \in [1,\infty]$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f' \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Zeigen Sie

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_p |x-y|^{1-1/p} \quad \text{für alle } x,y \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 1

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) = 1$.

(a) *Behauptung*: Es ist

$$\mathcal{C} := \big\{A \in \mathcal{A} \colon \mu(A) \in \{0,1\}\big\}.$$

eine σ-Algebra auf X.

Beweis. Wir prüfen die drei Axiome einer σ-Algebra:

(i) (A1) ('$\emptyset \in \mathcal{C}$'): Es gilt $\emptyset \in \mathcal{C}$, da $\mu(\emptyset) = 0$ nach Definition eines Maßes gilt.

(ii) (A2) (*Stabilität unter Komplementbildung*): Sei $A \in \mathcal{C}$. Nach Definition gilt dann $\mu(A) \in \{0,1\}$. Da nach Voraussetzung $\mu(X) = 1$ ist, erhalten wir aus der Additivität von μ

$$1 = \mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c), \quad \text{also} \quad \mu(A^c) = 1 - \mu(A) \in \{0,1\}.$$

Hieraus folgt $A^c \in \mathcal{C}$ wie gewünscht.

(iii) (A3) (*Stabilität unter abzählbarer Vereinigungen*): Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ eine Folge von Mengen. Da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, folgt zunächst einmal $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$. Wir müssen noch $\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \in \{0,1\}$ zeigen und unterscheiden hierfür zwei Fälle:

1. Fall: Es sei $\mu(A_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Aus der σ-Subadditivität von μ folgt dann

$$\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = 0,$$

also $\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = 0$.

2. Fall: Angenommen, es existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_{k_0}) = 1$. Dann folgt aus der Monotonie von μ, dass

$$1 = \mu(A_{k_0}) \le \mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \le \mu(X) = 1,$$

also $\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = 1$.

Insgesamt haben wir also $\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \in \{0,1\}$ gezeigt und damit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{C}$.

□

(b) *Behauptung*: Sei $f \colon X \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktion. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\mu(\{f \le n\}) = 1$.

Beweis. Da f nach Voraussetzung $\mathcal{C}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar ist, gilt $A_n := \{f \le n\} \in \mathcal{C}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da offenbar $A_n \uparrow X$ gilt, erhalten wir aus der Stetigkeit des Maßes von unten

$$1 = \mu(X) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{1}$$

Nun gilt aber $\mu(A_n) \in \{0,1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wäre $\mu(A_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so wäre auch $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$, im Widerspruch zu (1). Also muss es ein $n \in \mathbb{N}$ geben mit $\mu(A_n) = 1$, was zu zeigen war. □

Aufgabe 2

Es sei μ das Maß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ definiert durch $\mu(\{k\}) = \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(a) *Behauptung*: Seien $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ und $f := \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{\{k\}}$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k}.$$

Beweis. Die Funktion $f := \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{\{k\}}$ ist eine Stufenfunktion. Nach Definition des Integrals ist daher

$$\int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu\big(\{k\}\big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k}.$$

$\square$

(b) *Behauptung*: Sei $f\colon \mathbb{N} \to [0, \infty]$ eine Funktion. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k}.$$

Beweis. Sei $f\colon \mathbb{N} \to [0, \infty]$ eine Funktion. Wir setzen $s_n := \sum_{k=1}^n f(k) \chi_{\{k\}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von nichtnegativen Stufenfunktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Aus der Definition des Lebesgue-Integrals folgt daher zusammen mit a)

$$\int_{\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{N}} s_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k} \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k}.$$

$\square$

(c) *Behauptung*: Für $t > 0$ sei $g_t\colon \mathbb{N} \to [0, \infty]$, $g_t(k) = \mathrm{e}^{-tk}$ und $G(t) := \int_{\mathbb{N}} g_t(k) \,\mathrm{d}\mu(k)$. Dann ist G differenzierbar und es gilt

$$G'(t) = -\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t}} \quad \text{für alle } t > 0.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen mit Hilfe des Differentiationssatzes, dass G auf $[\varepsilon, \infty)$ differenzierbar ist. Hierzu prüfen wir zunächst die Voraussetzungen des Differentiationssatzes:

(i) Für jedes feste $t \geq \varepsilon$ ist $k \mapsto g_t(k)$ μ-integrierbar, denn nach (b) gilt

$$\int_{\mathbb{N}} g_t(k) \,\mathrm{d}\mu(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tk}}{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-tk} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t}} < \infty.$$

(ii) Für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ ist $t \mapsto g_t(k)$ differenzierbar auf $[\varepsilon, \infty)$ und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_t(k) = -k\mathrm{e}^{-tk} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } t \geq \varepsilon.$$

(iii) Es gilt

$$|\partial_t g_t(k)| \leq k\mathrm{e}^{-\varepsilon k} =: g(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } t \geq \varepsilon$$

und $k \mapsto g(k)$ ist μ-integrierbar, denn nach (b) gilt

$$\int_{\mathbb{N}} g(k)\,\mathrm{d}\mu(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\varepsilon k} = \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon}}{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon}} < \infty.$$

Aus dem Differentiationssatz folgt nun, dass G auf $[\varepsilon, \infty)$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$G'(t) = \int_{\mathbb{N}} \partial_t g_t(k)\,\mathrm{d}\mu(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-k\mathrm{e}^{-tk}}{k} = -\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} \quad \text{für alle } t \geq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, ist G sogar auf $(0, \infty)$ differenzierbar und

$$G'(t) = -\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} \quad \text{für alle } t > 0.$$

□

Aufgabe 3

(a) *Behauptung*: Es gelten

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{\sqrt{n^2x+1}}{nx^2+2}\,\mathrm{d}\lambda(x) = 2, \quad \text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^2} \arctan(n(x^2-y))\,\mathrm{d}\lambda^2(x,y) = -\frac{\pi}{6}.$$

Beweis. (i) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$f_n \colon [1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{\sqrt{n^2x+1}}{nx^2+2}\chi_{[1,n]}(x)$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist f_n als Komposition messbarer Funktionen messbar und für festes $x \in [1, \infty)$ gilt

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}{x^2+\frac{2}{n}}\chi_{[1,n]}(x) \longrightarrow x^{-3/2} =: f(x) \quad (n \to \infty).$$

Also konvergiert $(f_n)_n$ punktweise gegen die messbare Funktion f. Ferner gilt

$$|f_n(x)| = \frac{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}{x^2+\frac{2}{n}}\chi_{[1,n]}(x) \leq \frac{\sqrt{x^2+x^2}}{x^2+0}\chi_{[1,n]}(x) \leq \sqrt{2}x^{-3/2} =: g(x) \quad \text{für alle } x \in [1,\infty).$$

Da g integrierbar über $[1, \infty)$ ist, können wir den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{\sqrt{n^2x+1}}{nx^2+2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} x^{-3/2}\,\mathrm{d}x = -2x^{-1/2}\Big|_1^{\infty} = 2.$$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$f_n \colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}, \quad f_n(x,y) = \arctan(n(x^2-y)).$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist f_n stetig, also insbesondere messbar. Ferner gilt für festes $(x, y) \in [0,1]^2$

$$f_n(x,y) \longrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{falls } y < x^2, \\ 0, & \text{falls } y = x^2, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{falls } y > x^2. \end{cases}$$

Setzen wir daher

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y < x^2\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

(die Messbarkeit von B ist aus den Übungen bekannt), so folgt, dass $(f_n)_n$ punktweise gegen $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $f = \frac{\pi}{2}\chi_B - \frac{\pi}{2}\chi_{[0,1]^2 \setminus \overline{B}}$, konvergiert. Ferner ist offensichtlich $|f_n(x,y)| \leq \frac{\pi}{2} =: g(x,y)$ für alle $(x,y) \in [0,1]^2$ und g als konstante Funktion über $[0,1]^2$ integrierbar. Daher folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^2} \arctan(n(x^2 - y)) \,\mathrm{d}\lambda^2(x,y) = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^2} f_n(x,y) \,\mathrm{d}\lambda^2(x,y) = \int_{[0,1]^2} f(x,y) \,\mathrm{d}\lambda^2(x,y).$$

Für das Integral auf der rechten Seite gilt

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2} f(x,y) \,\mathrm{d}\lambda^2(x,y) &= \tfrac{\pi}{2} \int_B \mathrm{d}\lambda^2(x,y) - \tfrac{\pi}{2} \int_{[0,1]^2 \setminus \overline{B}} \mathrm{d}\lambda^2(x,y) \\ &= \tfrac{\pi}{2}\lambda^2(B) - \tfrac{\pi}{2}\left[\lambda^2([0,1]^2) - \lambda^2(\overline{B})\right] \\ &= \tfrac{\pi}{2}\lambda^2(B) - \tfrac{\pi}{2}(1 - \lambda^2(B)) \\ &= \pi\lambda^2(B) - \tfrac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

wobei wir für die vorletzte Gleichung ausgenutzt haben, dass $\lambda^2(\overline{B}) = \lambda^2(B)$ gilt. Nach dem Prinzip von Cavalieri gilt aber

$$\lambda^2(B) = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}.$$

Es folgt also insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^2} \arctan(n(x^2 - y)) \,\mathrm{d}\lambda^2(x,y) = \int_{[0,1]^2} f(x,y) \,\mathrm{d}\lambda^2(x,y) = \pi\lambda^2(B) - \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{3} - \tfrac{\pi}{2} = -\tfrac{\pi}{6}.$$

□

Aufgabe 4

(a) *Behauptung*: Die Menge $K \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ ist abgeschlossen und damit insbesondere messbar.

Beweis. Seien $(t_n)_n \subseteq [0,\infty)$, $(x_n)_n \subseteq B$ und $(y,z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ so, dass

$$(\mathrm{e}^{-t_n} x_n, t_n^2) \longrightarrow (y,z) \quad (n \to \infty).$$

Wegen $t_n^2 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, muss $z \geq 0$ sein. Wir setzen $t := \sqrt{z} \in [0,\infty)$. Dann folgt aus der Stetigkeit der Wurzelfunktion

$$t_n = \sqrt{t_n^2} \longrightarrow \sqrt{z^2} = t \quad (n \to \infty),$$

sodass aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion wiederum

$$x_n = \mathrm{e}^{t_n}(\mathrm{e}^{-t_n} x_n) \longrightarrow \mathrm{e}^t y =: x \quad (n \to \infty)$$

folgt. Da B nach Voraussetzung abgeschlossen ist, muss x als Grenzwert von $(x_n)_n \subseteq B$ ebenfalls in B liegen. Also ist

$$(y,z) = (\mathrm{e}^{-t} x, t^2) \in K.$$

Dies zeigt, dass K abgeschlossen ist. □

(b) *Behauptung*: Es gilt

$$\lambda^{d+1}(K) = \frac{2\lambda^d(B)}{d^2}.$$

Beweis. Nach Aufgabenteil (a) ist $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+1})$. Nach dem Prinzip von Cavalieri ist daher

$$\lambda^{d+1}(K) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^d(K_z)\,\mathrm{d}\lambda(z),$$

wobei für $z \in \mathbb{R}$ der z-Schnitt von K gegeben ist durch

$$K_z = \{y \in \mathbb{R}^d \colon (y,z) \in K\}.$$

Für $z < 0$ ist offenbar $K_z = \emptyset$. Für $z \geq 0$ ist

$$\begin{aligned} K_z &= \{y \in \mathbb{R}^d \colon (y,z) \in K\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^d \colon y = \mathrm{e}^{-\sqrt{z}}x \text{ für ein } x \in B\} \\ &= \mathrm{e}^{-\sqrt{z}}B. \end{aligned}$$

Es folgt $\lambda^d(K_z) = \mathrm{e}^{-d\sqrt{z}}\lambda^d(B)\chi_{[0,\infty)}(z)$ für $z \in \mathbb{R}$ und damit

$$\lambda^{d+1}(K) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-d\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z \cdot \lambda^d(B)$$

Das Integral lässt sich mit der Substitution $z = x^2,\ \mathrm{d}z = 2x\,\mathrm{d}x$ und anschließender partieller Integration lösen:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-d\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z &= 2\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-dx}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{d}\left[x\mathrm{e}^{-dx}\right]_0^\infty + \frac{2}{d}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-dx}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{d^2}\left[\mathrm{e}^{-dx}\right]_0^\infty = \frac{2}{d^2}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir wie gewünscht

$$\lambda^{d+1}(K) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-d\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z \cdot \lambda^d(B) = \frac{2\lambda^d(B)}{d^2}.$$

□

Aufgabe 5

Behauptung: Es gilt

$$\int_E \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) = \frac{4\pi}{3}.$$

Beweis. Wir definieren $D := \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \in \mathbb{R}\}$ und betrachten die stetige und damit messbare Funktion

$$f \colon D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Zu bestimmen ist das Integral $\int_E f(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z)$. Wir betrachten hierfür zunächst die lineare Transformation

$$\Phi_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi_1(x,y,z) = (x,y,z/2).$$

Definieren wir dann die messbaren Mengen $B := B(0,1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 < 1\}$ and $C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 > (1-z)^2\}$, so folgt

$$\begin{aligned} E &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+(\tfrac{z}{2})^2 < 1, x^2+y^2 > (1-\tfrac{z}{2})^2\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \Phi(x,y,z) \in B \cap C\} \\ &= \Phi_1^{-1}(B \cap C). \end{aligned}$$

Wegen $\Phi_1^{-1}(x,y,z) = (x,y,2z)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, impliziert der Transformationssatz

$$\begin{aligned} \int_E \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) &= \int_{\Phi_1^{-1}(B\cap C)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) \\ &= \int_{B\cap C} f(\Phi_1^{-1}(x,y,z)) \cdot |\det(\Phi_1^{-1})'(x,y,z)| \,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) \\ &= \int_{B\cap C} \frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2\,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z), \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des letzten Integrals nutzen wir die bijektive Zylinderkoordinatenabbildung

$$\Phi_2 \colon (0,\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus H_3, \quad \Phi_2(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix},$$

wobei $H_3 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = 0, y \geq 0\}$. Ferner gilt $\det \Phi_2'(r,\varphi,z) = r$ für alle $(r,\varphi,z) \in (0,\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R}$. Wir stellen fest, dass $(B \cap C) \setminus H_3 = \Phi_2(A)$ mit

$$\begin{aligned} A &:= \{(r,\varphi,z) \in (0,\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R} \colon r^2+z^2 < 1, r^2 > (1-z)^2\} \\ &= \left\{(r,\varphi,z) \in (0,\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R} \colon z \in (0,1), 1-z < r < \sqrt{1-z^2}\right\}. \end{aligned}$$

Da H_3 eine λ^3-Nullmenge ist, erhalten wir mit dem Transformationssatz und dem Satz von Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned} \int_{B\cap C} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) &= \int_{(B\cap C)\setminus H_3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) \\ &= \int_A f(\Phi_2(r,\varphi,z)) \cdot |\det \Phi_2'(r,\varphi,z)| \,\mathrm{d}\lambda^3(r,\varphi,z) \\ &= \int_A \frac{z}{r} \cdot r \,\mathrm{d}\lambda^3(r,\varphi,z) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{1-z}^{\sqrt{1-z^2}} z \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(z\sqrt{1-z^2} - z(1-z)\right) \mathrm{d}z \\ &= 2\pi \left[-\tfrac{1}{3}\sqrt{1-z^2}^3 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}\right]_0^1 \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right] = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_E \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) = \int_{B\cap C} \frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2 \,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) = 4 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

wie gewünscht. □

Aufgabe 6

(a) Es sei $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 < 1\}$ die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$ und $h\colon B \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = x^2 - y^2 + 1$. Dann ist $M = \{(x,y,h(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \colon (x,y) \in B\}$ der Graph der stetig differenzierbaren Funktion h und damit eine C^1-Hyperfläche mit Parametrisierung $F\colon B \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x,y,h(x,y))$. Nach Vorlesung gilt für alle $(x,y) \in B$ für das Einheitsnormalenfeld

$$\nu(F(x,y)) = \frac{(-\partial_x h(x,y), -\partial_y h(x,y), 1)}{\sqrt{1+\|\nabla h\|_2^2}} = \frac{(-2x, 2y, 1)}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}$$

und für die Gramsche Determinante

$$g^F(x,y) = \sqrt{1+\|\nabla h\|_2^2} = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}.$$

Ferner ist

$$\operatorname{rot} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Damit ist unter Anwendung von Polarkoordinaten und Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}
\int_M \langle \operatorname{rot} f, \nu \rangle \,\mathrm{d}\sigma &= \int_B \langle \operatorname{rot} f(F(x,y)), \nu(F(x,y)) \rangle g^F(x,y) \,\mathrm{d}\lambda^2(x,y) \\
&= \int_B \left\langle \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\lambda^2(x,y) \\
&= \int_B 2(x^2+y^2) \,\mathrm{d}\lambda^2(x,y) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^2 \cdot r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

(b) Nach dem Satz von Stokes ist

$$\int_M \langle \operatorname{rot} f, \nu \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int_\gamma f \cdot \,\mathrm{d}s,$$

wobei $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) := F(\cos(t), \sin(t)) = (\cos(t), \sin(t), \cos^2(t) - \sin^2(t) + 1)$. Nun ist

$$\int_\gamma f \cdot \,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\cos(t)\sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ -2\sin(t)\cos(t) - 2\sin(t)\cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\sin^2(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \sin^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

wobei wir für die vorletzte Gleichung das Additionstheorem aus dem Hinweis verwendet und in der letzten Gleichung die Substitution $\tau = 2t$, $\mathrm{d}\tau = 2\,\mathrm{d}t$, durchgeführt haben. Mit partieller Integration sieht man ein, dass

$$\int \sin^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\left(\tau - \sin(\tau)\cos(\tau)\right) + C,$$

womit wir wie gewünscht

$$\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \sin^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{4}\left[\tau - \sin(\tau)\cos(\tau)\right]_0^{4\pi} = \pi$$

erhalten.

Aufgabe 7

(a) *Behauptung*: Es sei $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g(1) = 1$ und

$$f\colon \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = g(\|x\|_2)\,\frac{x}{\|x\|_2}.$$

Ist $\mathrm{div} f \geq 0$, so gilt

$$g(r) \geq \frac{1}{r^2} \quad \text{für alle } r \geq 1.$$

Beweis. Da nach Voraussetzung $g(1) = 1$ gilt, können wir $r > 1$ annehmen. Für $r > 1$ sei $A_r := \{x \in \mathbb{R}^3\colon 1 < \|x\|_2 < r\}$. Dann ist A_r offen und beschränkt mit C^1-Rand $\partial A_r = \partial B(0,r) \cup \partial B(0,1)$. Als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen ist f stetig differenzierbar. Wegen der Voraussetzung $\mathrm{div} f \geq 0$ liefert nun eine Anwendung des Integralsatzes von Gauß

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{A_r} \mathrm{div} f(x)\,\mathrm{d}\lambda^3(x) &= \int_{\partial A_r} \langle f(x), \nu(x)\rangle\,\mathrm{d}\sigma(x) \\ &= \int_{\partial B(0,r)} \langle f(x), \nu(x)\rangle\,\mathrm{d}\sigma(x) + \int_{\partial B(0,1)} \langle f(x), \nu(x)\rangle\,\mathrm{d}\sigma(x). \end{aligned}$$

Wir wollen nun die beiden Integrale rechts berechnen: Für $x \in \partial B(0,r)$ gilt $\nu(x) = \frac{x}{r}$ und $f(x) = g(r)\frac{x}{r}$, woraus $\langle f(x), \nu(x)\rangle = g(r)r^{-2}\|x\|_2^2 = g(r)$ folgt. Damit folgt für das erste Integral

$$\int_{\partial B(0,r)} \langle f(x), \nu(x)\rangle\,\mathrm{d}\sigma(x) = g(r)\int_{\partial B(0,r)} 1\,\mathrm{d}\sigma(x) = g(r)\sigma(\partial B(0,r)) = 4\pi r^2 g(r).$$

Für $x \in \partial B(0,1)$ gilt $\nu(x) = -x$ (denn ν ist das *äußere* Einheitsnormalenfeld an ∂A_r !) und $f(x) = g(1)x = x$, woraus $\langle f(x), \nu(x)\rangle = -\|x\|_2^2 = -1$ folgt. Damit folgt für das zweite Integral

$$\int_{\partial B(0,1)} \langle f(x), \nu(x)\rangle \,\mathrm{d}\sigma(x) = -\int_{\partial B(0,1)} 1 \,\mathrm{d}\sigma(x) = -\sigma(\partial B(0,1)) = -4\pi.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$0 \leq \int_{\partial B(0,r)} \langle f(x), \nu(x)\rangle \,\mathrm{d}\sigma(x) + \int_{\partial B(0,1)} \langle f(x), \nu(x)\rangle \,\mathrm{d}\sigma(x) = 4\pi r^2 g(r) - 4\pi.$$

Umstellen liefert $g(r) \geq \frac{1}{r^2}$ wie gewünscht. □

(b) *Behauptung*: Seien $p \in [1,\infty]$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f' \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Zeigen Sie

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_p |x-y|^{1-1/p} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Seien $p \in [1,\infty]$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f' \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $y \leq x$ annehmen. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

also nach der Dreiecksungleichung für Integrale und der Hölderschen Ungleichung (mit $p' \coloneqq (1-1/p)^{-1}$)

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_x^y |f'(t)|\,\mathrm{d}t = \|f'\|_{\mathcal{L}^1([y,x])} \leq \|f'\|_{\mathcal{L}^p([y,x])} \|1\|_{\mathcal{L}^{p'}([y,x])} \leq \|f'\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R})} |x-y|^{1-1/p}.$$

□