Analysis III

Inoffizieller Mitschrieb WS 2019/20

Nach der Vorlesung von Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Karlsruher Institut für Technologie

Disclaimer

Dies ist ein inoffizieller Mitschrieb der Vorlesung Analysis III des Wintersemesters 2019/20 bei Prof. Dr. Dirk Hundertmark. Wir erheben keinen Anspruch auf Richtigkeit oder Vollständigkeit. Sollten euch aber Fehler auffallen, kommt gerne auf uns zu, wir kümmern uns dann darum.
Trotz allem ist in diesen Mitschrieb eine beträchtliche Menge Arbeit geflossen; wenn ihr euch erkenntlich zeigen wollt, könnt ihr das über diesen Spendenlink tun; wir freuen uns über jeden, dem wir durch das Teilen unserer Mitschriebe helfen konnten.

Analysis III

Levin Kiefer, Christian Kleifges, Louis Kronberg, Michael Zheng

Oktober 2019 - März 2020

Inhaltsverzeichnis

Link zu den Lösungen der Probeklausur

14.10.2019

1 Das Mess (Maß)problem

Elementare Geometrie:

Länge eines Intervalls $I = [a, b] \subset \mathbb{R} : |I| := b - a$

Fläche A eines Rechtecks: $A = l \cdot b$

Fläche A eines Dreiecks: $A = \frac{1}{2} l \cdot h$, da $A(\triangle) = \frac{1}{2} A(\square)$

Rechenregeln für Flächen:

(A) Hat $A \subset \mathbb{R}^2$ die Fläche α und B ist kongruent zu A, so hat B die Fläche α.

(B) Sind A, B disjunkt mit Fläche α bzw. β, so hat $A \cup B$ Fläche $\alpha + \beta$.

Kreis: $\overline{B_R(0)} = \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq R \}$

$\implies \exists$ Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Dreiecken, die paarweise disjunkt sind mit $\overline{B_R(0)} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Wollen: Fläche von $\overline{B_R(0)} = \sum_{n=1}^{\infty}$ Fläche A_n

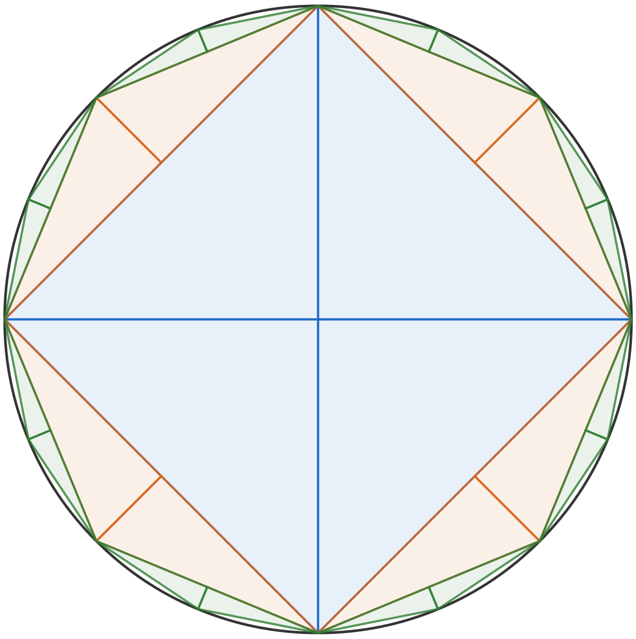

Abbildung 1: Annäherung der Kreisfläche durch Dreiecke

Also:

3. Ist $(A_n)_n$ Folge paarweise disjunkten Mengen A_n mit Fläche α_n, so hat $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ Fläche $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$

Etwas abstrakter:
Maßproblem: Gesucht ist eine Maßfunktion $\mu : \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right) \to [0,\infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

Bewegungsinvarianz Für jede Bewegung $\tau : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ (d.h. τ ist Verknüpfung von Translation und Rotation) gilt

$$\mu(A) = \mu(\tau(A)), \quad \tau(A) := \{\tau(x) : x \in A\}$$

Normierung $\mu\left([0,1]^d\right) = 1$

σ-Additivität Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunkte (= paarweise disjunkte) Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ gilt $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Catch: Vitali 1905: Das Maßproblem ist unlösbar! (Satz III.3.3 in Elstrodt)

Noch schlimmer:

Satz (Banach & Tarsky 1924)**.** *Sei $d \geq 1$, $A, B \subset \mathbb{R}^d$ beliebige nicht-leere Mengen. Dann gibt es abzählbar viele $C_k \subset \mathbb{R}^d, k \in \mathbb{N}$ und Bewegungen $\tau_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ derart, dass A die disjunkte Vereinigung der C_k und B die disjunkte Vereinigung der $\tau(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist.*

siehe auch:
S. Wagon: Circlesquaring in the twentieth century
S. Wagon: The Banach-Tarski Paradox

2 Mengentheoretische Grundlagen

- A, B, X, Y bel. Mengen, $\mathcal{P}(X)$ = Potenzmenge = System aller Teilmengen von X

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in A \text{ oder } x \in B\} \\ A \cap B &= \{x \in A \text{ und } x \in B\} \\ A \setminus B &= \{x \in A \text{ und } x \notin B\} \end{aligned} \tag{1}$$

- Oft auch: $A \dot\cup B$ disjunkte Vereinigung $A \cup B$, wobei $A \cap B = \emptyset$.
- $A \subset B$ falls jedes $x \in A$ auch Element von B ist. Das bedeutet $A = B \iff A \subset B$ und $B \subset A$.
- Ist $A \subset X$, so schreiben wir

$$A^C := X \setminus A \text{ Komplement von A (relativ zu X)} \tag{2}$$

- **Distributivgesetz:**

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \tag{3}$$

- **de Morgan:**

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C \qquad (A \cup B)^C = A^C \cap B^C \tag{4}$$

Dies gilt auch für beliebige Mengen! J bel. Indexmenge, $A_j \subset X, j \in J$.

$$\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)^C = \bigcup_{j \in J} A_j^C \qquad \left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)^C = \bigcap_{j \in J} A_j^C$$

$$\underbrace{f(A) := \{ f(x) : x \in A \}}_{\text{Bild von } A \text{ unter } f} \qquad \underbrace{f^{-1}(B) := \{ x \in X : f(x) \in B \}}_{\text{Urbild von } B \text{ bzw. } f}$$

Somit ist für jede Funktion $f : X \to Y$ $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ definiert.

- $B, B_j, C \subset Y$ für $j \in J$ Indexmenge

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) &= \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j) \\ f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) &= \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j) \\ f^{-1}\left(B^C\right) &= (f^{-1}(B))^C \\ f^{-1}(C \setminus B) &= f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(B) \end{aligned} \tag{Operationstreue}$$

Bemerkung. *Für das Bild unter f gilt das* nicht.

Lemma 2.1.

$$\begin{aligned} f : X \to Y \text{ ist injektiv} &\iff f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \quad \forall A, B \subset X \\ &\iff f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A) \quad \forall A \subset X \end{aligned}$$

Beweis. H.A. oder Übung. □

Definition 2.2 (Limes superior & Limes inferior von Mengen (nach E. Borel 1905))**.** *Ist*

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, so heißt

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n := \{\, x \in X : x \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N} \,\} \text{ Limes superior} \tag{7}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \underline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n := \{\, x \in X : \exists N_0(x) \text{ so, dass } x \in A_n \forall n \geq N_0(x) \,\} \text{ Limes inferior} \tag{8}$$

der Folge $(A_n)_n$.

Präziser:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k$$

$(A_n)_n$ konvergent falls, $\overline{\lim}_{n\to\infty} = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$. In diesem Fall nennen wir

$$\begin{aligned} A &:= \underline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n \text{ Grenzwert} \\ &=: \lim_{n\to\infty} A_n \end{aligned}$$

$(A_n)_n$ monoton wachsend (kurz: wachsend) falls $A_n \subset A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$(A_n)_n$ monoton fallend (kurz: fallend) falls $A_{n+1} \subset A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Lemma 2.3 (Monotone Konvergenz für Mengen)**.** *Jede monotone Folge konvergiert. Es gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ falls $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend ist. Analog ist $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ falls $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend ist.*

Beweis. Übung. □

3 σ-Algebren und ihre Erzeuger

Definition 3.1. *Ein System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ (System von Teilmengen einer geg. Menge X) heißt σ-Algebra falls*

1. *$X \in \mathcal{A}$*
2. *$A \in \mathcal{A} \implies A^C \in \mathcal{A}$*
3. *$\forall\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ (d.h. $A_n \in \mathcal{A}\, \forall n \in \mathbb{N}$) ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$*

Für $A \in \mathcal{A}$ ist A $\mathcal{A}$-messbar.

Beispiele. *Sei X eine beliebige Menge. Dann gilt:*

1. *$\mathcal{P}(X)$ ist größte σ-Algebra*
2. *$\{\emptyset, X\}$ ist kleinste σ-Algebra*

18.10.2019

Wiederholung von Definition 1 und folgenden Beispielen.

Beispiele.

3. *$A \subset X \implies \{\emptyset, A, A^C, X\}$ ist eine σ-Algebra*
4. *Sei X überabzählbar. Dann ist $\mathcal{A} := \{A \subset X : A$ oder A^C ist abzählbar$\}$ eine σ-Algebra.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage aus dem obigen Beispiel.

1. ✓
2. ✓
3. Sei $(A_n)_n \in \mathcal{A}$. Zu zeigen ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Dazu unterscheide man 2 Fälle:
   1. Fall: Alle A_n sind abzählbar $\implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ist abzählbar!
   2. Fall: Mindestens ein A_{n_0} ist nicht abzählbar $\implies A_{n_0}^C$ ist abzählbar
      Dann gilt $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^C \subset A_{n_0}^C$. Weil letzteres abzählbar ist, ist $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^C \in \mathcal{A}$ und somit auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

□

Satz 3.2 (Eigenschaften von σ-Algebren)**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra (in X). Dann gilt:*

1. *$\emptyset \in \mathcal{A}$*
2. *$A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{j=1}^N A_j \in \mathcal{A}$ (stabil unter endlicher Vereinigung)*
3. *$(A_n)_n \subset \mathcal{A} \implies \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ (stabil unter abzählbaren Schnitten)*

Beweis.

1. $\emptyset = X^C \in \mathcal{A}$ wegen (1) & (2).
2. Setze $A_{N+1} = A_{N+2} = \cdots = \emptyset \underset{(a)}{\implies} (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \underset{(3)}{\implies} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

$$\implies A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N \in \mathcal{A}$$

3. Seien $A_n \in \mathcal{A}\, \forall n \in \mathbb{N}$. $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^C \underset{\text{de Morgan}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overbrace{A_n^C}^{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A} \underset{(2)}{\implies} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

□

Beispiele.

5. *Spur σ-Algebra*
   Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-Algebra und $\tilde{X} \subset X$. Dann ist $\tilde{\mathcal{A}} := \{ A \cap \tilde{X} : A \in \mathcal{A} \}$ eine σ-Algebra in $\tilde{X}$.

Satz 3.3. *Sei J eine beliebige Indexmenge und $(\mathcal{A}_j)_{j\in J}$ eine beliebige Familie von σ-Algebren in einer Menge X.*

$$\boxed{\implies \mathcal{A} := \bigcap_{j\in J} \mathcal{A}_j \text{ ist wieder eine } \sigma\text{-Algebra in } X}$$

Beweis. Nachprüfen der Eigenschaften (1) - (3) für $\mathcal{A}$ (scharfes Hinschauen). □

Definition 3.4 (WICHTIG: Erzeugte σ-Algebra)**.** *Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ beliebig ($\mathcal{E}$ System von Teilmengen von X). Dann existiert eine kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{P}(X)$ mit*
1. *$\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E})$*
2. *$\forall\sigma$-Algebren $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ folgt $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.*

Wir nennen $\sigma(\mathcal{E})$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra und $\mathcal{E}$ den Erzeuger von $\sigma(\mathcal{E})$ (engl. generator).

Beweis. Sei $J := J_{\mathcal{E}} := \{ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{E} \subset \mathcal{A}, \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra} \}$. Es gilt $J \neq \emptyset$, da $\mathcal{P}(X) \in J$ wegen $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Setzen $\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{A}\subset J_{\mathcal{E}}} \mathcal{A}$. Diese ist eine σ-Algebra nach Satz 3, welche 1. und 2. erfüllt! □

Beispiele.
6. *Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, so ist $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ (WICHTIG)*
7. *Ist $\mathcal{E} = \{ A \}, A \subset X \implies \sigma(\mathcal{E}) = \{ \emptyset, A, A^C, X \}$*
8. *X überabzählbar, $\mathcal{E} = \{ A \subset X : A \text{ ist abzählbar} \}$*
   $\implies \sigma(\mathcal{E}) = \{ A \subset X : A \text{ oder } A^C \text{ ist abzählbar} \}$
9. *WICHTIG: Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{G} \subset \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{A}}$ σ-Algebra $\implies$ $\boxed{\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{G}) \subset \tilde{\mathcal{A}}}$*

Beweisidee zu Beispiel 9:
Ist $\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Alg.}\\ \mathcal{E}\subset\mathcal{A}}} \mathcal{A} \subset \bigcap_{\substack{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Alg.}\\ \mathcal{G}\subset\mathcal{A}}} \mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G})$ und $\mathcal{G} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ so folgt $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{G}) \subset \sigma\left(\tilde{\mathcal{A}}\right) = \tilde{\mathcal{A}}$.

Erinnerung:
Ist $X = \mathbb{R}^d$ oder beliebiger metrischer Raum, so existiert auf X die Topologie der offenen Mengen $\mathcal{O}$
- $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

- $U, V \in \mathcal{O} \implies U \cap V \in \mathcal{O}$
- $(U_j)_{j \in J}$ Familie offener Mengen $U_j \in \mathcal{O}, j \in J \implies \bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{O}$

$(X, \mathcal{O})$ heißt topologischer Raum, $U \in \mathcal{O}$ heißt offen. $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn A^C offen ist. In einem topologischen Raum hat man auch die kompakten Mengen $\mathcal{K}$. In $\mathbb{R}^d$ sind das genau die abgeschlossenen und beschränkten Mengen:

$$\mathcal{K}(\mathbb{R}^d) = \{ A \subset \mathbb{R}^d : A \text{ abgeschlossen und beschränkt} \}$$

Definition 3.5. *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{O}$ die Topologie der offenen Mengen. Die σ-Algebra $\sigma(\mathcal{O})$, die von den offenen Mengen erzeugt wird heißt Borel'sche σ-Algebra und ihre Elemente Borelmengen (oder Borel-messbare Mengen). Wir schreiben*

$$\boxed{\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(\mathcal{O}) := \sigma(\mathcal{O})} \tag{1}$$

$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ oder $\mathcal{B}^d$ sind die Borelmengen in $\mathbb{R}^d$.

Satz 3.6. *Seien $\mathcal{O}^d, \mathcal{C}^d, \mathcal{K}^d$ die offenen, abgeschlossenen bzw. kompakten Mengen in $\mathbb{R}^d$. Dann gilt $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) = \sigma\left(\mathcal{O}^d\right) = \sigma\left(\mathcal{C}^d\right) = \sigma\left(\mathcal{K}^d\right)$.*

Beweis. Wegen $\mathcal{K}^d \subset \mathcal{C}^d$ folgt aus Beispiel 9 $\sigma\left(\mathcal{K}^d\right) \subset \sigma\left(\mathcal{C}^d\right)$. Nun wollen wir noch die umgekehrte Inklusion zeigen. Ist also $C \in \mathcal{C}^d$, so ist $C_k := \mathcal{C} \cap \overline{B_k(0)}$ abgeschlossen und beschränkt und somit in $\mathcal{K}^d$. Dann können wir C folgendermaßen als abzählbare Vereinigung kompakter Mengen schreiben:

$$C = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C \cap \overline{B_k(0)} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$$

Weil alle C_k in $\mathcal{K}^d$ und somit in $\sigma\left(\mathcal{K}^d\right)$ liegen, gilt also $C \in \sigma\left(K^d\right)$. Da $C \in \mathcal{C}^d$ beliebig war, gilt $\mathcal{C}^d \subset \sigma\left(\mathcal{K}^d\right)$ und wegen Beispiel 9 auch $\sigma\left(\mathcal{C}^d\right) \subset \sigma\left(\sigma\left(\mathcal{K}^d\right)\right) = \sigma\left(\mathcal{K}^d\right)$. Mit der anderen Inklusion folgt also

$$\sigma\left(\mathcal{K}^d\right) = \sigma\left(\mathcal{C}^d\right) \quad ☺$$

Die andere Gleichheit folgt aus:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^d &= \{ A \subset \mathbb{R}^d : A \text{ abgeschlossen} \} = \{ U^C : U \text{ offen} \} = \{ U^C : U \in \mathcal{O}^d \} \\ \implies \sigma\left(\mathcal{C}^d\right) &= \sigma\left(\{ U^C : U \in \mathcal{O}^d \}\right) = \sigma\left(\{ U : U \in \mathcal{O}^d \}\right) = \sigma\left(\mathcal{O}^d\right) \end{aligned}$$

Denn für $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{E}^C := \{ E^C : E \in \mathcal{E} \} = \{ X \setminus E : E \in \mathcal{E} \}$ gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}^C)$ (Übung). ☐

Bemerkung. *Für eine Allgemeine Version des Satzes 6 siehe Elstrodt Folgerung I.4.2*

Wiederholung:

Erzeuger Sei $G \subset \mathcal{P}(X)$, dann heißt $\sigma(G)$ die von G erzeugte σ-Algebra.

1. $G \subset \sigma(G)$
2. $\forall\, \sigma$-Alg. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ mit $G \subset \mathcal{A} \implies \sigma(G) \subset \mathcal{A}$ („kleinste“)

Borel'sche Algebra Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{O}$ die offene Mengen. Die σ-Algebra $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(X)$ ist die Borel'sche σ-Algebra.

$$\mathcal{C} := \{\, C \subset X \text{ mit } C^C \in \mathcal{O} \,\}$$
$$\mathcal{K} \text{ die kompakten Mengen}$$
$$\implies \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{K})$$

Explizit betrachten wir jetzt weitere Mengensysteme von $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right) =: \mathcal{B}^d$:

Offene Quader im $\mathbb{R}^d$

$$J^o := J^{o,d} := J^o\left(\mathbb{R}^d\right) := \left\{ \underbrace{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d)}_{=:(a,b)} \mid a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\}$$

Halboffene Quader im $\mathbb{R}^d$

$$J := J^d := J(\mathbb{R}^d) := \left\{ \underbrace{[a_1, b_1) \times \cdots \times [a_d, b_d)}_{=:[a,b)} \mid a_j, b_j \in \mathbb{R} \right\}$$

Rationale offene Quader $J^{o,d}_{\mathbb{Q}} := \{\, (a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}^d \,\}$

Rationale halboffene Quader $J^d_{\mathbb{Q}} := \{\, [a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}^d \,\}$

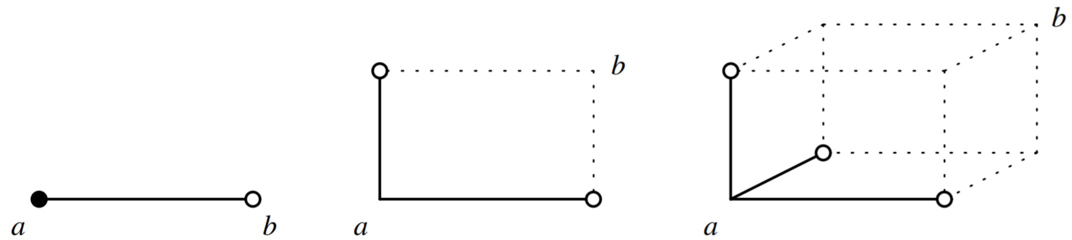

Abbildung 2: Halboffene Quader im $\mathbb{R}^d$ für $d = 1, 2, 3$
(Aus Schillings „Measures, Integrals and Martingales“)

Wir benutzen dabei die Konvention $[a, b) = (a, b) = \emptyset$ falls für ein $j \in \{\, 1, \ldots, d \,\}$ $b_j < a_j$ gilt.

Satz 3.7. *Egal ob rational oder reell, die obigen Mengen erzeugen die Borel'sche σ-*

Algebra.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma\left(J^d_{\mathbb{Q}}\right) = \sigma\left(J^{o,d}_{\mathbb{Q}}\right) = \sigma\left(J^d\right) = \sigma\left(J^{o,d}\right)$$

Beweis. Es gilt $J^{o,d}_{\mathbb{Q}} \subset J^{o,d} \subset \mathcal{O}^d$. Nach der Vorlesung ist weiterhin

$$\sigma\left(J^{o,d}_{\mathbb{Q}}\right) \subset \sigma\left(J^{o,d}\right) \subset \sigma\left(\mathcal{O}^d\right) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

Man zeige noch die umgekehrte Inklusion. Sei also $U \in \mathcal{O}^d$ offen, dann existiert für jedes $x \in U$ ein $\epsilon > 0$, sodass $B_\epsilon(x) \subset U$. Also finden wir einen rationalen offenen Quader mit

$$I(x) \subset \mathcal{B}_\epsilon(x) \subset U$$

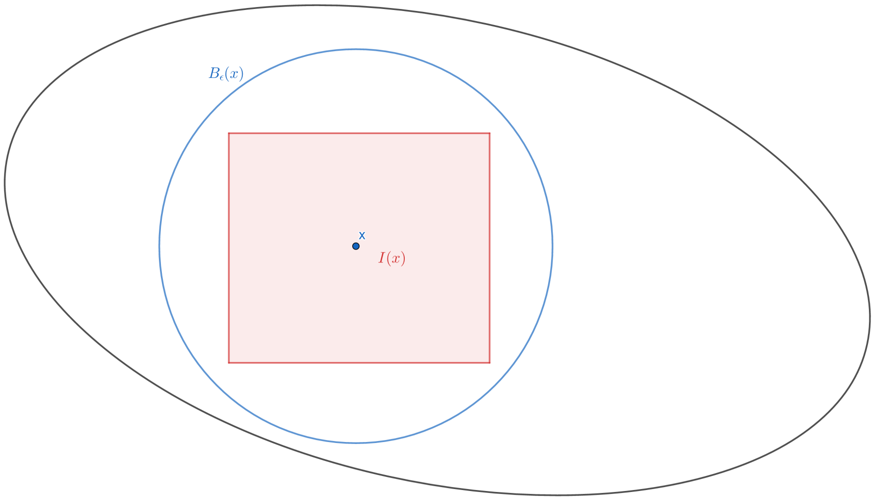

Abbildung 3: Skizze

Betrachten wir die Vereinigung dieser Quader:

$$\bigcup_{x \in U} I(x) \subset U$$

Für jedes $x \in U$ gilt $x \in \bigcup_{x \in U} I(x)$. Also gilt:

$$U \subset \bigcup_{x \in U} I(x) \subset \bigcup_{I \in J^{o,d}_{\mathbb{Q}}, I \subset U} I \subset U \implies U = \bigcup_{I \in J^{o,d}_{\mathbb{Q}}, I \subset U} I$$

Wegen $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ ist diese Vereinigung abzählbar. Mit $J_{\mathbb{Q}}^{o,d} \subset \sigma\left(J_{\mathbb{Q}}^{o,d}\right)$ und σ-Additivität folgt $U \in \sigma\left(J_{\mathbb{Q}}^{o,d}\right)$ und da $U \in \mathcal{O}^d$ beliebig war auch $\mathcal{O}^d \subset \sigma\left(J_{\mathbb{Q}}^{o,d}\right)$. Schließlich erhalten wir

$$\sigma\left(\mathcal{O}^d\right) \subset \sigma\left(J_{\mathbb{Q}}^{o,d}\right) \subset \sigma\left(J^d\right)$$

Halboffene Quader
Sei $I = [a, b),\ a, b \in \mathbb{Q}^d$. Dann können wir I schreiben als:

$$I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left((a_1 - \frac{1}{n}, b_1) \times \cdots \times (a_d - \frac{1}{n}, b_d) \right)$$

Also ist $J_{\mathbb{Q}}^{d} \subset \sigma\left(J_{\mathbb{Q}}^{o,d}\right)$ und somit auch $\sigma\left(J_{\mathbb{Q}}^{d}\right) \subset \sigma\left(J_{\mathbb{Q}}^{o,d}\right) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$

Offene Quader
Sei nun $I = (a, b),\ a, b \in \mathbb{Q}^d$. Hier können wir I folgendermaßen schreiben:

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ([a_1 + \frac{1}{n}, b_1) \times \cdots \times [a_d + \frac{1}{n}, b_d))$$

Demnach ist $J_{\mathbb{Q}}^{o,d} \subset \sigma\left(J_{\mathbb{Q}}^{d}\right)$ und dadurch auch $\sigma\left(J_{\mathbb{Q}}^{o,d}\right) \subset \sigma\left(J_{\mathbb{Q}}^{d}\right) \subset \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.
Trivialerweise gilt $J_{\mathbb{Q}}^{d} \subset J^d \subset \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.
Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, existiert $a_j^{(n)} \to a_j \in \mathbb{R}, n \to \infty$
$\underset{\text{Analog}}{\Longrightarrow} \sigma\left(J^d\right) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right), \sigma\left(J^{o,d}\right) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ $\square$

Weitere Mengen, die $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ erzeugen:

$\{ (-\infty, a) \mid a \in \mathbb{Q} \}$	$\{ (-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R} \}$
$\{ (-\infty, b] \mid b \in \mathbb{Q} \}$	$\{ (-\infty, b] \mid b \in \mathbb{R} \}$
$\{ (c, \infty) \mid c \in \mathbb{Q} \}$	$\{ (c, \infty) \mid c \in \mathbb{R} \}$
$\{ [d, \infty) \mid d \in \mathbb{Q} \}$	$\{ [d, \infty) \mid d \in \mathbb{R} \}$

Wie konstruiert man alle Mengen in $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ bzw. wie konstruiert man für $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)\ \sigma(\mathcal{E})$?
Idee: Man bilde alle möglichen abzählbaren Vereinigungen an Elementen in $\mathcal{E}$ und nimmt hinzu noch die Komplemente der Vereinigungen.

$$\sigma(\mathcal{E}) \stackrel{?}{=} \mathcal{E}_{\sigma,c} := \{ \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j, \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j^C, E_j \in \mathcal{E} \}$$

Im Allgemeinen gilt aber $\mathcal{E}_{\sigma,c} \subsetneq \sigma(\mathcal{E})$. So stellt $\mathcal{E} = \{ A, B, X \}, X$ Grundmenge, $A \cap B = \emptyset, A, B \subset X$ ein Gegenbeispiel dar.

Bemerkung. *Für näheres schaue man nach „Transfinite Induktion“ in Schilling Appendix D oder Elstrodt Anhang B.*

4 Maße und Prämaße

Definition 4.1. *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in X. Dann ist ein Maß μ eine Abbildung (M0)*

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$

mit den Eigenschaften:

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$

(M2) *σ-Additivität: Für jede paarweise disjunkte Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A_j \cap A_k \overset{j\neq k}{=} \emptyset$ gilt: $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$*

Ist $\mathcal{A}$ keine σ-Algebra, so nennen wir μ ein Prämaß, falls (M0), (M1) und (M2), letzteres in abgewandelter Form, gelten.
σ-Additivität (für das Prämaß): Für jede paarweise disjunkte Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ gilt $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Definition 4.2. *Sei X eine Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in X. Wir nennen das Tupel $(X, \mathcal{A})$ Messraum. Ist μ ein Maß auf X (implizit auf $\mathcal{A}$), dann heißt das Tupel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.*

Ein endliches Maß ist ein Maß mit $\mu(X) < \infty$ und ein endliches Maß ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß (kurz W-Maß), falls $\mu(X) = 1$. Entsprechend nennen wir $(X, \mathcal{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum, falls das Maß μ endlich ist und $\mu(X) = 1$ gilt.

Satz 4.3. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A, B \in \mathcal{A}$. Dann gilt:*

1. $A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ *(„endliche σ-Additivität")*
2. $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$ *(„Monotonie")*
3. $A \subset B, \mu(A) < \infty \implies \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
4. $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ *(„starke Additivität")*
5. $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$

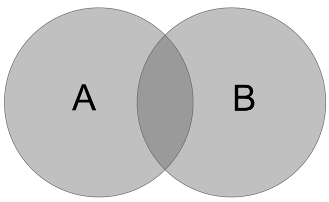

Abbildung 4: Visualisierung zu 4.3.4

Beweis.

1. Setze $A_1 := A, A_2 := B$ und $\forall n \geq 3\; A_n := \emptyset$, wobei $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$

paarweise disjunkt. Daraus folgt nach der 2. Eigenschaft des Maßes, dass

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A) + \mu(B)$$

2. Es gilt $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ und $A \mathbin{\dot\cup} (B \setminus A) = B$. Also ist

$$\mu(A) \leq \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(B)$$

3. Mit 2. und $\mu(A) < \infty$ gilt:

$$\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B) \iff \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

4. Es gilt $A \cup B = (A \setminus B) \mathbin{\dot\cup} B, A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ und $A = (A \setminus (A \cap B)) \mathbin{\dot\cup} (A \cap B)$.

$$\implies \mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B)$$
$$\implies \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

5. Folgt aus 4. wegen $\mu(A \cap B) \geq 0$.

$\square$

Satz 4.4. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum, dann ist $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ genau dann ein Maß wenn folgende Eigenschaften gelten:*

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \;\; \forall A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset$

c) Stetigkeit von unten:
Für jede wachsende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A := \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

c') Stetigkeit von oben:
Für jede fallende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A := \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

c") Stetigkeit in $\emptyset$:
Für jede fallende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A := \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ ($\overset{2.3}{\implies} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$) gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Dabei sind c), c') und c") äquivalent. 23.10.2019

Wiederholung:

Definition. *Sei A eine σ-Algebra in X. Das Maß μ ist eine Abbildung*

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty] \qquad \textit{(M0)}$$

mit den Eigenschaften:

- $\mu(\emptyset) = 0$ *(M1)*

- *Für jede paarweise disjunkte Folge* $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ *(M2)*

Venn Diagramm

Prämaß: Wir nennen μ *ein Prämaß, falls* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ *keine* σ*-Algebra ist, aber* $\emptyset \in \mathcal{A}$ *und (M0), (M1) und (M2) in abgewandelter Form gelten: Für jede Folge* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, wobei* $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{A}$*, mit:*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

gilt:

$$\mu(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Beweis von Satz 4.4.

„$\implies$" Sei $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ein Maß. Dann gilt a) per Definition und b) wegen Satz 3. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend, dann existiert $A := \lim_{n\to\infty} A_n$ nach Lemma 2.3 (Monotone Konvergenz von Mengen).

Zwiebelschalenprinzip:

Setze $B_1 := A_1, B_2 := A_2 \setminus A_1, B_n := A_n \setminus A_{n-1}$. Es gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{B_n}_{\text{Ringe!}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$$\begin{aligned}
\implies \mu(A) \underset{2.3}{=} \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mu\left(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} B_n\right) \\
\underset{\sigma\text{-add.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) \\
= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \implies c)
\end{aligned}$$

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend d.h. $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots$

$$\implies (A_1 \setminus A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist wachsend}$$

$$\implies \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_1 \setminus A_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n)$$

falls $\mu(A_1) < \infty \implies \mu(A_n) < \infty \; \forall n \in \mathbb{N}$

und $\mu(A_1 \setminus A_n) \underset{(3)}{=} \mu(A_1) - \mu(A_n)$

Es ist also

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_1\setminus A_n)=\left(A_1\setminus\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)\quad\underset{2.3}{=}(A_1\setminus A_n)$$
$$\mu(A_1\setminus A_n)=\mu(A_1)-\mu(A_n)$$
$$\mu(A_1)-\mu(A)=\mu(A_1\setminus A)\qquad=\mu\left(A_1\setminus\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)$$
$$=\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_1\setminus A_n)\right)=\lim_{n\to\infty}(\mu(A_1)-\mu(A_n))$$

Wir erhalten also sofort:

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu\left(\lim_{n\to\infty}A_n\right)$$

(Stetigkeit in $\emptyset$)
Sei also $\lim_{n\to\infty}A_n=\emptyset=A$.

$$\underset{\text{siehe oben}}{\Longrightarrow}\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(\emptyset)=0$$

„$\Longleftarrow$“ Angenommen a), b) und c) gelten. Sei $A_1,A_2,\ldots,A_N$ paarweise disjunkt, dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{N}A_j\right)=\sum_{j=1}^{N}\mu(A_j)\tag{4}$$

$B_n:=\bigcup_{j=1}^{n}A_j$ ist wachsend und $B_n\overset{n\to\infty}{\to}B=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j$.

$$\underset{\text{c)}}{\Longrightarrow}\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j\right)=\mu(B)=\lim_{j\to\infty}\mu(B_j)\underset{\text{b)}}{=}\lim_{j\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{j}A_n\right)=\lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{j}\mu(A_j)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_j)$$

$\Longrightarrow$ μ ist additiv!

Weil außerdem $\mu(\emptyset)=0$ und μ eine Abbildung nach $[0,\infty]$ ist, ist μ ein Maß.

Wir wissen, dass die Implikationskette c) $\Longrightarrow$ c') $\Longrightarrow$ c") gilt.
Wir zeigen also noch a), b), c") $\Longrightarrow$ c). Sei also $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge.

$$A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=\lim_{n\to\infty}A_n$$

und $\mu(A)<\infty\;\forall A\in\mathcal{A}$

$$\underset{\text{b)}}{\Longrightarrow}\mu(A)=\mu((A\setminus A_n)\cup A_n)=\mu(A\setminus A_n)+\mu(A_n)$$
$$\Longrightarrow\mu(A)=\lim_{n\to\infty}(\mu(A\setminus A_n)+\mu(A_n))$$

Es ist $A \setminus A_n$ eine fallende Folge und insbesondere $\lim_{n\to\infty} (A \setminus A_n) = \emptyset$ nach c") gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sigma (A \setminus A_n) = 0$$

$\implies \mu (A) = \lim_{n\to\infty} \mu (A_n)$
A_n war bel. wachsende Folge. $\implies$ c) ! $\square$

Beispiele. *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in X. Dann definieren alle folgenden Abbildungen ein Maß auf $\mathcal{A}$:*

Ein triviales Beispiel

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$
$$\mu : A \mapsto 0, \ A \in \mathcal{A}$$

Das Dirac-Maß *Sei $x_0 \in X$ und die Abbildung*

$$\delta_{x_0} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$
$$\delta_{x_0} (A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A \\ 0, & x_0 \notin A \end{cases}$$

Die Abbildung definiert zudem ein endliches Maß auf $\mathcal{A}$.

Das Zählmaß

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$

mit $\mu (A) = |A|$ (= „Anzahl der Elemente in A")

Bemerkung. *Für jedes Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ gilt die σ-Subadditivität:*
Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine Folge, so gilt

$$\mu \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu (A_n)$$

Denn: $B_1 := A_1, B_2 := A_2 \setminus A_1, \dots B_n := A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) \subset A_n$. $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist offensichtlich paarweise disjunkt.

$$\underset{\mu \text{ ist ein Maß}}{\implies} \mu \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) = \mu \left(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} B_n \right) \underset{\sigma\text{-Additivität}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu (B_n) \underset{(3)}{\leq} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu (A_n)$$

Lemma 4.5. *Sei μ ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Weiterhin gelte: $\exists\, k \in \mathbb{N}$ derart, dass $A_m \cap A_n = \emptyset$ falls $|m - n| \geq k$. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu (A_n) \leq k \cdot \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)$$

Für $k = 1$ ist dies äquivalent zu der σ-Additivität von μ.

Beweis. Zerlege $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in die Teilfolgen $(A_{i_n})_{n\in\mathbb{N}} := A_{i+k(n-1)}$ $(1 \le i \le k)$.
Für alle $1 \le i \le k$ gilt dann $\forall\, m, n \in \mathbb{N}, m \neq n : |A_{i_m} - A_{i_n}| \ge k \implies A_{i_m} \cap A_{i_n} = \emptyset$.
Jede Teilfolge besteht also aus paarweise disjunkten Mengen. Also gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_{i_n}\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{i_n}\right) \le k \cdot \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$\square$

5 Inhalte, Ringe und Halbringe

Wir suchen einen „sinnvollen“ Maß-Begriff. Für diesen sollte gelten:

$$I = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \implies \lambda\left(I\right) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \qquad \text{(Lebesgue Maß)}$$

Situation:

Volumenzuordnung für „einfache“ Mengen $\overset{?}{\to}$ Maßbegriff auf ganzer σ-Algebra

Daher definieren wir „Inhalte“ auf Mengensystemen für welche gilt:

- $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$
- $\emptyset \in \mathcal{A}$

Diese Objekte heißen Ringe!

Definition 5.1. *Sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}\left(X\right)$ von Teilmengen in X heißt Ring, falls*

1. $\emptyset \in \mathcal{R}$
2. $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$
3. $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$

Bemerkung.

1. *Ist zudem $X \in \mathcal{R}$, so ist $\mathcal{R}$ eine Algebra.*
2. *Ringe enthalten Schnitte von Mengen:*

$$A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B = A \setminus \underbrace{(A \setminus B)}_{\in\mathcal{R}} \in \mathcal{R}$$

Venn-Diagramm

Satz 5.2. *$\mathcal{R} \subset \mathcal{P}\left(X\right)$ ist genau dann eine Algebra wenn*

a) $X \in \mathcal{R}$

b) $A \in \mathcal{R} \implies A^C \in \mathcal{R}$
c) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$

Beweis.
„$\implies$" $\mathcal{R}$ ist eine Algebra $\overset{2)}{\implies}$ b). a) folgt direkt aus der Bemerkung zuvor und wegen $X, A \in \mathcal{R} \implies A^C = X \setminus A \in \mathcal{R}$.
„$\impliedby$" $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ erfülle a), b) und c). Dann ist wegen a) und b) $\emptyset = X^C \in \mathcal{R}$. Also wäre 1. schon mal gezeigt. Offensichtlich ist zudem 3. äquivalent zu c). Es muss also noch 2. gezeigt werden:

$$\begin{aligned} A, B \in \mathcal{R} &\implies A^C \in \mathcal{R} \text{ und } B^C \in \mathcal{R} &&\implies A^C \cup B \in \mathcal{R} \\ &\overset{\text{De Morgan}}{\implies} (A \cap B^C)^C \in \mathcal{R} &&\overset{b)}{\implies} A \cap B^C \in \mathcal{R} \\ &\implies A \setminus B \in \mathcal{R} &&\implies 2. \end{aligned}$$

□ 25.10.2019

Nachtrag zur Vorlesung:

Beweis zu Satz 4.3. Der Beweis zu a) kam bereits vor, wird hier jedoch wiederholt:

a) $A_1 := A, A_2 := B$ und $A \cap B = \emptyset, A_n := \emptyset$ für $n \geq 3$. Nun wenden wir die σ-Additivität an und erhalten $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu(A \cup B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(A) + \mu(B)$
b) Sei nun $A \subset B$. Dann gilt $B = A \dot\cup (B \setminus A) \implies \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$
c) Sei zusätzlich $\mu(A) < \infty$. Dann gilt nach b) $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \implies \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
d) $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \dot\cup (A \cap B) \dot\cup (B \setminus (A \cap B))$. Daraus folgt mit a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = [\mu(A \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B)] + [\mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B)] \underset{a)}{=} \mu(A) + \mu(B)$
e) Nach d) gilt $\mu(A \cup B) + \underbrace{\mu(A \cap B)}_{\geq 0} = \mu(A) + \mu(B) \implies \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$

□

Beweis zu Lemma 4.5. Setze $C := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Für $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$ sind die Mengen A_{r+mk} für $m \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt! Für festes r ist $F_r := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{r+mk} \subset C$. Daraus folgt mit der σ-Additivität $\sum_{r=1}^k \underbrace{\mu(F_r)}_{\leq \mu(C)} = \sum_{r=1}^k \sum_{m\in\mathbb{N}} \underbrace{\mu(A_{r+mk})}_{\geq 0} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Wegen Monotonie dürfen wir also umordnen und es gilt

$$\sum_{r=1}^{k} \mu(C) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \leq k\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

$\square$

Wiederholung: Algebraische Objekte! Sei dabei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$.

$\cap$-stabil	$A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$
σ-$\cap$-stabil	$(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \implies \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \subset \mathcal{A}$
$\cup$-stabil	$A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$
σ-$\cup$-stabil	$(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$
$\setminus$-stabil	$A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$
$(\cdot)^C$-stabil	$A \in \mathcal{A} \implies A^C \in \mathcal{A}$

Welche Objekte kennen wir?

σ-Algebra	$X \in \mathcal{A}$, $(\cdot)^C$-stabil, σ-$\cup$-stabil
Ring	$\emptyset \in \mathcal{R}$, $\setminus$-stabil, $\cup$-stabil
Algebra	$X \in \mathcal{A}$, $\setminus$-stabil, $\cup$-stabil

Bemerkung. *Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra, so ist $\mathcal{A}$ insbesondere ein Ring. Umgekehrt gilt: Ist $\mathcal{R}$ ein Ring mit $X \in \mathcal{R}$, so ist $\mathcal{R}$ eine Algebra.*

Achtung: Um das Lebesgue-Maß $\lambda^2(I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ auf der σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ zu definieren müssen wir Halbringe definieren.

Halbringe $\emptyset \in \mathcal{H}$, $\cap$-stabil, $A, B \in \mathcal{H} \implies A \setminus B = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$ für $(C_j)_{j=1\ldots n} \subset \mathcal{H}$ disjunkt

Aber: $J^{o,d}$ sind nicht mal ein Ring. Skizze: $d = 2$

$A \setminus B \notin J^{o,2}$ aber es gilt offensichtlich $A \setminus B = \bigcup_{j=1}^{4} C_j$! Das bedeutet, dass $J^{o,2}$ ein Halbring ist.

Beispiele (für Maße)**.** *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Abbildung.*

i) $\mu : A \longmapsto 0 \qquad A \in \mathcal{A}$

ii) *Zählmaß:* $\mu : A \longmapsto \begin{cases} |A| & \textit{wobei } |A| < \infty \\ \infty & \textit{falls } A \textit{ nicht abzählbar oder abzählbar } \infty \end{cases}$

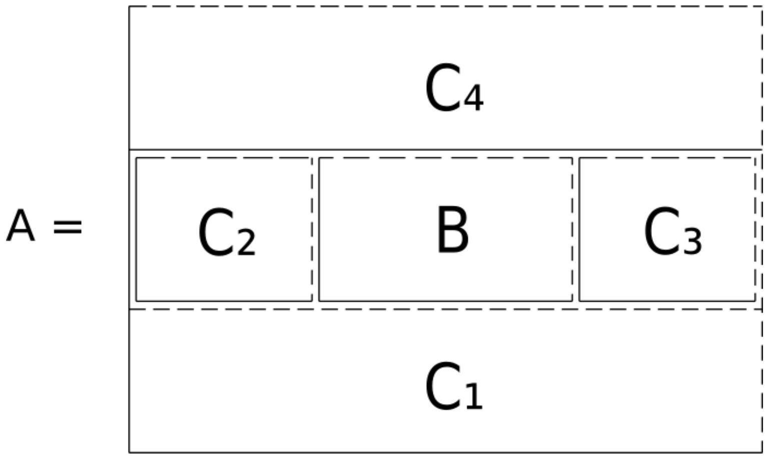

Abbildung 5: Überdeckung durch Rechtecke B, C_1, C_2, C_3, C_4

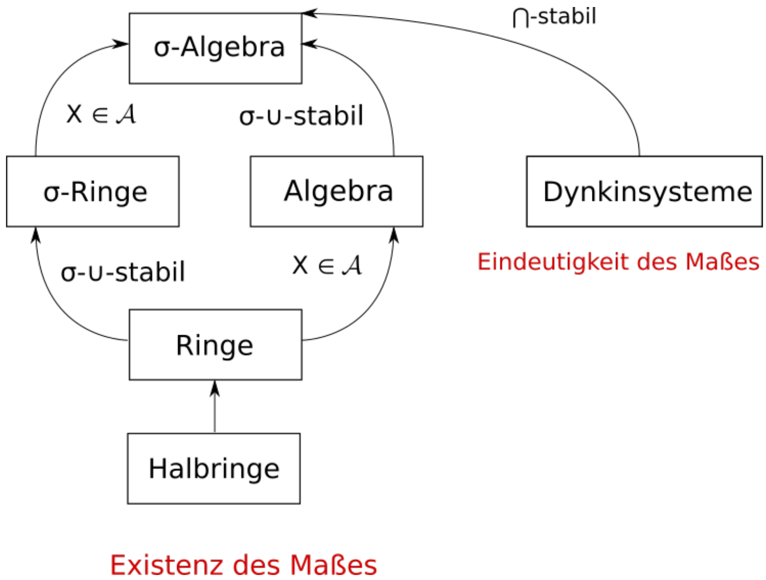

Abbildung 6: Beziehungen zwischen Ringen und Algebren

iii) *Dirac-Maß: Sei $x_0 \in X$ fest.*

$$\delta_{x_0} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$
$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A \\ 0, & x_0 \notin A \end{cases}$$

Bemerkung (Jordan-Maß)**.** *Einen weiteren Inhaltsbegriff (aber kein Maß) über $\mathbb{R}$ lässt* *sich mit dem Riemann-Integral bilden:* $\mu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x)\,dx$.

Definition. *$N \in \mathcal{A}$ ist eine Nullmenge, falls $\mu(N) = 0$, das heißt also μ „sieht" das Volumen von N nicht.*

Beispiel. *Betrachte $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit dem Dirac-Maß $\delta_x : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$. δ_x-Nullmengen sind also alle Mengen $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, sodass $x \notin A$! Die komplette „Masse" oder „Wahrscheinlichkeit" ist in x konzentriert.*

Bemerkung. *Sei $N \in \mathcal{A}$ (letzteres σ-Algebra) eine Nullmenge und $M \subset N$ sowie μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ und $M \in \mathcal{A}$. Dann gilt $N = M \,\dot\cup\, (N \setminus M)$ und nach Voraussetzung $\mu(N) = 0$. Also ist* $0 = \mu(N) = \underbrace{\mu(M)}_{\geq 0} + \underbrace{\mu(N \setminus M)}_{\geq 0} \implies \mu(M) = 0$

$\implies$ *M ist eine Nullmenge*

28.10.2019

<u>Hatten:</u>

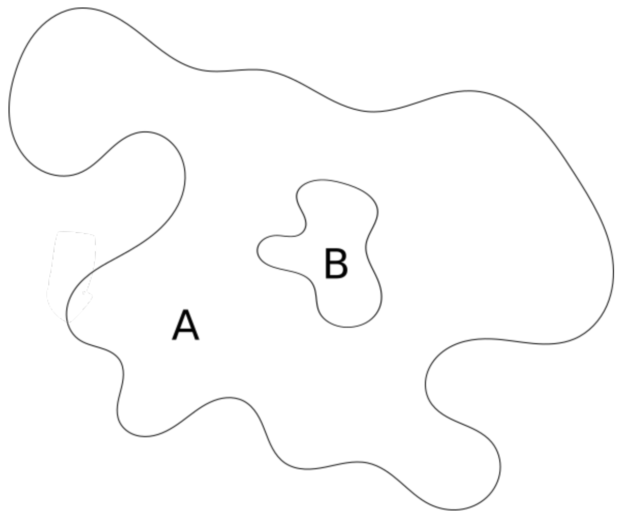

Abbildung 7: Illustration zweier Mengen in einer algebraischen Struktur

Fläche $(A \setminus B) =$ Fläche $A-$ Fläche B

$$\boxed{A \cup B \qquad A \setminus B}$$
$$A \cap B$$

$\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ist Ring, falls

(1) $\emptyset \in \mathcal{R}$

(2) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B \in \mathcal{R}$

(3) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$

Falls $X \in \mathcal{R}$, so nennen wir $\mathcal{R}$ eine Algebra.

Bemerkung. *Ist $\mathcal{R}$ Ring, $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B \in \mathcal{R}$, da*

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \qquad \text{(Venn-Diagramm)}$$

Erinnerung: Ist $\mathcal{R} \in \mathcal{P}(X)$ Ring, so heißt $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ Prämaß, falls

(4) $\mu(\emptyset) = 0$

(5) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ disjunkte Mengen mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \mathcal{R}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad (\sigma\text{-Additivität})$$

Definition 5.3 (Inhalt)**.** *Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ($\mathcal{R}$ ist dabei nicht notwendigerweise ein Ring). Dann heißt $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ Inhalt, falls*

(6) $\mu(\emptyset) = 0$

(7) Für endlich viele disjunkte Mengen mit $A_l \cap A_k = \emptyset$ für $l \neq k$ gilt:

$$A_1, A_3, \ldots, A_N \implies \mu\left(\bigcup_{l=1}^{N} A_l\right) = \sum_{l=1}^{N} \mu(A_l)$$

Wegen (5) ist jedes Prämaß ein Inhalt! Dabei setze man $A_{N+1} = A_{N+2} = \cdots = \emptyset$.

Bemerkung. *WICHTIG! Für jeden Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$ gilt Satz 4.3! Und mit der entsprechenden (leichten) Umformulierung gilt für jedes Prämaß μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ auch Satz 4.4!*

Definition 5.4 (Halbring)**.** *Ein Mengensystem $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ ist ein Halbring, falls*

a) $\emptyset \in \mathcal{H}$

b) $A, B \in \mathcal{H} \implies A \cap B \in \mathcal{H}$

c) $\forall A, B \in \mathcal{H}$ *gibt es disjunkte $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{H}$ mit*

$$\boxed{A \setminus B = \bigcup_{j=1}^{n} C_j}$$

Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, so heißt

$$\mathcal{R}(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X) \ Ring, \\ \mathcal{E} \subset \mathcal{R}}} \mathcal{R} \tag{8}$$

der von $\mathcal{E}$ erzeugte Ring.

Bemerkung.

1) $\mathcal{H} = \{\emptyset\} \cup \{\{a\} : a \in X\}$ *ist ein Halbring, so ist $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ der Ring der endlichen Teilmengen von X.*
2) $J = J^1 = \{[a,b) : a \leq b \in \mathbb{R}\}$ *ist ein Halbring.*

Behauptung. *Alle J^d, wobei $d \in \mathbb{N}$, sind Halbringe!*

Lemma 5.5. *Sind $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Halbringe in X bzw. Y, so ist $\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2 := \{A \times B : A \in \mathcal{H}_1, B \in \mathcal{H}_2\} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ Halbring in $X \times Y$!*

Beweis. Es ist $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$.
Sind $A_1, A_2 \in \mathcal{H}_1, B_1, B_2 \in \mathcal{H}_2$, so sind:

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = \underbrace{(A_1 \cap A_2)}_{\in \mathcal{H}_1} \times \underbrace{(B_1 \cap B_2)}_{\in \mathcal{H}_2} \in \mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$$

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)^C$$

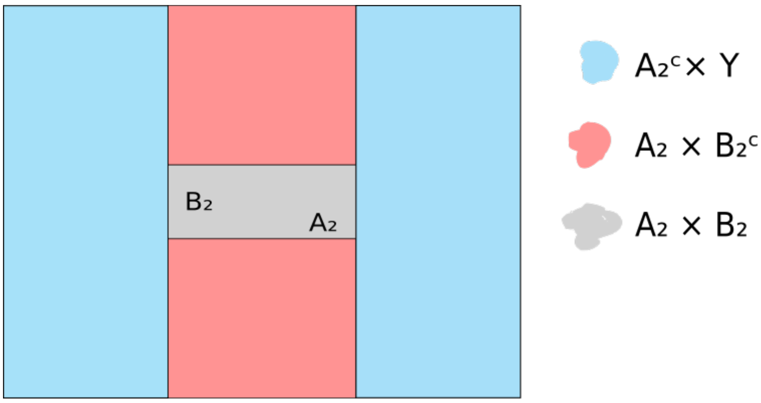

Abbildung 8: Graphische Darstellung der Mengen

Offensichtlich sind dabei die blaue und die rote Fläche disjunkt.

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ \underbrace{(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)^C}_{=(A_1\times B_1)\setminus(A_2\times B_2)} &= (A_1 \times B_1) \cap (\text{Blau} \cupdot \text{Rot}) \\
&= (A_1 \times B_1) \cap \left(\left(A_2^C \times Y\right) \cupdot \left(A_2 \times B_2^C\right)\right) \\
\Longrightarrow\ (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) &= \left((A_1 \times B_1) \cap \left(A_2^C \times Y\right)\right) \cupdot \left((A_1 \times B_1) \cap \left(A_2 \times B_2^C\right)\right) \\
&= \left(\left(A_1 \cap A_2^C\right) \times (B_1 \cap Y)\right) \cupdot \left((A_1 \cap A_2) \times \left(B_1 \cap B_2^C\right)\right) \\
&= ((A_1 \setminus A_2) \times B_1) \cupdot ((A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)) \qquad (9)
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $A_1 \setminus A_2$ die endliche Vereinigung disjunkter Mengen in $\mathcal{H}_1$ und genauso $B_1 \setminus B_2$ in $\mathcal{H}_2$. Wenn man diese beiden zusammenbaut ergibt sich aus (9), dass $(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2)$ die disjunkte endliche Vereinigung endlich vieler Mengen in $\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$ ist. Demnach ist $\mathcal{H}_1 * \mathcal{H}_2$ ein Halbring. $\square$

Korollar 5.6. *Für jedes $d \in \mathbb{N}$ ist J^d, die Menge der halboffenen Intervalle im $\mathbb{R}^d$, ein Halbring. Das Gleiche gilt für $J^d_{\mathbb{Q}}$.*

Beweis. Man führe eine Induktion in d aus:

$$\begin{aligned}
&J^1 \text{ ist ein Halbring (einfach).} \\
\overset{\text{Lemma 5}}{\Longrightarrow}\ &J^2 = J^1 * J^1 \text{ ist ein Halbring.} \\
\overset{\text{Lemma 5}}{\Longrightarrow}\ &J^3 = J^2 * J^1 \text{ ist ein Halbring.} \\
\overset{\text{Induktion}}{\Longrightarrow}\ &J^{d+1} = J^d * J^1 \text{ ist ein Halbring.}
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 5.7 (Verschärfung von Definition 4)**.** *Sind $A, B_1, \ldots, B_n$ Elemente in einem Halbring $\mathcal{H}$, so gibt es disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{H}$ mit $A \setminus (\bigcup_{j=1}^n B_j) = \dot\bigcup_{l=1}^m C_l$.*

Beweis. Man führe eine Induktion nach n durch:
$n = 1$: Dies gilt per Definition 4 über Halbringe.
Sei nun für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Behauptung erfüllt.

$$\Longrightarrow\quad \forall\, A, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{H}\ \exists\, C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{H} : A \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \dot{\bigcup_{l=1}^{m}} C_l \qquad (*)$$

Seien nun $A, B_1, \dots, B_{n+1} \in \mathcal{H}$ beliebig.

$$\begin{aligned}
A \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} B_j\right) &= A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j \cup B_{n+1}\right)^C &&= \overbrace{\left(A \cap \bigcap_{j=1}^{n} B_j^C\right)}^{=A\setminus(\bigcup_{j=1}^{n} B_j)} \cap B_{n+1}^C \\
&= \underbrace{\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{n} B_j\right)}_{\overset{(*)}{=} \dot\bigcup_{l=1}^{m} C_l} \cap B_{n+1}^C &&= \left(\dot\bigcup_{l=1}^{m} C_l\right) \cap B_{n+1}^C \\
&= \dot\bigcup_{l=1}^{m} \left(C_l \cap B_{n+1}^C\right) &&= \dot\bigcup_{l=1}^{m} \left(C_l \setminus B_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Nach Definition 4 existieren nun für alle l $(D_{l,k})_{k=1,\dots,n_k} \subset \mathcal{H}$ mit $C_l \setminus B_{n+1} = \dot\bigcup_{k=1}^{n_k} D_{l,k}$. Insgesamt ergibt sich damit:

$$A \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} B_j\right) = \dots = \dot\bigcup_{l=1}^{m} \left(C_l \setminus B_{n+1}\right) = \dot\bigcup_{l=1}^{m} \dot\bigcup_{k=1}^{n_k} \underbrace{D_{l,k}}_{\in\mathcal{H}}$$

Als disjunkte Vereinigung endlich vieler Mengen ist $A \setminus (\bigcup_{j=1}^{n+1} B_j) \in \mathcal{H}$. □

Satz 5.8. *Der von einem Halbring $\mathcal{H}$ erzeugte Ring $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ ist gegeben durch*

$$\boxed{\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{H}) = \{\bigcup_{k=1}^{n} A_k : n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{H} \textit{ disjunkt}\}} \tag{10}$$

Beweisidee:
Ist $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ bereits gegeben, so setze man für $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$

$$\nu(A) := \nu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \overbrace{\nu(A_j)}^{:=\mu(A_j)} = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$

30.10.2019

Bracket und Position der Skizze

Allgemein gilt folgende Identität, die anschaulich auf Abbildung 8 zu finden ist.

$$(A \times B)^C = \{(a, b) : a \notin A \text{ oder } b \notin B\} = \left(A^C \times Y\right) \cup \left(A \times B^C\right)$$

Beweis von Satz 5.8. Wir setzen $\mathcal{R} := \{\bigcup_{k=1}^{n} A_k : n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{H} \text{ disjunkt}\}$. Dann ist $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}(\mathcal{H})$, wobei $,\mathcal{H} \subset \mathcal{R}$ (Warum das gilt, sei dem Leser überlassen). Es reicht also zu zeigen, dass $\mathcal{R}$ ein Ring ist.

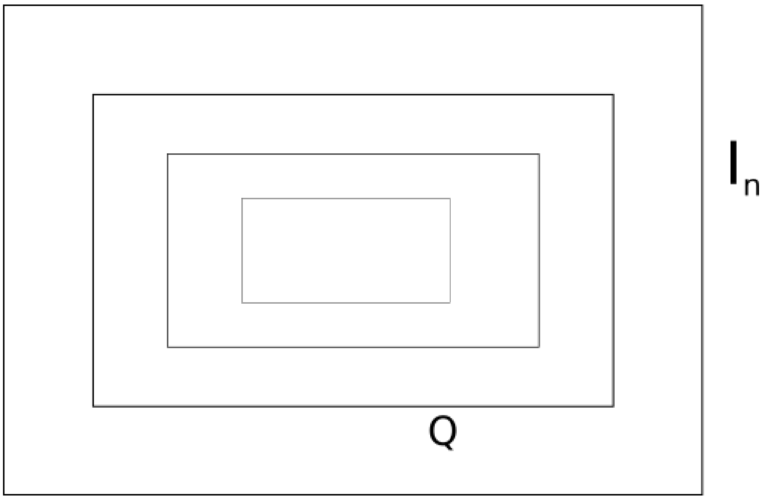

Abbildung 9: Kontext?

1. $\emptyset \in \mathcal{R}$ ✓
2. Seien $\mathcal{R} \ni A = \dot\bigcup_{k=1}^{n} \underbrace{A_j}_{\in \mathcal{H}}$ und $\mathcal{R} \ni B = \dot\bigcup_{k=1}^{n} \underbrace{B_j}_{\in \mathcal{H}}$, wobei die $A_1, \ldots, A_n$ bzw. $B_1, \ldots, B_n$ jeweils paarweise disjunkt sind.

$$\Longrightarrow \underbrace{A_j \cap B_l}_{\text{paarweise disjunkt}} \in \mathcal{H} \qquad \text{(Siehe Bemerkung nach Def. 1)}$$

$$\Longrightarrow A \cap B = \bigcup_{\substack{j=1,\ldots,n \\ l=1,\ldots,m}} \underbrace{(A_j \cap B_l)}_{\in \mathcal{H}} \in \mathcal{R} \tag{11}$$

$$\Longrightarrow A \setminus B = \bigcup_{j=1}^{n} \underbrace{\left(A_j \setminus \bigcup_{l=1}^{m} B_l \right)}_{\text{endliche Vereinigung disjunkter Mengen (Lemma 7)}} \tag{12}$$

Sie sind also eine endliche Vereinigung paarweise disjunkter Mengen (12) und damit in $\mathcal{R}$. ✓
3. Als disjunkte Vereinigung endlich vieler Mengen ist

$$A \cup B = \underbrace{(A \setminus B)}_{\in \mathcal{R}\ (12)} \dot\cup \underbrace{(A \cap B)}_{\in \mathcal{R}\ (11)} \dot\cup \underbrace{(B \setminus A)}_{\in \mathcal{R}\ (12)} \in \mathcal{R} ✓$$

Damit ist $\mathcal{R}$ ein Ring und der Beweis vollbracht. □

Beispiel 1. *Halbring J^d (rechte halboffenen Intervalle) erzeugen Ring $\mathcal{F}^d := \{ \bigcup_{j=1}^{n} I_j : n \in \mathbb{N}, I_1, \ldots, I_n \in J^d$ disjunkt$\}$ (Figuren).*

$\mathcal{F}^1$ = endliche Vereinigung halboffener Intervalle
$\mathcal{F}^d$ = d-dimensionale Verallgemeinerung
Für $I \in J^d$ wissen wir, was das Volumen sein soll, nämlich Länge $\times$ Breite $\times$ Höhe $\times \ldots$.

Satz 5.9 (Erster Fortsetzungssatz)**.** *Sei $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ Inhalt auf einem Halbring $\mathcal{H}$ und $\mathcal{R}$ der von $\mathcal{H}$ erzeugte Ring. Dann existiert genau eine Fortsetzung $\nu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ von μ zu einen Inhalt auf $\mathcal{R}$ und zwar ist*

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) \tag{13}$$

falls $A \in \mathcal{R}$ die endliche Vereinigung der disjunkten Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H}$ ist. Ferner ist ν genau dann Prämaß auf $\mathcal{R}$, wenn μ Prämaß auf $\mathcal{H}$ ist.

Beweis. Nach Satz 8 gibt es zu $A \in \mathcal{R}$ endlich viele disjunkte $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H}$ mit $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Falls also ν existiert, so folgt notwendig

$$\nu(A) = \nu\left(\dot{\bigcup_{j=1}^{n}} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \nu(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$

Existenz von ν:
Setze $\nu(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$ mit disjunkten $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H}$, wobei $A = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} A_j = \dot{\bigcup}_{k=1}^{m} B_k$ für paarweise disjunkte $B_1, \ldots, B_m$.

$$\Longrightarrow \mu(A_j) = \mu(A_j \cap A) = \mu\left(A_j \cap \left(\dot{\bigcup_{l=1}^{m}} B_j\right)\right) = \mu\left(\dot{\bigcup_{l=1}^{m}} (A_j \cap B_l)\right) = \sum_{l=1}^{m} \mu(A_j \cap B_l)$$

$$\overset{\text{Symmetrie}}{\Longrightarrow} \mu(B_l) = \sum_{j=1}^{n} \mu(B_l \cap A_j)$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \mu(A_j \cap B_l) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \cap B_l) = \sum_{l=1}^{m} \mu(B_l)$$

$\Longrightarrow \nu(A)$ ist wohldefiniert.

ν ist Inhalt:
$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$ falls $A, B \in \mathcal{R}, A \cap B = \emptyset$ folgt daraus, dass bereits μ ein

Inhalt ist.

$$
\begin{aligned}
A = \dot{\bigcup_{j=1}^{n}} A_j, B &= \dot{\bigcup_{l=1}^{m}} B_l \\
\implies A \cup B = \dot{\bigcup_{\substack{j=1,\dots,n\\ l=1,\dots,m}}} &\left(A_j \cup B_l\right) \; + \text{rechnen}
\end{aligned}
$$

$$\text{Ist } \sigma\text{-additiv} \implies \mu \text{ ist als Einschränkung von } \nu \text{ auf } \mathcal{H} \text{ auch } \sigma\text{-additiv.}$$

Angenommen μ ist σ-additiv (μ ist Prämaß auf $\mathcal{H}$). Sei $(A_n)_n \subset \mathcal{R}, A = \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$.
$\implies \exists B_1, \dots, B_m \in \mathcal{H}$ paarweise disjunkt, $A = B_1 \cup \dots \cup B_m$
$A_k \in \mathcal{H} \implies \exists$ endlich viele disjunkte $C_{k,l} \in \mathcal{H}, l = 1, \dots, L_k$ mit $A_k = \bigcup_{l=1}^{L_k} C_{k,l}$.

$$
\begin{aligned}
B_j \subset A \implies \mathcal{H} \ni B_j &= B_j \cap A \\
&= B_j \cap \left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} A_k \right) = \dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} \Bigg(B_j \cap \underbrace{A_k}_{\dot{\bigcup}_{l=1}^{L_k} C_{l,k}} \Bigg) = \dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} \dot{\bigcup_{l=1}^{L_k}} \underbrace{\left(B_j \cap C_{k,l}\right)}_{\in \mathcal{H}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\mu\ \sigma\text{-additiv}}{\implies} \mu\left(B_j\right) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{L_k} \mu\left(B_j \cap C_{k,l}\right)}_{=\mu\left(B_j \cap \bigcup_{l=1}^{L_k} C_{k,l}\right) = \mu(B_j \cap A_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \nu\left(B_j \cap A_k\right) \qquad \forall\, j = 1, \dots, n \\
&\implies \nu(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu\left(B_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \nu \left(\underbrace{B_j \cap A_k}_{\leq 0} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \nu\left(B_j \cap A_k\right)}_{\nu(A_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \nu\left(A_k\right) \\
&\implies \nu \text{ ist } \sigma\text{-additiv!}
\end{aligned}
$$

□

Definition 5.10. *Das Lebesgue'sche Prämaß λ^d auf J^d ist definiert durch:*

$$
\begin{aligned}
\lambda^d(\emptyset) &:= 0 \\
\lambda^d(I) &:= \prod_{j=1}^{d} \left(b_j - a_j\right)
\end{aligned}
$$

Lemma 5.11. *Es seien $\lambda^d : J^d \to [0, \infty)$, $\quad I = \prod_{j=1}^{d} [a_j, b_j) \in J^d$, $\quad b_j > a_j$, $j = 1, \dots, n$. Dann ist λ^d ein Prämaß!*

Beweis. Es reicht, die Bedingungen a,b, und c" von Satz 4.4 nachzuprüfen. Machen das für λ^2 $(d = 2)$:

a) $\lambda^2(\emptyset) = 0$ nach Definition.

b) Additivität: $I_1, I_2 \in J^2, I_1 \cap I_2 = \emptyset$ und $I_1 \cup I_2 \in J^2$ Im 2. Fall: Skizze

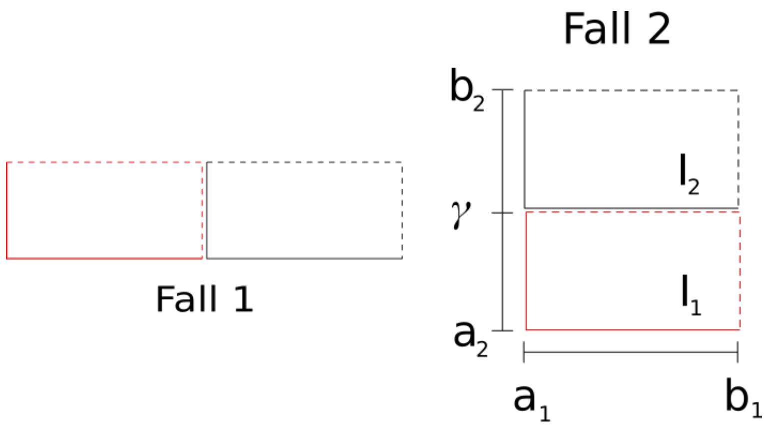

Abbildung 10: Teilweise Überdeckung einer Fläche durch Rechtecke

$$
\begin{aligned}
&\implies I = I_1 \dot\cup I_2 = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \\
&\implies I_1 = [a_1, b_1) \times [a_2, \gamma), I_2 = [a_1, b_1) \times [\gamma, b_2) \\
&\implies \lambda^2(I_1) + \lambda^2(I_2) &&= (b_1 - a_1)(\gamma - a_2) + (b_1 - a_1)(b_2 - \gamma) \\
& &&= (b_1 - a_1)(\gamma - a_2 + b_2 - \gamma) \\
& &&= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \\
& &&= \lambda^2(I_1 \cup I_2) \text{ ☺}
\end{aligned}
$$

c") Stetigkeit von oben in $\emptyset$:
Seien $(I_n)_n \subset J^2$ fallend, $I_{n+1} \subset I_n$ und $\lim_{n\to\infty} I_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} = \emptyset$.
Zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} \lambda^2(I_n) = 0$.
Behauptung: $\boxed{\exists j \in \{1, 2\} \lim_{n\to\infty} \left(b_n^j - a_n^j\right) = 0}$
$I_n = [a_n, b_n) = [a_n^1, b_n^1) \times [a_n^2, b_n^2)$.
$I_{n+1} \subset I_n \implies b_{n+1}^j \leq b_n^j, a_{n+1}^j \geq a_n^j (j = 1, 2)$
$\implies b_n^j - a_n^j$ ist fallend in n.
Angenommen: $j = 1, 2 : \lim_{n\to\infty} \left(b_n^j - a_n^j\right) = \delta \geq 0$ Setze $a^j = \lim_{n\to\infty} a_n^j$ und $Q := a + [0, \frac{\delta}{2})^2 (a = (a_1, a_2))$. $\implies Q \subset I_n \; \forall n \implies Q \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$!
$\implies \exists j = 1, 2 \lim_{n\to\infty} \left(b_n^j - a_n^j\right) = 0$.
O.B.d.A. sei $j = 2$.

Ergänzung hier bezüglich Vektor-Def von Q

$$\lambda^2(I_n) = \underbrace{\left(b_n^1 - a_n^1\right)}_{\leq\left(b_1^1 - a_1^1\right)}\underbrace{\left(b_n^2 - a_n^2\right)}_{\to 0, n\to\infty} \to 0, n \to \infty$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \lambda(I_n) = 0$$

Der Beweis für λ^d erfolgt analog. Skizze.

$\square$

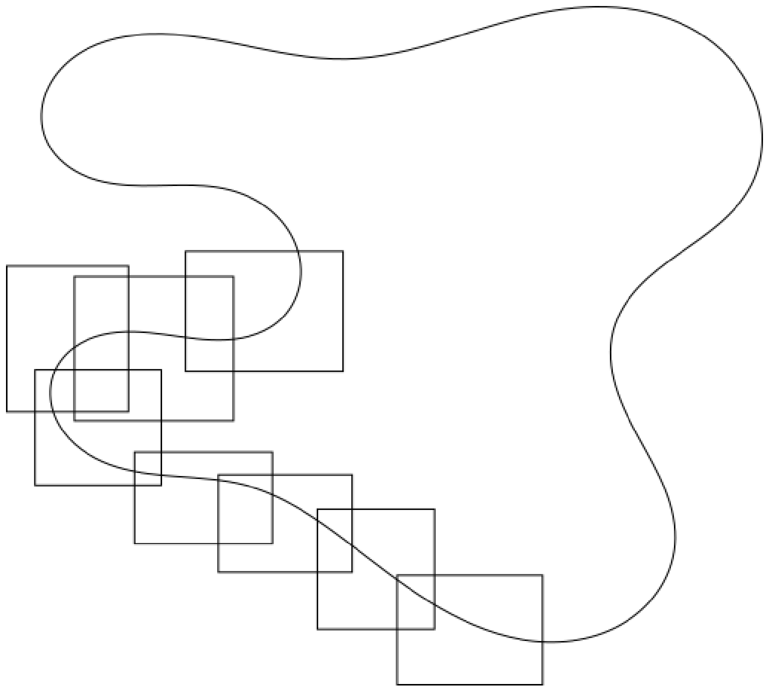

Abbildung 11: Teilweise Überdeckung einer Fläche durch Rechtecke

6 Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen à la Carathéodory

Ziel: Jedes Prämaß auf einem Halbring ist fortsetzbar zu einem Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \supset \mathcal{H}$. Unter gewissen Bedingungen an $\sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{A}$ ist die Fortsetzung auf $\sigma(\mathcal{H})$ sogar eindeutig. Die Idee benutzt dabei die sogenannten äußere Maße.
Angenommen:

$$\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]\ \mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X) \text{ Halbring}$$

bewerfe A mit abzählbar vielen Pflastersteinen aus $\mathcal{H}$. $A \subset X : J(A) = \{ (A_n)_n \subset \mathcal{H} : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \} = \emptyset$, falls so eine Überdeckung nicht existiert.

Definition (Äußeres Maß μ_* zu μ). *Für das äußere Maß μ_* setzen wir:*

$$\begin{aligned}\mu_*(A) &:= \inf\left(\sum_{n=1}^{d}\mu(A_n), (A_n)_n \subset \mathcal{H}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) && \text{falls es mindestens eine solche Überdeckung gibt.}\\ &:= \infty && \text{falls } J(A) = \emptyset.\end{aligned}$$

04.11.2019

Wiederholung:

Aufgabe $\mu : \mathcal{H} \to [0,\infty]$ Prämaß (z.B. λ^d)
$\implies$ Bastele σ-Algebra $\mathcal{A}$ und Fortsetzung $\eta : \mathcal{A} \to [0,\infty]$, Maß so, dass $\eta\big|_{\mathcal{H}} = \mu$, $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$.

Definition 6.1 (Carathéodory 1914). *Ein äußeres Maß ist eine Abbildung $\eta : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ mit*

a) $\eta(\emptyset) = 0$
b) $\forall\, A \subset B \subset X : \eta(A) \leq \eta(B)$ *(Monotonie)*
c) $\forall\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : \eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\eta(A_n)$ *(σ-Subadditivität)*

Beispiele (Äußere Maße).

1) $\eta_1(\emptyset) = 0, \eta_1(A) = 1, \emptyset \neq A \subset X$ *definiert ein äußeres Maß.*
2) Setze $\eta_2(A) := \begin{cases} 0, & A \text{ abzählbar} \\ 1, & A \text{ überabzählbar}\end{cases}$
Dann definiert $\eta_2 : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß.
3) Sind $\eta_k : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ äußere Maße für alle $k \in \mathbb{N}$, dann ist $\eta := \sum_{k=1}^{\infty}\eta_k$ ist ein äußeres Maß.

Definition 6.2 (Carathéodory 1914). *Sei $\eta : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß. Dann heißt $A \subset X$ η-messbar falls für alle $Q \subset X$ gilt*

$$\eta(Q) \geq \eta(Q \cap A) + \eta\left(Q \cap A^C\right) \tag{1}$$

(Die andere Ungleichung $\eta(Q) \leq \eta(Q \cap A) + \eta\left(Q \cap A^C\right)$ ist mehr oder weniger geschenkt.)

Lemma 6.3. *Sei $\eta : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß und $A \subset X$:*

a) *Ist $\eta(A) = 0$ oder $\eta\left(A^C\right) = 0$*
$\implies$ *A ist η-messbar.*
b) *A ist η-messbar*
$\iff$ $\forall\, Q \subset X, \eta(Q) < \infty : \eta(Q) \geq \eta(Q \cap A) + \eta\left(Q \cap A^C\right)$

c) *A ist η-messbar*
$\iff \forall\, Q \subset X : \eta\,(Q) = \eta\,(Q \cap A) + \eta\left(Q \cap A^C\right)$ *(2)*

Beweis.
a) Sei $\eta(A) = 0$

$$\begin{aligned} &\implies \forall\, Q \subset X : 0 \leq \eta(Q \cap A) \leq \eta(A) = 0 \\ &\implies \eta\,(Q \cap A) + \eta\left(Q \cap A^C\right) \leq \eta\,(Q) \end{aligned}$$

Man gehe für den Fall $\eta\left(A^C\right) = 0$ analog vor.
b) Klar, da falls $\eta\,(k) = +\infty$ (1) wahr ist.
c) Aus der σ-Subadditivität folgt die endliche Subadditivität:

$$\eta\,(Q) = \eta\left((Q \cap A) \cup \left(Q \cap A^C\right)\right) \leq \eta\,(Q \cap A) + \eta\left(Q \cap A^C\right)$$

□

Satz 6.4 (Carathéodory 1914)**.** *Ist* $\eta : \mathcal{P}\,(X) \to [0, \infty]$ *ein äußeres Maß, so ist*

$$\boxed{\mathcal{A}_\eta := \{\, A \subset X : A \text{ ist } \eta\text{-messbar}\}}$$

eine σ*-Algebra und* $\eta : \mathcal{A}_\eta \to [0, \infty]$ *ein Maß!*

Beweis.
Schritt 1: $\mathcal{A}_\eta$ ist Algebra.
Denn: $X \in \mathcal{A}_\eta$, da $X^C = \emptyset, \eta\left(X^C\right) = \eta\,(\emptyset) = 0$
$\overset{\text{Lemma 3 a)}}{\implies} X \in \mathcal{A}_\eta$ Und ist $A \in \mathcal{A}_\eta$, so ist auch $A^C \in \mathcal{A}_\eta$ (Symmetrie).
Seien also $A, B \in \mathcal{A}_\eta, Q \subset X$ beliebig.

$$\begin{aligned} \implies \eta\,(Q) \quad &\geq \eta\,(Q \cap A) + \eta\left(Q \cap A^C\right) \\ &\geq \eta\,(Q \cap A) + \eta\left(Q \cap A^C \cap B\right) + \eta\left(Q \cap A^C \cap B^C\right) \\ &= \eta\,(Q \cap A) + \eta\left(Q \cap A^C \cap B\right) + \eta\left(Q \cap (A \cup B)^C\right) \\ &\geq \eta\left((Q \cap A) \cup \left(Q \cap A^C \cap B\right)\right) + \eta\left(Q \cap (A \cup B)^C\right) \\ &= \eta\,(Q \cap (A \cup B)) + \eta\left(Q \cap (A \cup B)^C\right) \end{aligned}$$

$\implies A \cup B$ ist η-messbar!
$\implies \mathcal{A}_\eta$ ist Algebra!

Schritt 2: Sind $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_\eta$ disjunkt, so ist $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_\eta$ und

$$\eta(A) = \eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n) \tag{3}$$

Denn: Sei $M, N \in \mathcal{A}_\eta$ disjunkt. Ersetze Q in (2) durch $Q \cap (M \cup N)$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \eta(Q \cap (M \cup N)) = \eta(Q \cap M) + \eta(Q \cap N)\\
&\Longrightarrow \text{ Auf } \mathcal{A}_\eta \text{ ist } \eta \text{ endlich additiv!}\\
&\overset{Induktion}{\Longrightarrow} \eta\left(Q \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{n} \eta(Q \cap A_j) \qquad (4)\\
&\underset{(1)}{\Longrightarrow} \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}_\eta
\end{aligned}$$

Aus (4) folgt dann für alle $Q \subset X, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\eta(Q) &\geq \eta\left(Q \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) + \eta\left(Q \cap (\bigcup_{j=1}^{n} A_j)^C\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n} \eta(Q \cap A_j) + \eta\left(Q \cap (\bigcup_{j=1}^{n} A_j)^C\right)\\
&\geq \sum_{j=1}^{n} \eta(Q \cap A_j) + \eta\left(Q \cap A^C\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt dabei wegen $(\bigcup_{j=1}^{n} A_j)^C = \bigcap_{j=1}^{n} A_j^C \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j^C = A^C$
Daraus folgt mit monotoner Konvergenz

$$\begin{aligned}
\eta(Q) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \eta(Q \cap A_j) + \eta\left(Q \cap A^C\right)\\
&\geq \eta\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (Q \cap A_j)\right) + \eta\left(Q \cap A^C\right)\\
&= \eta(Q \cap A) + \eta\left(Q \cap A^C\right)\\
&\geq \eta(Q)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \eta(Q) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta(Q \cap A_j) + \eta\left(Q \cap A_j^C\right) \forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_\eta \text{ disjunkt, wobei } A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

$$\Longrightarrow A \subset \mathcal{A}_\eta \text{ und } (Q = A)\eta\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta(A_j), \text{ das heißt } \eta \text{ ist Maß auf } \mathcal{A}_\eta!$$

□

Das wollen wir nun auf ein Prämaß $\eta : \mathcal{H} \to [0,\infty]$ auf einen Halbring $\mathcal{H}$ anwenden.

Satz 6.5 (Fortsetzungssatz)**.** *Sei $\mu : \mathcal{H} \to [0,\infty]$ ein Inhalt auf einen Halbring $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ und für $A \subset X$:*

$$\boxed{\eta(A) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n) : A_n \in \mathcal{H}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \ (\inf(\emptyset) := \infty)} \tag{5}$$

Dann gilt

a) $\eta : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ist äußeres Maß und alle Mengen auf $\mathcal{H}$ sind η-messbar!

b) Ist μ Prämaß, so gilt $\eta\big|_{\mathcal{H}} = \mu$ und somit ist $\eta\big|_{\mathcal{A}_\eta}$ eine Fortsetzung von η zu einem Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}_\eta$, die $\mathcal{H}$ und somit auch $\sigma(\mathcal{H})$ enthält.

c) Ist μ kein Prämaß, so gibt es $A \in \mathcal{H}$ mit $\eta(A) < \mu(A)$, was schlecht ist!

Bemerkung. *Wir können auch gleich mit der Fortsetzung ν von μ auf dem Ring $R = \mathcal{R}(\mathcal{H})$ arbeiten (Satz 5.9).*

$$\Longrightarrow \eta(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j) : B_j \in R, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right\} \tag{6}$$

ν: Eindeutige Fortsetzung von μ auf R. Da R ein Ring ist, gilt auch

$$\eta(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) : B_n \in R \text{ disjunkt}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right\} \tag{7}$$

Da jeder $B_n \in R$ als endliche Vereinigung von disjunkten Mengen in $\mathcal{H}$ dargestellt werden kann

$$\Longrightarrow \eta(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) : C_n \in \mathcal{H} \text{ disjunkt}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right\}$$

Bemerkung (Zwiebelschalenprinzip)**.** *Ist $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, so bekommt man eine paarwei-*

se disjunkte Vereinigung, die Obermenge von A ist, mit

$$\begin{aligned}\tilde{B}_1 &= B_1\\ \tilde{B}_2 &= B_2 \setminus B_1\\ &\vdots\\ \tilde{B}_n &= B_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} B_j\right)\end{aligned}$$

Beweis.

a) Nur σ-Subadditivität:
Seien $A_n \subset X, n \in \mathbb{N}$. Ist $\eta(A_k) = +\infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so ist $\eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq +\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n)$.
$\Longrightarrow$ Sei $\eta(A_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(B_{n_j})_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$, sodass $A_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{n_j}$ und $\eta(A_n) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(B_{n_j}\right) - \epsilon 2^{-n}$. Also ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \eta\left(B_{n_j}\right) - \epsilon \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}}_{=1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \eta\left(B_{n_j}\right) - \epsilon$$

Überdeckung $(B_{n_j})_{(n,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{n_j}$
$\Longrightarrow \eta(A) = \eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{n_j}\right)$
$\eta(A) = \eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{n_j}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \eta\left(B_{n_j}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\eta(A) + \epsilon 2^{-n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n) + \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$. Daraus folgt die σ-Subadditivität $\eta(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n)$ weshalb η ein äußeres Maß ist! 08.11.2019
<u>Zu $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}_\eta$:</u>
Sei $A \in \mathcal{H}, Q \subset X$, $\eta(Q) < \infty$ und $(B_n)_n \subset \mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{H})$ mit $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Sei ν Fortsetzung von μ auf $\mathcal{R}$. Da μ Inhalt auf $\mathcal{H}$ ist, ist ν Inhalt auf $\mathcal{R}$. Hatten (6):

$$\eta(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n), B_n \in \mathcal{R}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\}$$

Betrachte also

$$\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A)}_{\supset Q \setminus A}$$

$$\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A)}_{\supset Q \cap A}$$

Impliziert nach Definition von $\eta(\mathcal{Q})$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\nu(B_n \setminus A) + \nu(B_n \cap A)\right) \qquad \nu \text{ Inhalt} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n \setminus A) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(B_n \cap A) \\
&\geq \nu(Q \cap A) + \nu(Q \setminus A) \\
&= \nu(Q \setminus A)\, \nu\left(Q \cap A^C\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\implies \nu(Q) \leq \nu(Q \cap A) + \nu\left(Q \cap A^C\right) \qquad \forall\, Q \subset X, \eta(Q) < \infty \\
&\implies \text{A ist } \eta\text{-messbar}, A \subset \mathcal{A}_\eta \\
&\implies \boxed{\mathcal{H} \subset \mathcal{A}_\eta}
\end{aligned}$$

b) Zu zeigen ist μ <u>Prämaß</u> $\implies$ $\eta\big|_{\mathcal{H}} = \mu$, wobei η das äußere Maß zu μ (auch geschrieben als μ^*) ist. Denn
1.Behauptung: $\eta\big|_{\mathcal{H}} \leq \mu$, d.h. $\eta(A) \leq \mu(A)\, \forall A \in \mathcal{H}$ gilt nach Definition von η.
Dies folgt sofort, da $A_1 = A, A_n = \emptyset\ (n \geq 2)$ Überdeckung von $A \in \mathcal{H}$ ist.
2.Behauptung: $\eta\big|_{\mathcal{H}} \geq \mu$ (falls μ ein Prämaß ist)
Ist μ ein Prämaß auf $\mathcal{H}$ $\iff$ Endliche Fortsetzung ν von μ auf $R = R(\mathcal{H})$ ein Prämaß (Satz 5.9)
Ist also $(A_n)_n \subset \mathcal{R}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A \in \mathcal{R}$, so ist wegen der σ-Subadditivität in Prämaßen $\nu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$ und somit ist $\nu(A) \leq \eta(A)$ nach Definition von η. Daraus folgt, dass $\eta\big|_{\mathcal{H}} \geq \mu$ und somit gilt die Gleichheit $\eta\big|_{\mathcal{H}} = \mu$.

c) Ist μ <u>kein</u> Prämaß, so geht die Stetigkeit von unten schief (Satz 4.4 für Prämaße).

$$\begin{aligned}
&\implies \exists (A_n)_n \subset \mathcal{H} \text{ disjunkt, mit } A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H} \text{ und } \mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \\
&\overset{\text{Monotonie}}{\implies} \mu(A) \geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\, \forall n \in \mathbb{N} \\
&\implies \mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \\
&\implies \mu(A) > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \eta(A) \implies \mu(A) > \eta(A)
\end{aligned}$$

$\implies \exists (A_n)_n \subset \mathcal{H}$ disjunkt, mit $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H}$ und $\mu(A) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
$\overset{\text{Monotonie}}{\implies} \mu(A) \geq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\, \forall n \in \mathbb{N}$
$\implies \mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
$\implies \mu(A) > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \eta(A) \implies \mu(A) > \eta(A)$

$\square$ 08.11.2019

Bemerkung.

1. *Oft auch* $\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \subset \mathcal{H}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\}$ *(z.B. bei Bauer)*
2. *Weil* $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ *abzählbar ist können wir* $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{r_n\}$ *schreiben. Wir setzen* $\forall\, n \in \mathbb{N}\ I_n = [r_n, r_n + \frac{\delta}{2^n})$. *Dann ist* $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\ \ (n \in \mathbb{N})$.
   $\implies \lambda^1(I_n) = \frac{\delta}{2^n}\ \ (n \in \mathbb{N})$
   $\implies \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^1(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^n} = \delta$
   $\implies \lambda^*$ *ist äußeres Maß zu* λ^1 *und*

$$\lambda^*(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^1(I_n) = \delta \qquad \forall\, \delta > 0$$
$$\implies \boxed{\lambda^*(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0}$$

a) $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}_\eta \implies \sigma(\mathcal{H}) \subset \sigma(\mathcal{A}_\eta) = \mathcal{A}_\eta$
Existenz von Maßen durch Carathéory gelöst!
Frage: Eindeutigkeit?

7 Dynkin Systeme (Dynkin 1969)

Definition 7.1. *Ein System* $\mathcal{D}$ *von Teilmengen eine Menge* X $(\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X))$ *heißt Dynkin System falls*

(1) $X \in \mathcal{D}$
(2) $A \in \mathcal{D} \implies A^C \in \mathcal{D}$
(3) $\forall\, (A_n)_n \subset \mathcal{D}$ *disjunkt* $\implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D} \qquad (A_n \in \mathcal{D})$

Bemerkung. *Jedes Dynkin-System* $\mathcal{D}$ *mit Grundmenge* X *enthält somit auch* $\emptyset = X^C$. *Sind also* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{D}$ *paarweise disjunkt, so ist* $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{D}$*!*

Beispiele.

1. *Jede* σ*-Algebra ist ein Dynkin System.*
2. *Sei* $X = \{1, \ldots, 2n\}$ *mit* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $\mathcal{D} = \{A \subset \{1, \ldots, 2n\} : \#A \text{ ist gerade}\}$ *ein Dynkin System aber für* $n > 1$ *keine* σ*-Algebra.*

Lemma 7.2. *Sei* $\mathcal{D}$ *ein Dynkin System. Dann ist* $\mathcal{D}$ *stabil unter Bildung eigentlicher Komplemente. Sind also* $D, E \in \mathcal{D}$ *und* $D \subset E$, *so ist* $E \setminus D \in \mathcal{D}$.

Beweis. $D, E \in \mathcal{D}, D \subset E \implies E^C \cap D = \emptyset$. Also ist $D \cup E^C \in \mathcal{D}$ und somit auch $(D \cup E^C)^C \in \mathcal{D}$. Letzteres ist genau $D^C \cap E = E \cap D^C = E \setminus D$. □

Bemerkung. *Dynkin Systeme können also auch durch (1), (2') und (3) definiert werden.*

Satz 7.3. *Ein Dynkin System ist eine σ-Algebra genau dann wenn mit je zwei Mengen aus $\mathcal{D}$ auch deren Durchschnitt H in $\mathcal{D}$ liegt.* 11.11.2019

<u>Hatten:</u> Dynkin System:

a) $X \in \mathcal{D}$
b) $D \in \mathcal{D} \implies D^C \in \mathcal{D}$
c) $(D_n)_n \subset \mathcal{D}$ disjunkt $\implies \bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$

Beweis zu Satz 3.
" $\implies$ " : Klar.
" $\impliedby$ " : Sei $\mathcal{D}$ Dynkin System mit $D_1, D_2 \in \mathcal{D} \implies D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}$.
Also ist $X \in \mathcal{D}$ und ist $D \in \mathcal{D}$, so ist $D^C \in \mathcal{D}$. Es gilt also für $A, B \in \mathcal{D}$ $A \cup B = A \setminus B \cup B \in \mathcal{D}$ und $A \setminus B = A \setminus \underbrace{(A \cap B)}_{\in \mathcal{D} \text{ nach Vor.}} \in \mathcal{D}$ nach Lemma 2!

In der Vorlesung standen die Implikationen vertauscht an der Tafel.

$\overset{\text{Induktion}}{\implies} A_1, \dots A_n \in \mathcal{D} \implies \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{D}$!
Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$. Man setze

$$A'_0 = \emptyset, A'_1 = A_1, A'_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, A'_n = A_n \setminus \underbrace{(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})}_{\in \mathcal{D}} \in \mathcal{D}$$

nach Lemma 2. Also sind $(A'_n)_n$ disjunkt und

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n \in \mathcal{D}$$

Damit ist $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra! □

Definition 7.4. *Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann definieren wir*

$$\delta(\mathcal{E}) := \text{ kleinstes Dynkin System, welches } \mathcal{E} \text{ enthält}$$
$$= \bigcap_{\substack{\mathcal{D} \text{Dynkin} \\ \text{System} \\ \mathcal{E} \subset \mathcal{D}}} \mathcal{D}$$

Nach Definition folgt nun $\boxed{\delta(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})}$*!*
Wir nennen $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil (Durchschnittsstabil) falls $E_1, E_2 \in \mathcal{E} \implies E_1 \cap E_2 \in \mathcal{E}$. Analoges gilt für $\cup$-stabil.

Bemerkung (Äquivalente Formulierung von Satz 3)**.** *Ist $\delta(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil, so ist $\delta(\mathcal{E})$ sogar eine σ-Algebra!*

Satz 7.5. *Ist $\mathcal{E}$ $\cap$-stabiler Erzeuger, so ist $\delta(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra! D. h.* $\boxed{\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})}$.

Beweis. Haben immer $\delta(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$. Wir müssen also nur zeigen, dass $\delta(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist. Nach Satz 3 bleibt zu zeigen, dass $\delta(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil ist.

Methode der „guten Mengen“:
Definiere für $D \in \delta(\mathcal{E})$

$$\boxed{\mathcal{D}_D := \{\, Q \in \mathcal{P}(X) : Q \cap D \in \delta(\mathcal{E}) \,\}} \tag{4}$$

Behauptung. *$\mathcal{D}_D$ ist ein Dynkin System!*

Nehme $E \in \mathcal{E} \implies \mathcal{D}_E$. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\ \cap\text{-stabil} &\implies E' \in \mathcal{E} : E' \cap E \in \mathcal{E} \subset \delta(\mathcal{E}) \\
&\implies \mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E && \forall E \in \mathcal{E} \\
&\implies \delta(\mathcal{E}) \subset \delta(\mathcal{D}_E) \underset{\text{Beh.}}{=} \mathcal{D}_E && \forall E \in \mathcal{E}
\end{aligned}$$

D.h.: $\forall E \in \mathcal{E}, D \in \delta(\mathcal{E})$ ist $D \cap E \in \delta(\mathcal{E})$.

$$\begin{aligned}
&\implies \mathcal{E} \subset \mathcal{D}_D \text{ für jedes } D \in \delta(\mathcal{E}) \\
&\implies \delta(\mathcal{E}) \subset \delta(\mathcal{D}_D) = \mathcal{D}_D \ \ \forall D \in \delta(\mathcal{E}) \text{, d.h. } \delta(\mathcal{E}) \text{ ist } \cap\text{-stabil!} \\
&\overset{\text{Satz}}{\implies} \delta(\mathcal{E}) \text{ ist } \sigma\text{-Algebra!}
\end{aligned}$$

$\square$

Beweis der Behauptung.

1) $X \in \mathcal{D}_D$ ✓
2) Sei $\mathcal{Q} \in \mathcal{D}_D$. Dann gilt:

$$\mathcal{Q}^C \cap D = \left(\mathcal{Q}^C \cup D^C\right) \cap D = (\mathcal{Q} \cap D)^C \cap D = \Big(\underbrace{(\mathcal{Q} \cap D)}_{\in\delta(\mathcal{E})} \cup \underbrace{D^C}_{\in\delta(\mathcal{E})}\Big)^C \in \delta(\mathcal{E}) \ ✓$$

3) Seien $(\mathcal{Q}_n)_n \subset \mathcal{D}_D$ disjunkt. Es gilt dann $\mathcal{Q}_n \cap D \in \delta(\mathcal{E})$ und

$$\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} \mathcal{Q}_n\right) \cap D = \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} (\mathcal{Q}_n \cap D) \in \delta(\mathcal{E}) \ ✓$$

$\square$

8 Eindeutigkeit von Maßen

Satz 8.1. *Sei $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$) in einer Menge X in welchem es eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ gibt mit*

$$\boxed{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X}$$

Dann sind je zwei Maße $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ mit

a) $\mu_1(E) = \mu_2(E)\ \forall E \in \mathcal{E}$

b) $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$

gleich, d.h. $\mu_1 = \mu_2$!

Beweis. Sei $\mathcal{E}_e$ das System aller Mengen $E \subset \mathcal{E}$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$.
Gegeben $E \in \mathcal{E}_e$ definiere $\mathcal{D}_E := \{\, D \in \sigma(\mathcal{E}) : \mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D)\,\}$.
Beachte: $\mathcal{D}_E$ ist ein Dynkin System!
Denn $X \in \mathcal{D}_E$ klar nach a) und ist $D \in \mathcal{D}_E$, so ist nach Satz 4.4 auch

$$\begin{aligned}\mu_1\left(E \cap D^C\right) = \mu_1(E \setminus (E\cap D)) &\underset{\text{Satz 4.4}}{=} \mu_1(E) - \mu_1(E \cap D)\\ &= \mu_2(E) - \mu_2(E\cap D) = \mu_2(E \setminus (E \cap D)) = \mu_2\left(E \cap D^C\right)\end{aligned}$$

Also ist $D^C \in \mathcal{D}_E$. Sind $(D_n)_n \subset \mathcal{D}_E$ disjunkt, so ist

$$\mu_1\left(E \cap \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} D_n\right) = \mu_1\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} (E\cap D_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(E\cap D_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(E \cap D_n) = \mu_2\left(E \cap \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} D_n\right).$$

Da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil ist, folgt $\boxed{\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E}$ $\forall E \subset \mathcal{E}_e$, denn $\forall D \in \mathcal{E} : D\cap E \in \mathcal{E} \implies \mu_1(D\cap E) = \mu_2(D \cap E)$. Also ist $\sigma(\mathcal{E}) \underset{\text{Satz 7.5}}{=} \delta(\mathcal{E}) \subset \delta(\mathcal{D}_E) = \mathcal{D}_E$. Somit ist

$$\mu_1(E \cap A) = \mu_2(E\cap A)\ \forall A \in \mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}) \quad \forall E \in \mathcal{E}_e \tag{1}$$

$$\implies \boxed{\mu_1(E_n \cap A) = \mu_2(E_n \cap A)} \quad \forall A \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Setze $F_1 := E_1,\ F_2 = E_2 \setminus E_1, \dots, F_n = E_n \setminus (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1})\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Da $F_n \cap A \in \mathcal{A}$ folgt mit (2) $\mu_1(F_n \cap A) = \mu_1(E_n \cap F_n \cap A) = \mu_2(E_n \cap F_n \cap A) = \mu_2(F_n \cap A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{A}$. Da $A = X \cap A$ und $X = \bigcup_n E_n = \bigcup_n F_n$ erhalten wir $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(F_n \cap A)$.

$$\implies \mu_1(A) = \mu_1\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} (F_n \cap A)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(F_n \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(F_n\cap A) = \mu_2(A)$$

Also ist $\mu_1 = \mu_2$. □

Bemerkung. *Der Satz ist im Allgmeinen **falsch** ohne die Bedingung b)!*

Definition 8.2. *Ein Inhalt μ auf einem Halbring $\mathcal{H}$ in X heißt σ-endlich, wenn es eine Folge $(E_n)_n \subset \mathcal{H}$ mit $\mu(E_n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$ gilt. Analog sei dies für Maße und Prämaße definiert.*

Korollar 8.3. *<u>Jedes</u> σ-endliche Prämaß $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ auf einem Halbring $\mathcal{H}$ in X kann auf genau eine Weise zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{H})$ fortgesetzt werden! Dies trifft insbesondere auf das Lebesgue Maß zu!*

Beweis. $\mathcal{H}$ ist $\cap$-stabil. Man wende dann Carathéodory und Satz 1 an! □

Satz 8.4 (Vergleichssatz)**.** *Sei $\mathcal{H}$ ein Halbring in X und $\mu, \nu : \sigma(\mathcal{H}) \to [0, \infty]$ Maße mit*

a) $\mu(A) \le \nu(A) \ \forall A \in \mathcal{H}$
b) ν ist σ-endlich

Dann gilt $\mu(B) \le \nu(B) \ \forall B \in \sigma(\mathcal{H})$.

Beweis. Sei μ^*, ν^* das äußere Maß zu $\mu\big|_{\mathcal{H}}$, bzw. $\nu\big|_{\mathcal{H}}$.

$$\underset{\text{a)}}{\Longrightarrow} \mu^*(C) \le \nu^*(C) \ \forall C \subset X$$
$$\Longrightarrow \text{Fortsetzungssatz und Korollar 3 } \mu^*\big|_{\sigma(\mathcal{H})} = \mu, \nu^*\big|_{\sigma(\mathcal{H})} = \nu$$
$$\Longrightarrow \mu \le \nu \text{ auf } \sigma(\mathcal{H})!$$

□

9 Translationsinvarianz des Lebesgue Borelschen Maß

Wir erinnern uns an die halboffenen Quader im $\mathbb{R}^d$: $J^d = \{ \underbrace{[a,b)}_{=[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_d,b_d)} : a_j, b_j \in \mathbb{R} \}$

Translation in $\mathbb{R}^d$ (stetig):

$$a \in \mathbb{R}^d, T_a(x) := x + a$$
$$A \subset \mathbb{R}^d, T_x(A) = x + A := \{ T_x(a) : a \in A \}$$

Wir möchten nun, dass folgendes gilt:

$$\forall B \in \mathcal{B}^d = \sigma\left(J^d\right) = \sigma(\mathcal{O}) : \lambda^d(B) = \lambda^d \underbrace{(x + B)}_{B \text{ verschoben im Vektor } x \in \mathbb{R}^d}$$

Dabei ist $\mathcal{O}$ das System der offenen Mengen in $\mathbb{R}^d$. Ist $J \in J^d, J = [a, b)$, so ist $x + J = [a + x, b + x)$ und folglich $\lambda^d (J) = \lambda^d (x + J)$.

1. Frage: Ist $x + B \in \mathcal{B}^d$, falls $x \in \mathbb{R}^d$ fest und $B \in \mathcal{B}^d$? 13.11.2019

<u>Erinnerung</u>: Nach Existenz und Eindeutigkeitssatz nennen wir $\lambda^d : \mathcal{B}^d \to [0, \infty]$ das durch Lebesgue'sche Prämaß auf J^d eindeutig bestimmte Maß Lebesgue-Borel Maß.

Lemma 9.1. *$\forall A \in \mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{O})$, $\mathcal{O}$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}^d$, und $\forall x \in \mathbb{R}^d$ ist $T_x (A) = x + A = \{ x + a : a \in A \} \in \mathcal{B}^d$.*

Beweis. Methode der guten Mengen:

$$x \in \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{A}_x := \{ A \in \mathcal{B}^d : x + A \in \mathcal{B}^d \}$$
$$\implies \mathcal{A}_x \text{ ist } \sigma\text{-Algebra!}$$

Denn:

a) $\mathbb{R}^d \in \mathcal{A}_x$
b) Sei $A \in \mathcal{A}_x$, dann folgt $x + A \in \mathcal{B}^d$. Also:

$$\begin{aligned} &\implies x + A^C = \Big(\underbrace{x + A}_{\in \mathcal{B}^d} \Big)^C \in \mathcal{B}^d \\ &\implies A^C \in \mathcal{A}_x \end{aligned}$$

c) Sei $(A_n)_n \subset \mathcal{A}_x$, $A_n \in \mathcal{B}^d$ und $x + A_n \in \mathcal{B}^d$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
$A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}^d, \quad x + A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (x + A_n) \in \mathcal{B}^d \implies x + A \in \mathcal{A}_x$

Ferner ist $\boxed{\mathcal{O} \subset \mathcal{A}_x}$. ☺

$$\begin{aligned} &\implies \mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{O}) \subset \sigma(\mathcal{A}_x) = \mathcal{A}_x \subset \mathcal{B}^d \\ &\implies \mathcal{B}^d = \mathcal{A}_x \end{aligned}$$

$\mathcal{A}_x \subset \mathcal{B}^d$ gilt dabei nach Definition von $\mathcal{A}_x$. □

Satz 9.2. *Das Lebesgue-Maß $\lambda^d : \mathcal{B}^d \to [0, \infty]$ ist translationsinvariant, d.h.*

$$\lambda^d (x + A) = \lambda^d (A) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{B}^d$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^d$ und $\mu(A) := \lambda^d (x + A)\ \forall A \in \mathcal{B}^d$.
<u>Nachrechnen liefert</u>: $\mu : \mathcal{B}^d \to [0, \infty]$ ist ein Maß.

$$\lambda^d \text{ ist } \sigma\text{-endlich: z.B.: } I_n = [-n,n) \times \cdots \times [-n,n)$$

$$\Longrightarrow \mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \text{ und } \lambda^d(I_n) = (2n)^d < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Genauso: } \mu(I_n) = \lambda^d(x + I_n) = \lambda^d([x - \underline{n}, x + \underline{n}]) = (2n)^d$$

$$\underline{n} = (n, n, \dots, n) \in \mathbb{R}^d \text{ ist auch } \sigma\text{-endlich}$$

$$\underline{\text{und}}\ J \in J^d \quad J = [a,b) \quad a_j \le b_j \in \mathbb{R} \quad j = 1, \dots, d$$

$$\Longrightarrow \mu(J) = \lambda^d(x + J) = \lambda^d([a + x, b + x])$$

$$= \prod_{l=1}^{d} (b_l + x_l - (a_l + x_l)) = \prod_{l=1}^{d} (b_l - a_l)$$

$$= \lambda^d([a,b))$$

$$\overset{\text{Eindeutigkeitssatz}}{\Longrightarrow} \mu = \lambda^d \text{ auf } \mathcal{B}^d = \sigma\left(J^d\right)$$

□

Beispiel. *Sei $\alpha \geq 0$. Dann ist $\mu := \alpha\lambda^d, \mu(A) := \alpha\lambda^d(A)$ für $A \in \mathcal{B}^d$ auch ein translationsinvariantes Maß auf $\mathcal{B}^d$. Betrachte beispielsweise den Einheitswürfel $W := [\underline{0}, \underline{1})$ $\left(\underline{0} = (0, \dots, 0),\ \underline{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d\right)$. Dann gilt:*

$$\Longrightarrow \lambda^d(W) = 1 \Longrightarrow \mu(W) = \alpha\lambda^d(W) = \alpha$$

Satz 9.3 (WICHTIG). *Jedes Maß μ auf $\mathcal{B}^d$, welches translationsinvariant ist, also $\mu(A) = \mu(x + A)\ \forall x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{B}^d$ $\underline{\text{und}}$ $\alpha := \mu(W) < \infty$ gilt, ist gegeben durch*

$$\boxed{\mu = \alpha\lambda^d}$$

Beweis. Sei $a_n = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^d \quad n \in \mathbb{N}$ und $W_n := [0, a_n) \in J^d$ der Würfel mit $\mu(W_n) = \frac{\alpha}{n^d}$.

Letzteres gilt wegen:

$$G_n := \{\, (\varrho_1, \ldots, \varrho_d) : \varrho_j = \frac{\nu_j}{n}, \nu_j \in \{\, 0, 1, \ldots, n-1 \,\}\,\}$$
$$\implies [r_1, r_1 + a) \cap [r_2, r_2 + a) = \emptyset$$
$$r_1, r_2 \in G_n \quad r_1 \neq r_2$$
$$[r, r + a_n) = r + [\underline{0}, a_n) = r + W_n$$
$$\text{und } [\underline{0}, \underline{1}) = \dot{\bigcup_{r \in G_n}} [r, r + a_n) = \dot{\bigcup_{r \in G_n}} (r + W_n)$$
$$\implies \alpha := \mu(W) = \mu\left(\dot{\bigcup_{r \in G_n}} (r + W_n)\right) = \sum_{r \in G_n} \mu(r + W_n) = \sum_{r \in G_n} \mu(W_n) \;\; (\mu \text{ translationsinvariant})$$
$$\implies \alpha(W) = \sum_{r \in G_n} \mu(W_n) = \# G_n \cdot \mu(W_n) = n^d \cdot \mu(W_n)$$

Sei $[a, b) \in J^d_{\mathbb{Q}} \quad a, b \in \mathbb{Q}^d$.

$$\implies \mu([a, b)) = \mu(a + [\underline{0}, b - a)) = \mu([\underline{0}, b - a))$$
$$\lambda^d([a, b)) = \lambda^d([\underline{0}, b - a))$$
$$\implies \text{O.B.d.A. } a = 0, \; b \in \mathbb{Q}^d$$
$$\implies \exists\, n, m_j \in \mathbb{N} \quad n = 1, \ldots, d : b = \left(\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \ldots, \frac{m_d}{n}\right)$$
$$\implies [\underline{0}, b) = \dot{\bigcup_{r \in \mathbb{Q}}} [r, r + a_n)$$

$$\text{mit } G := \{\, \left(\frac{\nu_1}{n}, \frac{\nu_2}{n}, \ldots, \frac{\nu_d}{n}\right) : \nu_j \in \{\, 0, 1, \ldots, m_j - 1 \,\} \quad j = 1, \ldots, d \,\}$$

wie oben folgt aus Translationsinvarianz von μ

$$\mu([\underline{0}, b)) = \sum_{r \in G} \mu\left(\underbrace{[r, r + a_n)}_{= r + W_n}\right) = \sum_{r \in G} \mu(W_n) = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_d \cdot \frac{\alpha}{n^d}$$
$$= \underbrace{\frac{m_1}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{m_d}{n}}_{= \lambda^d([\underline{0}, b))} \cdot \alpha = \alpha \cdot \lambda^d([\underline{0}, b))$$
$$\overset{\text{Translationsinv.}}{\implies} \boxed{\mu([a, b)) = \alpha \cdot \lambda^d([a, b)])}$$

außerdem ist (da $0 \leq \alpha < \infty$) $\mu \sigma$-endlich!

$$\mu([-1, n)) = (2n)^d \alpha \overset{\text{Eindeutigkeitssatz}}{\implies} \mu = \alpha \lambda^d \text{ auf } \mathcal{B}^d!$$

$\square$

Korollar 9.4. *Das Lebesgue-Borel Maß* λ^d *ist das einzige translationsinvariante Maß auf* $\mathcal{B}^d$ *mit* $\lambda^d(W) = 1$.

Erinnerung: Euklidische Metrik
$d(x,y) := \|x-y\| = \langle x-y, x-y\rangle^{\frac{1}{2}}$
$\langle x,y\rangle := \sum_{j=1}^{d} x_j y_j$ euklidisches Skalarprodukt

Jede Abbildung $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ die den euklidischen Abstand invariant lässt heißt <u>Bewegung</u> (von $\mathbb{R}^d$). Das heißt $D(T(x), T(y)) = d(x,y)\ \forall\, x,y \in \mathbb{R}^d$. Wir schreiben $T \in \text{Bew}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass jedes $T \in \text{Bew}\left(\mathbb{R}^d\right)$ sich als orhogonale lineare Abbildung mit nachgeschalteter Translation darstellen lässt.

Lemma 9.5. *Für jede Bewegung* $T \in Bew\left(\mathbb{R}^d\right)$ *und jedes* $A \in \mathcal{B}^d$ *ist*

$$\boxed{T^{-1}(A) \in \mathcal{B}^d}$$

Beweis. Sei $T \in \text{Bew}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Setze $\mathcal{A}_T := \left\{ A \in \mathcal{B}^d : T^{-1}(A) \in \mathcal{B}^d \right\}$. Nachrechnen und Operationstreue der Urbildfunktion ergibt, dass $\mathcal{A}_T$ eine σ-Algebra ist. Sei nun $U \in \mathcal{O}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow T^{-1}(U) \text{ ist auch offen } (T \text{ ist (Lipschitz)-stetig})\\
&\Longrightarrow \mathcal{O} \in \mathcal{A}_T\\
&\Longrightarrow \mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{O}) \subset \sigma(\mathcal{A}_T)\\
&\Longrightarrow \mathcal{A}_T = \mathcal{B}^d!
\end{aligned}$$

□

Satz 9.6. *Das Lebesgue-Borel Maß* λ^d *ist bewegungsinvariant, d.h.*

$$\lambda^d\left(T^{-1}(A)\right) = \lambda^d(A) \qquad \forall\, A \in \mathcal{B}^d, T \in Bew\left(\mathbb{R}^d\right)$$

Beweis.

Schritt 1: Sei $T \in \text{Bew}\left(\mathbb{R}^d\right)$ mit $T(\underline{0}) = \underline{0}$. Dann ist T eine orthogonale lineare Abbildung von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}^d$ ($\to$ Endomorphismus). Wir definieren $\mu(A) := \lambda^d\left(T^{-1}(A)\right), A \in \mathcal{B}^d$. Nachrechnen ergibt, dass μ ein Maß auf $\mathcal{B}^d$ ist.
Behauptung. *μ ist translationsinvariant.*
Sei $a \in \mathbb{R}^d, b := T^{-1}(a), T_a(x) := x + a$ (Translation).

$$\begin{aligned}
&(T \circ T_b(x)) = T(x+b) = T(x) + T(b) = T(x) + a = (T_a \circ T(x))\\
\Longrightarrow\ & T_a \circ T = T \circ T_b \qquad (*)\\
\Longrightarrow\ & T^{-1} \circ T_a^{-1} = (T_a \circ T)^{-1} = (T \circ T_b)^{-1} = T_b^{-1} \circ T^{-1}
\end{aligned}$$

Nehme $A \in \mathcal{B}^d$.

$$\begin{aligned}\mu(A-a) &= \mu\left(T_a^{-1}(A)\right) = \lambda^d\left(T^{-1}\left(T_a^{-1}(A)\right)\right) = \lambda^d\left(T^{-1}\circ T_a^{-1}(A)\right)\\ &= \lambda^d\left(T_b^{-1}\circ T^{-1}(A)\right) = \lambda^d\left(T^{-1}(A)-b\right) = \lambda^d\left(T^{-1}(A)\right)\\ &= \mu(A) \quad ☺\end{aligned}$$

Für $W = [\underline{0}, \underline{1})$ definieren wir $\alpha := \mu(W) = \lambda^d \underbrace{\left(T^{-1}(W)\right)}_{\text{beschränkte Menge}} < \infty$. Daraus folgt mit Satz 4 $\mu = \alpha \cdot \lambda^d$. Es bleibt zu zeigen, dass $\alpha = 1$!
$K := \{\, x \in \mathbb{R}^d : d(\underline{0}, x) \leq 1 \,\}$ kompakte Vollkugel im $\mathbb{R}^d$ mit Radius 1 um $\underline{0}$.
T sei eine orthogonale lineare Abbildung $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Dann ist $\boxed{T^{-1}(K) = K}$.
Satz 5 impliziert dann $\mu(K) = \alpha\lambda^d(K)$. Also ist $\lambda^d(K) = \lambda^d\left(T^{-1}(K)\right) = \mu(K) = \alpha\lambda^d(K)$. Daraus folgt $\alpha = 1$, denn $0 < \lambda^d(K) < \infty$!

$\lambda^d(K) < \infty :$ Es gilt $K \subset [-\underline{2}, \underline{2}) = \prod_{j=1}^d [-2, 2)$.

$\implies \lambda^d(K) \leq \lambda^d([-\underline{2}, \underline{2})) = 4^d < \infty$.

$0 < \lambda^d(K) :$ Definiere $t = \left(d^{-\frac{1}{2}}, \ldots, d^{-\frac{1}{2}}\right)$ und $J_t = [0, t) \in J^d$.

Nachrechnen ergibt $J_t \subset K$ und $\lambda^d(K) \geq \lambda^d(J_t) = d^{\frac{-d}{2}} > 0$. ☺

Schritt 2: Sei $T \in \operatorname{Bew}\left(\mathbb{R}^d\right)$ beliebig. Definiere $c := T^{-1}(\underline{0})$ und $S := T_{-c} \circ T$

$$\begin{aligned}&\implies S(\underline{0}) = 0\\ &\implies S \text{ wie in Schritt 1!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\implies \lambda^d(A) &= \lambda^d(T_{-c}(A))\\ &\overset{\text{Schritt 1}}{=} \lambda^d\left(S^{-1}(T_{-c}(A))\right)\\ &= \lambda^d\left(T^{-1}\circ T_{-c}^{-1}(T_{-c}(A))\right) \quad = \lambda^d\left(T^{-1}\circ \underbrace{T_{-c}^{-1}\circ T_{-c}}_{=\mathrm{id}}(A)\right)\\ &= \lambda^d\left(T^{-1}(A)\right) \qquad \forall\, A \in \mathcal{B}^d\end{aligned}$$

□ 18.11.2019

$T \in GL(d, R) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, linear und invertierbar $\lambda\left(T^{-1}(A)\right) = \alpha \cdot \lambda^d(A)$ - was ist α?

10 Messbare Abbildungen (& Bildmaße)

<u>Notation</u>: Sei X eine Menge und $\mathcal{A}$ σ-Algebra in X. Dann nennen wir $(X, \mathcal{A})$ Messraum. Ist $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß, so heißt $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Wir nennen μ ein

Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß), falls $\mu(X) = 1$. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt dann Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum). $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist ein σ-endlicher Maßraum, falls μ σ-endliches Maß ist. $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d\right)$ ist der d-dimensionale Borelsche Maßraum und $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \lambda^d\right)$ der d-dimensionale Lebesgue-Borelsche Maßraum.

Definition 10.1. *$(X, \mathcal{A}), (X', \mathcal{A}')$ Maßräume, $T : X \to X'$ Funktion. T heißt $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$ messbar, falls*

$$\boxed{T^{-1}\left(A'\right) \in \mathcal{A} \qquad \forall\, A' \in \mathcal{A}'} \tag{1}$$

Wir schreiben auch $T : (X, \mathcal{A}) \to (X', \mathcal{A}')$.

$$T \text{ messbar (messbare Abbildung)} \overset{(1)}{\iff} T^{-1}\left(\mathcal{A}'\right) \subset \mathcal{A}$$

Beispiele.

1. *Jede konstante Abbildung $T : X \to X'$ ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$ messbar.*
   Sei $c := T(x), x \in X$ beliebig.

$$\implies A' \in \mathcal{A}, T^{-1}\left(A'\right) = \begin{cases} X \text{ falls } c \in A' \\ \emptyset \text{ falls } c \notin A' \end{cases}$$

2. *Jede stetige Funktion $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ist $\mathcal{B}^d$-$\mathcal{B}^{d'}$ messbar. (Das gilt auch, wenn X, X' metrische oder topologische Räume sind.)*

$$\begin{aligned} &\text{Denn: } \mathcal{O}^{d'} \text{ offene Mengen in } \mathbb{R}^{d'} && \mathcal{B}^d = \sigma\left(\mathcal{O}^d\right) \\ &\mathcal{O}^d \text{ offene Mengen in } \mathbb{R}^d && \mathcal{B}^{d'} = \sigma\left(\mathcal{O}^{d'}\right) \end{aligned}$$

$$\implies \forall\, U \in \mathcal{O}^{d'} : T^{-1}(U) \in \mathcal{O}^d \implies T^{-1}(U) \in \mathcal{B}^d \quad \forall\, U \in \mathcal{O}^{d'}$$

   Dann wende Satz 2 an:

Satz 10.2. *Seien $(X, \mathcal{A}), (X', \mathcal{A}')$ Maßräume und $\mathcal{E}'$, Erzeuger von $\mathcal{A}'$. Dann ist*

$$T : X \to X' \ \mathcal{A}\text{-}\mathcal{A}' \text{ messbar} \iff \boxed{T^{-1}\left(E'\right) \in \mathcal{A}} \qquad \forall\, E' \in \mathcal{E}' \tag{2}$$

Beweis. Prinzip der guten Mengen: $\tilde{\mathcal{A}} := \{ G' \subset X' : T^{-1}(G') \in \mathcal{A} \}$. Nachrechnen: $\tilde{\mathcal{A}}$ ist σ-Algebra in X!

$$\implies \mathcal{A}' \subset \tilde{\mathcal{A}} \iff \mathcal{E}' \subset \tilde{\mathcal{A}}!$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' \subset \tilde{\mathcal{A}} &\iff T : X \to X' \text{ ist } \mathcal{A}\text{-}\mathcal{A}' \text{ messbar} \\ \mathcal{E}' \subset \tilde{\mathcal{A}} &\iff (2) \end{aligned}$$

□

Beispiel. *Alle Translationen und Bewegungen in $\mathbb{R}^d$ sind stetig!*

Satz 10.3. *Sei $T_1 : (X_1, \mathcal{A}_1) \to (X_2, \mathcal{A}_2)$ und $T_2 : (X_2, \mathcal{A}_2) \to (X_3, \mathcal{A}_3)$.*
Dann folgt $T_2 \circ T_1 : X_1 \to X_3 \quad \mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_3$ messbar.

Beweis. Beachte $\forall\, G \subset X_3$ ist $(T_2 \circ T_1)^{-1}(G) = (T_1^{-1} \circ T_2^{-1})(G) = T_1^{-1}\left(T_2^{-1}(G)\right)$. $\square$

Definition 10.4. *Sei eine Familie $((X_j, \mathcal{A}_j))_{j \in I}$, und $T_j : X \to X_j$ für alle $j \in I$ gegeben. Dann ist $\sigma(T_j : j \in I) := \sigma\left(\bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\right)$ die kleinste σ-Algebra auf X für die <u>alle</u> $T_j : X \to X_j$ messbar sind ($\forall\, j \in I$).*
Ist I endlich, also von der Form $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann schreiben wir auch $\sigma(T_1, \ldots, T_n)$.
Es sei $n = 1$: $\quad \sigma(T_1) : \mathcal{A}$ σ-Algebra auf X; $\mathcal{A}_1$ σ-Algebra auf $X_1 \quad T_1 : X \to X_1$
$\Longrightarrow T_1$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$ messbar $\Longleftrightarrow \sigma(T_1) \subset \mathcal{A}$

Satz 10.5. *Seien $(X_j, \mathcal{A}_j)$ Maßräume und $T_j : X \to X_j$ eine Abbildung für alle $j \in I$. Sei $S : X_0 \to X$ Abbildung eines Maßraumes $(X_0, \mathcal{A}_0)$. Dann ist*

$$S \text{ ist } \mathcal{A}_0\text{-}\sigma(T_j : j \in I)\text{-messbar} \iff T_j \circ S : X_0 \to X_j \text{ ist } \mathcal{A}_0\text{-}\mathcal{A}_j\text{-messbar } \forall\, j \in I$$

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Nach Definition von $\sigma(T_j : j \in I)$.
„$\Longleftarrow$“: $\mathcal{E} = \bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathcal{A}_j)$ ist Erzeuger von $\sigma(T_j : j \in I)$ nach Definition!
Nach Voraussetzung ist $(T_j \circ S)^{-1}(A_j) \in \mathcal{A}_0 \qquad \forall\, A_j \in \mathcal{A}_j,\ \forall\, j \in I$.

$$\begin{aligned} E \in \mathcal{E} &\implies \exists\, j \in I : A_j \in \mathcal{A}_j : E = T_j^{-1}(A_j) \\ &\implies S^{-1}(E) = S^{-1}\left(T_j^{-1}(A_j)\right) = (T_j \circ S)^{-1}(A_j) \in \mathcal{A}_0! \end{aligned}$$

Nach Satz 2 ist S also $\mathcal{A}_0$-$\sigma(T_j, j \in I)$-messbar.

$\square$

Satz 10.6. *Seien μ das Maß auf $\mathcal{A}$ und $T : (X, \mathcal{A}) \to (X', \mathcal{A}')$ (messbar).*
$\Longrightarrow \mu'(A') := \mu\left(T^{-1}(A')\right)$ $(A' \in \mathcal{A}')$ ist Maß auf $\mathcal{A}'$.
μ' heißt dann das Bildmaß von μ unter T.

Beweis. $(A'_n)_n \subset \mathcal{A}'$ disjunkt impliziert $\left(T^{-1}(A_n)\right)_n \subset \mathcal{A}$ disjunkt, woraus die σ-Additivität von μ folgt! $\square$

Definition 10.7. *μ' heißt Bild von μ unter T. Wir schreiben $T(\mu) = \mu' = \mu \circ T^{-1}$*
$T(\mu)(A') = \mu\left(T^{-1}(A')\right)$
μ' ist transitiv: $(T_2 \circ T_1)(\mu) = T_2(T_1(\mu))$ mit T_1, T_2 wie in Satz 3, μ Maß auf $\mathcal{A}$.

11 Messbare numerische Funktion

Auf $\mathbb{R}$ hatten wir $\mathcal{B}^1$ (σ-Alg. der Borelmengen).
2-Punkt Kompaktifikation:

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

In $\overline{\mathbb{R}}$ nennt man die Mengen $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ Borelsch (in $\mathbb{R}$), für die $\boxed{A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}^1}$ gilt. Das bedeutet alle Borelmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ sind von der Form

$$B, B \cup \{\infty\}, B \cup \{-\infty\}, B \cup \{-\infty, \infty\}$$

mit $B \in \mathcal{B}^1$. Das System $\overline{\mathcal{B}}^1$ dieser Borelmengen ist eine σ-Algebra in $\overline{\mathbb{R}}$ mit $\mathcal{B}^1$ als Spur in $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbb{R} \cap \overline{\mathcal{B}}^1 = \mathcal{B}^1} \tag{1}$$

Ist X eine Menge, so heißen Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ numerische Funktionen. Ist f eine $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}^1$-messbare Funktion, so nennen wir diese ($\mathcal{A}$-)messbare numerische Funktion. Reelle Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ sind spezielle numerische Funktionen und wegen (1) ist die $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}^1$-Messbarkeit solcher Funktionen dasselbe wie die $\mathcal{A}$-$\overline{\mathcal{B}}^1$-Messbarkeit!

Beispiele.

1) *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Maßraum und $A \subset X$. Dann ist die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A$ genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn $A \subset \mathcal{A}$ gilt. Denn: $B \subset \overline{\mathbb{R}} \implies \mathbb{1}_A^{-1}(B) \subset \{\emptyset, A, A^C, X\}$*
2) *Ist $Q \subset \mathbb{R}^d$, so ist $\left(Q, Q \cap \mathcal{B}^d\right)$ ein Maßraum. Die messbaren numerischen Funktionen auf Q werden Borel-messbare (Borelsche) Funktionen auf Q genannt. Jede stetige Funktion f auf Q ist borelsch. Nimmt man nun $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist $Q_\alpha := \{x \in Q : f(x) \geq \alpha\}$ eine Q abgeschlossene Menge. Also existiert eine abgeschlossene Menge F_α in $\mathbb{R}^d$ (z.B. der Abschluss $\overline{Q}_\alpha$ in $\mathbb{R}^d$) mit $Q_\alpha = Q \cap F_\alpha \in Q \cap \mathcal{B}^d$.*

Satz 11.1. *Eine numerische Funktion f auf X, wobei ein $(X, \mathcal{A})$ Maßraum ist, ist $\mathcal{A}$-messbar*

$$\iff \boxed{\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \qquad \alpha \in \mathbb{R}} \tag{3}$$

Beweis. Wir wenden Satz 9.2 an. Also genügt es zu zeigen, dass die Mengen $[\alpha, \infty]$ genau $\overline{\mathcal{B}}^1$ erzeugen. Wir nennen dieses System $\overline{\mathcal{E}}$.

$$\implies \overline{\mathcal{E}} \subset \overline{\mathcal{B}}^1 \implies \sigma\left(\overline{\mathcal{E}}\right) \subset \sigma\left(\overline{\mathcal{B}}^1\right)$$

Da $[\alpha,\beta)=[\alpha,\infty]\setminus[\beta,\infty]$, gilt

$$[\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\cap\underbrace{\sigma\left(\overline{\mathcal{E}}\right)}_{=\overline{\mathcal{A}}}=\mathbb{R}\cap\overline{\mathcal{A}}\qquad\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha\leq\beta$$

Solche Intervalle erzeugen $\mathcal{B}^1$, also $\boxed{\mathcal{B}^1\subset\mathbb{R}\cap\overline{\mathcal{A}}}$!
$\{+\infty\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}[n,\infty]\in\overline{\mathcal{A}}\quad\{-\infty\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}[-n,\infty]^C\in\overline{\mathcal{A}}$
Ist $\mathcal{G}\in\overline{\mathcal{A}}\implies\mathbb{R}\cap\mathcal{G}=\mathcal{G}\cap(\{-\infty\}\cup\{\infty\})^C\in\overline{\mathcal{A}}$
$\implies\mathbb{R}\cap\overline{\mathcal{A}}\subset\overline{\mathcal{A}}$
$\implies\mathcal{B}^1\subset\mathbb{R}\cap\overline{\mathcal{A}}\subset\overline{\mathcal{A}}\ (*)$
Da jede Menge $B\subset\overline{\mathcal{B}}^1$ von der Form $B=A,\ B=A\cup\{\infty\},\ B=A\cup\{-\infty\}$, oder $B=A\cup\{\infty,-\infty\}$ ist und $\{\infty\},\{-\infty\}\in\overline{\mathcal{A}}$ folgt aus $(*)$ auch $B\in\overline{\mathcal{A}}\,\forall\,B\in\overline{\mathcal{B}}^1$. Also ist $\overline{\mathcal{B}}^1\subset\sigma\left(\overline{\mathcal{E}}\right)$, also $\overline{\mathcal{B}}^1=\sigma\left(\overline{\mathcal{E}}\right)$. □

Notation: Seien f,g numerische Funktionen auf X. Dann ist $\{f\leq g\}=\{x\in X:f(x)\leq g(x)\}$ und analog für $\{f<g\},\{f=g\},\{f\neq g\}$. $\implies$ Bed (3): $\boxed{\{f\geq\alpha\}\in\mathcal{A}}\quad\alpha\in\mathbb{R}$. 22.11.2019

Satz 11.2. *Jede der folgenden Bedingungen ist der $\mathcal{A}$-Messbarkeit einer numerischen Funktion $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ äquivalent:*

a) $\{f\geq\alpha\}\in\mathcal{A}\,\forall\alpha\in\mathbb{R}$
b) $\{f>\alpha\}\in\mathcal{A}\,\forall\alpha\in\mathbb{R}$
c) $\{f\leq\alpha\}\in\mathcal{A}\,\forall\alpha\in\mathbb{R}$
d) $\{f<\alpha\}\in\mathcal{A}\,\forall\alpha\in\mathbb{R}$

Beweis. Wegen des vorherigen Satzes reicht es zu zeigen, dass diese Bedingungen äquivalent sind. Dies folgt aus:

$$\begin{aligned}\{f>\alpha\}&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f\geq\alpha+n^{-1}\}\\\{f\leq\alpha\}&=\{f>\alpha\}^C\\\{f<\alpha\}&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f\leq\alpha-n^{-1}\}\\\{f\geq\alpha\}&=\{f<\alpha\}^C\end{aligned}$$

□

Bemerkung. *Rechnen in* $\overline{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$ Siehe auch Abbildung 14

1. $a+(\pm\infty)=\pm\infty\ \ \forall\,a\in\mathbb{R}$

2. $\pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty$

3. $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \qquad a > 0$

4. $a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \qquad a < 0$

Nicht definiert sind $+\infty + (-\infty)$ *und* $-\infty + (+\infty)$.
In der Maßtheorie setzen wir auch $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0$ ☺ *(ausnahmsweise)!*

Satz 11.3. *Für je zwei $\mathcal{A}$-messbare Funktionen $f, g : x \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt:*

$$\{ f < g \}, \{ f \leq g \}, \{ f \neq g \}, \{ f = g \} \in \mathcal{A}.$$

Beweis. $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, also $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ r_n \}, r_n \in \mathbb{Q}$. Es ist außerdem $\{ f < g \} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{ f < r_n \} \cap \{ r_n < g \})$, was nach Satz 2 in $\mathcal{A}$ liegt. Wegen $\{ f \leq g \} = \{ f > g \}^C$ und $\{ f \neq g \} = \{ f = g \}^C$ liegen alle diese beiden Mengen auch in $\mathcal{A}$, da $\{ f = g \} = \{ f \leq g \} \cap \{ g \leq f \}$. □

Satz 11.4. *Mit $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sind auch $f \pm g$ (falls überall definiert) und $f \cdot g$ messbar.*

Beweis. Mit g ist auch $\sigma + \tau g$ messbar für alle $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$. Denn es gilt

$$\begin{aligned} \{ \sigma + \tau g \geq \alpha \} &= \{ g \geq \tau^{-1} (\alpha - \sigma) \} \qquad \tau > 0 \\ \{ \sigma + \tau g \geq \alpha \} &= \{ g \leq \tau^{-1} (\alpha - \sigma) \} \qquad \tau < 0 \end{aligned}$$

Der Fall $\tau = 0$ ist dabei trivial. Deshalb können wir Satz 2 anwenden und erhalten den obigen Satz. Der umgekehrte Fall $f - g$ wird auf $f + g$ zurückgeführt: Offensichtlich ist $\alpha - g$ messbar. Also ist $\{ f + g \geq \alpha \} = \{ f \geq \alpha - g \}$ messbar nach Satz 3. Damit ist $f + g$ messbar.

Zu $f \cdot g$: Seien f, g reellwertig. Dann ist $f \cdot g = \frac{1}{4} (f + g)^2 - \frac{1}{4} (f - g)^2$. Deswegen reicht es den Fall $f = g$ zu betrachten, also zu zeigen, dass f^2 messbar ist, wenn f messbar ist. Dies gilt wegen $\{ f^2 \geq \alpha \} = \{ f \geq \sqrt{\alpha} \} \cup \{ f \leq -\sqrt{\alpha} \}$ für $\alpha \geq 0$ beziehungsweise $\{ f^2 \geq \alpha \} = X$ für $\alpha < 0$. Nach Satz 3 ist also f^2 messbar.

Seien f, g numerische Funktionen. Definiere dann $X_1 = \{ f \cdot g = +\infty \}, X_2 = \{ f \cdot g = -\infty \}$, $X_3 = \{ f \cdot g = 0 \}, X_4 = (X_1 \cup X_2 \cup X_3)^C$. Alle diese Mengen liegen ebenfalls in $\mathcal{A}$ und disjunkt. Zum Beispiel ist $X_3 = \{ f = 0 \} \cup \{ g = 0 \} \in \mathcal{A}$, was nach Satz 2 in $\mathcal{A}$ liegt. X_1 ist messbar wegen $X_1 = (\{ f = +\infty \} \cap \{ g > 0 \}) \cup (\{ g = +\infty \} \cap \{ f > 0 \}) \cup (\{ f = -\infty \} \cap \{ g < 0 \}) \cup (\{ g = -\infty \} \cap \{ f < 0 \})$ und Satz 2.

Nun ist die Restriktion $\tilde{f}, \tilde{g}$ von f bzw. g auf X_4 $X_4 \cap \mathcal{A}$-messbar und reellwertig: $\tilde{f} = f\big|_{X_4}, \tilde{g} = g\big|_{X_4}$. Also ist $\tilde{f} \cdot \tilde{g}$ $X_4 \cap \mathcal{A}$-messbar und somit auch $f \cdot g$ $\mathcal{A}$-messbar . □

Satz 11.5. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\mathcal{A}$-messbarer numerischer Funktionen auf X. Dann folgt:*

$$\sup f_n,\ \inf f_n,\ \limsup_{n\to\infty} f_n,\ \liminf_{n\to\infty} f_n \text{ sind } \mathcal{A}\text{-messbar.}$$

Beweis. Siehe Übung vom 20.11.2019 □

Korollar 11.6. *Seien $f_1, \dots, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ endlich viele $\mathcal{A}$-messbare, numerische Funktionen, so ist obere (untere) Einhüllende*

$$f_1 \vee \cdots \vee f_n = \max_{1\leq j\leq n} f_j \qquad f_1 \wedge \cdots \wedge f_n = \min_{1\leq j\leq n} f_j$$

$\mathcal{A}$-messbar.

Beweis. Folge $f_1, f_2, \dots, f_n, f_n, f_n, \dots$ und wende Satz 5 an. □

Korollar 11.7. *Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\mathcal{A}$-messbarer numerischer Funktionen und die Grenzfunktion $\lim_{n\to\infty} f_n$ existent (d.h. $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert $\forall\, x \in X$), dann ist $\lim_{n\to\infty} f_n$ $\mathcal{A}$-messbar.*

Beweis. In diesem Fall ist $\lim_{n\to\infty} f_n = \limsup f_n = \liminf f_n$ und somit messbar nach Satz 5. □

Absolutbetrag $|f| = f \vee (-f)$

Positivteil $f^+ = f \vee 0 = \begin{cases} f & \text{falls } f \geq 0 \\ 0 & \text{falls } f < 0 \end{cases}$

Negativteil $f^- = (-f)^+ = -\,(f \wedge 0) = \begin{cases} -f & \text{falls } f \leq 0 \\ 0 & \text{falls } f > 0 \end{cases}$

Es gilt also $f^+ \geq 0,\ f^- \geq 0,\ f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$.
Dann folgt aus Satz 4 und Korollar 6:

Satz 11.8. *Eine numerische Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann $\mathcal{A}$-messbar , wenn f^+ und f^- $\mathcal{A}$-messbar sind. Außerdem gilt: f ist $\mathcal{A}$-messbar $\implies$ $|f|$ ist $\mathcal{A}$-messbar .*

12 (Positive) Elementarfunktion und ihr Integral

Definition 12.1. *Sei X eine Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in X. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt ($\mathcal{A}$-) Elementarfunktion, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt und $\mathcal{A}$-messbar ist. Wir schreiben $E = E(X, \mathcal{A})$ als die Menge aller Elementarfunktionen.*

Weiterhin sei $E^+ = \{ f \in E : f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in X \}$ definiert als die Menge aller positiven Elementarfunktionen.

Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Werte einer Funktion $f \in E$, so sind $A_j := f^{-1}(\{ \alpha_j \})$ paarweise disjunkt, $A_j \in \mathcal{A}$ und es gilt

$$\boxed{f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}} \quad \left(\text{und } \bigcup_{j=1}^{n} A_j = X\right) \tag{1}$$

Umgekehrt: Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ nicht notwendigerweise alle verschieden, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \implies f := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \in E(X, \mathcal{A})$. Aus Kapitel 11 und Definition 1 folgt

$$u, v \in E \implies \begin{cases} \alpha \cdot u \in E & \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ u + v \in E \\ u \cdot v \in E \\ u \vee v \in E \\ u \wedge v \in E \end{cases} \tag{2}$$

Jedes $u \in E$ hat eine Darstellung $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ mit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt und $X = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ (siehe (1)). Das heißt die $A_1, \dots, A_n$ bilden eine Zerlegung von X. Wir nennen eine solche Darstellung von u im Folgenden Normaldarstellung (von $u \in E$).

Lemma 12.2. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für je zwei Normaldarstellungen $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} = \sum_{l=1}^{m} \beta_l \mathbb{1}_{B_l}$ einer positiver Elementarfunktion $u \in E^+$ $(\alpha_j, \beta_l \geq 0)$ gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{l=1}^{m} \beta_l \mu(B_l)$$

(Die Regeln zum Rechnen in $\overline{\mathbb{R}}$ sind zu berücksichtigen.)

Beweis. Sei $X = A_1 \cup \dots \cup A_n = B_1 \cup \dots \cup B_m$. Es gilt:

$$\begin{aligned} A_j &= \bigcup_{l=1}^{m} (A_j \cap B_l) \qquad \forall j = 1, \dots, n \\ B_l &= \bigcup_{j=1}^{n} (A_j \cap B_l) \qquad \forall l = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass die $(A_j \cap B_l)$ für fixiertes j oder fixiertes l paarweise disjunkt sind. μ ist nun endlich additiv. Also:

$$\mu(A_j) = \sum_{l=1}^{m} \mu(A_j \cap B_l)$$
$$\mu(B_l) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \cap B_l)$$
$$\implies \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{j,l} \alpha_j \mu(A_j \cap B_l)$$
$$\sum_{l=1}^{m} \beta_l \mu(B_l) = \sum_{j,l} \beta_l \mu(A_j \cap B_l)$$

Wir gehen von einer Normaldarstellung aus.
Es gilt also für jedes Indexpaar j, l mit $A_j \cap B_l \neq \emptyset$:

$$\alpha_j = \beta_l \text{ und } \sum_{j,l} \alpha_j \mu(A_j \cap B_l) = \sum_{j,l} \beta_l \mu(A_j \cap B_l)$$

□

Definition 12.3. *Sei $u \in E^+$. Dann heißt die spezielle Normaldarstellung $u = \sum_j \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ unabhängige Zahl (Lemma 2).*

$$\boxed{\int u d\mu := \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu(A_j)} \tag{3}$$

das (μ-) Integral von u (über X).

$u \mapsto \int u d\mu$ definiert also eine Abbildung von E^+ nach $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$ und sogar eine Abbildung nach $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ falls μ ein endliches Maß ist.

<u>Wichtige Eigenschaften:</u>

$$\forall A \in \mathcal{A} \qquad \int \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A) \tag{4}$$
$$\forall \alpha \geq 0, u \in E^+ \qquad \int \alpha \cdot u d\mu = \alpha \cdot \int u d\mu \tag{5}$$
$$u, v \in E^+ \implies \int (u + v) d\mu = \int u d\mu + \int v d\mu \tag{6}$$
$$u, v \in E^+, u \leq v \implies \int u d\mu \leq \int v d\mu \tag{7}$$

25.11.2019

Hatten: $u \in E^+ \quad u = \sum_{j=1}^m \alpha \mathbb{1}_{A_j} \quad \alpha_j \in \mathbb{R}_+, \quad A_j \in \mathcal{A}$
Normaldarstellung: $A_1, \ldots, A_m$ disjunkt, $\bigcup_{j=1}^m A_j = X$
$\int u \, d\mu := \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j)$

Beweis.
(4) und (5): folgen unmittelbar aus der Definition:

$$\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{A^C}$$

(6): Seien $u = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}, v = \sum_{l=1}^m \alpha_l \mathbb{1}_{A_l}$ die Normaldarstellung von $u, v \in E^+$, wobei $X = \dot\bigcup_j A_j = \dot\bigcup_l B_l$.

$$\implies A_j = \bigcup_{l=1}^m (A_j \cap B_l), B_l = \bigcup_{j=1}^n (A_j \cap B_l)$$

Die $A_j \cap B_l$ sind dabei paarweise disjunkt, also

$$\mathbb{1}_{A_j} = \sum_{l=1}^m \mathbb{1}_{A_j \cap B_l}, \mathbb{1}_{B_l} = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{A_j \cap B_l}$$

Wir erhalten damit eine neue Normaldarstellung:

$$u = \sum_{j,l} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j \cap B_l}, \; v = \sum_{j,l} \beta_l \mathbb{1}_{A_j \cap B_l} \text{ und } u + v = \sum_{j,l} (\alpha_j + \beta_l) \mathbb{1}_{A_j \cap B_l}$$

$$\begin{aligned}
\implies \int (u+v) \, d\mu &= \sum_{j,l} (\alpha_j + \beta_l) \mu (\alpha_j + \beta_l) \\
&= \sum_{j,l} \alpha_j \mu (A_j \cap B_l) + \sum_{j,l} \beta_l \mu (A_j \cap B_l) \\
&= \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{l=1}^m \mu (A_j \cap B_l) + \sum_{l=1}^m \beta_l \sum_{j=1}^n \mu (A_j \cap B_l) \\
&= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu (A_j) + \sum_{l=1}^m \beta \mu (B_l) = \int u \, d\mu + \int v \, d\mu
\end{aligned}$$

(7):

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} & v &= \sum_{l=1}^m \beta_l \mathbb{1}_{B_l} \\
&= \sum_{j,l} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j \cap B_l} & &= \sum_{j,l} \beta_l \mathbb{1}_{A_j \cap B_l} \\
&= \sum_k \delta_k \mathbb{1}_{C_k} & &= \sum_k \gamma_k \mathbb{1}_{C_k}
\end{aligned}$$

Wobei $C_1, \ldots, C_k$ paarweise disjunkt.

$\square$

Bemerkung. *Ist $u = \sum_j \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ beliebige Dastellung von $u \in E^+$ (nicht notwendigerweise eine Normaldarstellung)*

$$\implies \int u \, d\mu = \int \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \, d\mu \underset{(6)}{=} \sum_{j=1}^{k} \int \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \, d\mu \underset{(5)}{=} \sum_j \alpha_j \int \mathbb{1}_{A_j} \, d\mu \underset{(4)}{=} \sum \alpha_j \mu(A_j)$$

13 Das Integral positiver, messbarer, numerischer Funktionen

Skizze

Beispiel. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$$\implies f = \sum_{r \in \mathbb{Q}} \mathbb{1}_{\{r\}} = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \qquad \int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, d\lambda = \lambda(\mathbb{Q}) = 0 \ ☺$$

Satz 13.1. *Sei $(u_n)_n \subset E^+$ eine wachsende Folge ($u_n \leq u_{n+1}$, $\forall n$) und $u \in E^+$:*

$$\boxed{u \leq \sup_n u_n \implies \int u \, d\mu \leq \sup_n \int u_n \, d\mu} \tag{1}$$

Beweis. Wir schreiben $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}, A_j \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{R}_+$.

$$\int u \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$

Sei $0 < \alpha < 1 : B_n := \{ u_n \geq \alpha u \} \in \mathcal{A}$. Also ist immer $\boxed{u_n \geq \alpha u \mathbb{1}_{B_n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Also gilt auch Monotonie:

$$\begin{aligned} \int u_n \, d\mu &\geq \int \alpha u \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu \\ &= \alpha \int u \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu \\ u &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \\ u \mathbb{1}_{B_n} &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \cdot \mathbb{1}_{B_n} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j \cap B_n} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int u \mathbb{1}_{B_n}\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int \mathbb{1}_{A_j \cap B_n}\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha\mu\left(A_j \cap B_n\right)}$$

$u_{n+1} \geq u_n \implies Bn+1 \supset B_n$ wachsend <u>und</u> $\boxed{X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} B_n}$. Das heißt, dass $A_j = \lim_{n\to\infty} \underbrace{A_j \cap B_n}_{\text{wachsend}}$ und das Maß μ ist von unten stetig.

$$\boxed{\mu\left(A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_j \cap B_n\right)}$$

$$\Longrightarrow \int u\, d\mu = \sum_j \alpha_j \cdot \mu\left(A_j\right) = \sum_j \alpha_j \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_j \cap B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \sum \alpha_j \mu\left(A_j \cap B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \int u \mathbb{1}_{B_n}\, d\mu$$

$$\sup_n \int u_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int u_n\, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int \alpha u \mathbb{1}_{B_n}\, d\mu = \alpha \int u\, d\mu \qquad \forall\, 0 < \alpha < 1$$

Jetzt bildet man den Grenzwert $\alpha \to 1$ und erhält $\sup_n \int u_n\, d\mu \geq \int u\, d\mu$. □

Korollar 13.2. *Sind $\left(u_n\right)_n, \left(v_n\right)_n$ wachsende Folgen in E^+, so gilt:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n \implies \sup_n \int u_n\, d\mu = \sup_n \int v_n\, d\mu \tag{2}$$

Beweis. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $u_m \leq \sup v_n$ und $v_m \leq \sup u_n$. Satz 1 besagt dann

$$\int u_m\, d\mu \leq \sup_n \int v_n\, d\mu \implies \sup_m \int u_m\, d\mu \leq \sup_n \int v_n\, d\mu$$

und

$$\int v_m\, d\mu \leq \sup_n \int u_n\, d\mu \implies \sup_n \int v_m\, d\mu \leq \sup_n \int u_n\, d\mu$$

□

Definition 13.3. *Es sei $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$ die Menge aller numerischer Funktionen $f \geq 0$ auf X, für die es eine wachsende Folge $\left(u_n\right)_n \subset E^+$ mit $f = \sup_n u_n$ gibt. Dann ist nach (2) die Zahl $\sup_n \int u_n\, d\mu \in [0, \infty]$ von f abhängig und unabhängig von der zur Darstellung von f benutzten Folge $\left(u_n\right)_n$. Sei $f \in \mathcal{M}^+, f = \sup u_n, \left(u_n\right)_n \subset E^+, u_{n+1} \geq u_n$. Dann nennen wir*

$$\int f\, d\mu := \sup_n \int u_n\, d\mu \tag{3}$$

das μ-Integral von f.

Bemerkung. *Offensichtlich ist* $E^+ \subset \mathcal{M}^+$. *Gegeben* $u \in E^+$, *nehme* $u_n = u \implies u = \sup_n u_n$. *Dann gilt nach (3)* $f = u \in E^+$, *also:*

$$\int f\ d\mu = \sup_n \int u_n\ d\mu = \sup_n \int u\ d\mu = \int u\ d\mu$$

Also ist das Integral in (3) die Fortsetzung vom Integral über E^+*!*

Satz 13.4. *Es gilt:*

$$f,\ g \in \mathcal{M}^+ \implies \begin{cases} \alpha f \in \mathcal{M}^+\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+ \\ f + g \in \mathcal{M}^+ \\ f \cdot g \in \mathcal{M}^+ \\ f \vee g \in \mathcal{M}^+ \\ f \wedge g \in \mathcal{M}^+ \end{cases} \tag{4}$$

$$\int \alpha f\ d\mu = \alpha \int f\ d\mu \tag{5}$$

$$\int (f+g)\ d\mu = \int f\ d\mu + \int g\ d\mu \tag{6}$$

$$f \le g \implies \int f\ d\mu \le \int g\ d\mu \tag{7}$$

Beweis. Zu $f \in \mathcal{M}^+$ existiert eine Folge $(u_n)_n \subset E^+, u_n \ge u_{n+1}, f = \sup_n u_n = \lim_{n\to\infty} u_n$.
(5): Selber machen!
(6): Seien $f = \sup u_n u_n, g = \sup_n v_n, (u_n)_n, (v_n)_n \subset E^+$ wachsende Folgen.

$$\implies \int f\ d\mu = \sup_n \int u_n\ d\mu, \int g\ d\mu = \sup_n \int v_n\ d\mu$$

Wegen $f + g = \sup_n (u_n + v_n)$ gilt:

$$\begin{aligned} \int (f+g)\ d\mu &= \sup_n \int (u_n + v_n)\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int (u_n+v_n)\ d\mu \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int u_n\ d\mu + \int v_n\ d\mu \right) = \lim_{n\to\infty} \int u_n\ d\mu + \lim_{n\to\infty} \int v_n\ d\mu \\ &= \int f\ d\mu + \int g\ d\mu \end{aligned}$$

Ist ferner $f \leq g$, dann ist

$$\boxed{u_m \leq f \leq g = \sup_n v_n}$$

$$\overset{\text{Satz 1}}{\Longrightarrow} \boxed{\int u_m \, d\mu \leq \int \sup_n v_n \, d\mu = \int g \, d\mu}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int f \, d\mu = \sup_m \int u_m \, d\mu \leq \int g \, d\mu}$$

□

Frage: Welche messbaren numerischen Funktionen $f \geq 0$ auf X sind in $\mathcal{M}^+$?
Antwort: Alle! ☺

Satz 13.5. *$\mathcal{M}^+$ ist die Menge aller messbarer, numerischer Funktionen $f \geq 0$ auf X!*

Beweis.
„$\Longrightarrow$“: Sei $f \in \mathcal{M}^+ \implies f$ ist messbar und nicht negativ.
„$\Longleftarrow$“: Wir verwenden einen Trick: Dyadische „Zerlegung“ im Bild von f!
Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0$ und $\mathcal{A}$-messbar .
Setze für $n \in \mathbb{N}$ $A_{i,n} := \begin{cases} \{ i2^{-n} \leq f < (i+1)\,2^{-n} \} & , i = 0, 1, \ldots, n2^n - 1 \\ \{ f \geq n \} & , i = n2^n \end{cases}$
Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ ist es in $\mathcal{A}$ und paarweise disjunkt.
$u_n := \sum_{i=0}^{n2^n} i2^{-n} \mathbb{1}_{A_{i,n}} \in E^+$ und $u_n \leq f$ nach Konstruktion!
Monotonie: u_{n+1} auf $A_{i,n}$ und $u_n\big|_{A_{i,n}} = i2^{-n}$. Welche $A_{j,n+1}$ sind in $A_{i,n}$ enthalten?
$A_{j,n+1} \subset A_{i,n} \iff j = 2i$ oder $j = 2i + 1$
Also nimmt u_{n+1} auf $A_{i,n}$ den Wert $2i \cdot 2^{-n-1} = i \cdot 2^{-n}$ oder den Wert $\underbrace{(2i)\,2^{-n-1}}_{i2^{-n}} \mathbb{1}_{A_{2i,n+1}} +$
$\underbrace{(2i+1)\,2^{-n-1}}_{(i+\frac{1}{2})2^{-n} > i2^{-n}} \mathbb{1}_{A_{2i+1,n+1}} \geq u_n\big|_{A_{i,n}}, \ \forall\, i = 0, 1, \ldots, n2^{-n}-1$. Damit ist $\boxed{u_{n+1}\big|_{A_{i,n}} \geq u_n\big|_{A_{i,n}}}$.
Es gilt weiterhin $f = \sup_n u_n$, denn:
Ist $f(x) = +\infty \implies u_n(x) = n \to \infty$; ist $f(x) < \infty \implies u_n(x) \leq f(x) \leq u_n(x) + 2^{-n} \ \forall n f(x)$. Also ist $\forall\, x \in X : f(x) = \sup_n u(x)$!

□ 27.11.2019

Satz 13.6 (Beppo Levi, monotone Konvergenz)**.** *Sei $(f_n)_n \in \mathcal{M}^+$ wachsende Folge (also $f_n \leq f_{n+1} \,\forall\, n$). Dann folgt:*

$$\boxed{\sup_n f_n \in \mathcal{M}^+ \textit{ und } \int \sup_n f_n \, d\mu = \sup_n \int f_n \, d\mu}$$

Bemerkung. $f_n \leq f_{n+1} \, \forall n \implies \sup_n f = \lim_{n\to\infty} f_n$
Monoton: $\int f_n \, d\mu \leq \int f_{n+1} \, d\mu \implies \sup_n \int f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$.
Eine andere Formulierung des Satzes von Beppo Levi ist also:

$$\boxed{\int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu}$$

Beweis. $f := \sup_n f_n \qquad (f(x) := \sup_n f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x))$.
Es reicht zu zeigen, dass es eine Folge $(v_n)_n \subset E^+$ (also $v_n \leq v_{n+1}$) mit $\sup v_n = f$ und $v_n \leq f_n$ gibt. Denn dann ist f per Definition in $\mathcal{M}^+$ und $\int f \, d\mu = \sup_n \int v_n \, d\mu \leq \sup_n \int f_n \, d\mu$.
Da $f \geq f_n$, gilt: $\int f \, d\mu \overset{\text{Monotonie}}{\geq} \int f_n \, d\mu$ für alle n. Somit folgt auch:

$$\boxed{\int f \, d\mu \geq \sup_n \int f_n \, d\mu}$$

und schließlich unser Ergebnis $\int \sup f_n \, d\mu = \sup_n \int f_n \, d\mu$ ☺.

Beweisen wir also die Existenz einer solchen Folge $(v_n)_n$:
Zu f_n gibt es eine wachsende Folge $(u_{m,n})_{m\in\mathbb{N}} \subset E^+$ mit

$$f_n = \sup_m u_{m,n}, \; u_{m,n} \leq f_n \, \forall m \in \mathbb{N}$$

Wir definieren $v_n := u_{m,1} \vee u_{m,2} \vee \cdots \vee u_{m,m} \in E^+$. Dann gilt:

$$\boxed{v_{m+1} = u_{m+1,1} \vee \cdots \vee u_{m+1,m+1} \geq u_{m+1,1} \vee \cdots \vee u_{m+1,m} \geq u_{m,1} \vee \cdots \vee u_{m,m} = v_m}$$

und

$$\boxed{v_m = u_{m,1} \vee \cdots \vee u_{m,m} \leq f_1 \vee \cdots \vee f_m = f_m}$$

Daraus folgt $\sup_m v_m \leq \sup_n f_n = f$. Außerdem gilt nach Definition von v_m:

$$\boxed{m \geq n \implies u_{m,n} \leq v_m}$$

Daraus folgt $f_n = \sup u_{m,n} = \lim_{m\to\infty} u_{m,n} = \lim_{m\to\infty} v_m = \sup_m v_m$. Schließlich gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $f_n \leq \sup_m v_m$. Also gilt auch $f = \sup_n f_n \leq \sup v_m$ und damit $f = \sup_m f_m$. □

Alternativbeweis: Sei $f = \sup_n f_n$ eine positive, messbare, numerische Funktion. Dann ist nach Satz 5 $f \in \mathcal{M}^+$. Also existiert eine wachsende Folge $(u_m)_m \subset E^+$ mit $f = sup_m u_m$. Nach Definition ist $\int f \, d\mu = \sup_m \int u_m \, d\mu$.

Auch wissen wir, dass $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \leq f$. Also folgt aus Monotonie (und für festes $m \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
&\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu \\
\Longrightarrow \; &\sup_n \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu = \sup_m \int u_m \, d\mu
\end{aligned}$$

Wähle ein beliebiges ϵ im Raum und definiere $B_n := \{ f_n \geq (1-\epsilon) \, u_m \}$. Wie im obigen Beweis von Satz 13.6 ist B_n messbar, $B_n \subset B_{n+1}$ und $X = \lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Sei $u_m \in E^+$ mit $u_m := \sum_{j=1}^L \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ und $f_n \geq (1-\epsilon) \, u_m \mathbb{1}_{B_n} = (1-\epsilon) \sum_{j=1}^L \alpha_j \mathbb{1}_{A_j \cap B_n}$. Dies impliziert:

$$\int f_n \, d\mu \geq \int (1-\epsilon) \, u_m \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu = (1-\epsilon) \sum_{j=1}^L \alpha_j \mu \left(A_j \cap B_n \right)$$

und $f_n \leq f_{n+1} \, \forall n, \; f_l \geq f_n \, \forall \, l \geq n$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \int f_l \, d\mu \geq \int f_n \, d\mu \geq (1-\epsilon) \sum_{j=1}^L \alpha_j \mu \left(A_j \cap B_n \right) \\
&\Longrightarrow \sup_{l\in\mathbb{N}} \int f_l \, d\mu \geq (1-\epsilon) \sum_{j=1}^L \alpha_j \mu \left(A_j \cap B_n \right) \; \forall n \in \mathbb{N} \\
\mu \text{ ist stetig von unten } &\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu \left(A_j \cap B_n \right) = \mu \left(A_j \right) \\
&\Longrightarrow \sup_{l\in\mathbb{N}} \int f_l \, d\mu \geq (1-\epsilon) \sum_{j=1}^L \alpha_j \mu \left(A_j \right) = (1-\epsilon) \int u_m \, d\mu \qquad \forall m \in \mathbb{N}, 0 < \epsilon < 1 \\
&\Longrightarrow \sup_{l\in\mathbb{N}} \int f_l \, d\mu \geq \int u_m \, d\mu \\
&\Longrightarrow \sup_l \int f_l \, d\mu \geq \sup_m \int u_m \, d\mu = \int f \, d\mu
\end{aligned}$$

□

Korollar 13.7. *Für jede Folge $(f_n)_n$ aus $\mathcal{M}^+$ gilt $\sum_{n=1}^\infty \in \mathcal{M}^+$ und*

$$\boxed{\int \sum_n f_n \, d\mu = \sum_n \int f_n \, d\mu}$$

Beweis. $S_n := \sum_{j=1}^n f_j$ ist wachsend und in $\mathcal{M}^+$. Dann können wir Satz 6 unter Beachtung von (6) anwenden und erhalten $\sum_n f_n = \sup_m S_m$. □

Satz 13.8 (Fatou, WICHTIG!)**.** *Sei* $(f_n)_n \subset \mathcal{M}^+$*. Dann gilt* $\liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{M}^+$ *und*

$$\boxed{\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu}$$

Bemerkung. *Es gibt Fälle in denen „<" gilt. Also ist „=" im Allgemeinen falsch.*

Beispiel. *Lebesgue-Maß auf* $\mathbb{R}^n$: $f_n(x) = \begin{cases} 1 & n \leq x \leq n+1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \implies \liminf f_n = 0.$
$\int f_n \, d\lambda = \int \mathbb{1}_{[n,n+1]} \, d\lambda = n+1-n = 1 \implies \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = 1$

<u>*Oder:*</u> $g_n = \begin{cases} n & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & x > \frac{1}{n} \ \textit{oder} \ x \leq 0 \end{cases} \implies \liminf g_n = 0$

Beweis. Wir möchten die monotone Konvergenz anwenden!
Betrachte also $f(x) = \liminf f_n(x) = \sup_n \inf_{k\geq n} f_k(x) = \sup_n g_n(x)$ mit $g_n(x) := \inf_{k\geq n} f_k(x)$. Dann ist

$$\implies \boxed{g_{n+1} = \inf_{k\geq n+1} f_k = \inf_{k\geq n} f_k = g_n}$$

$$\overset{\text{Beppo Levi}}{\implies} \boxed{\int \underbrace{\sup_n g_n}_{=f=\liminf f_n} \, d\mu = \sup_n \int g_n \, d\mu}$$

$$\implies \int \liminf f_n \, d\mu = \sup_n \int g_n \, d\mu \quad \left(g_n = \inf_{k\geq n} f_k \leq f_l \ \ \forall\, l \geq n\right)$$

$$\implies \int g_n \, d\mu \leq \int f_l \, d\mu \quad \forall\, l \geq n$$

$$\implies \int g_n \, d\mu \leq \inf_{l\geq n} \int f_l \, d\mu$$

$$\implies \boxed{\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \sup_n \inf_{l\geq n} \int f_l \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu}$$

<u>Notation:</u> Wir hatten $A_n \uparrow A$, bzw. $A_n \downarrow A$ mit Mengen $A_n, A \subset X$ wenn $A_n \subset A_{n+1}$ bzw. $A_n \supset A_{n+1}$ und $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bzw. $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

make pretty

Analog schreiben wir nun für numerische Funktionen $f_1, f_2, \dots : X \to \overline{\mathbb{R}}$ folgendes:
$f_n \uparrow f$ falls $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \ \forall\, n \in \mathbb{N}, x \in X$ und $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$
$f_n \downarrow f$ falls $f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \ \forall\, n \in \mathbb{N}, x \in X$ und $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Maßraum und $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} &= \mathbb{1}_{\liminf A_n} = \mathbb{1}_A \text{ mit} \\
A := \liminf_{A_n} \text{inf} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \\
&= \{ x \in X : x \in A_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N} \} \\
&= \{ x \in X : \exists n(x) \in \mathbb{N} : x \in A_k \ \ \forall k \geq n(x) \} \\
\limsup A_n := &\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \\
&= \{ x \in X : x \in A_k \text{ für } \infty\text{-viele } k \in \mathbb{N} \}
\end{aligned}$$

□

Korollar 13.9. $\forall\ (A_n)_n \subset \mathcal{A}$ *gilt*

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \tag{8}$$

und ist μ *endliches Maß, so gilt auch*

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \tag{9}$$

02.12.2019

Hatten: $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$
$\liminf A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{ x \in X : x \in A_n \text{ für fast alle } n \}$
$\limsup A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{ x \in X : x \in A_n \text{ für unendlich viele } n \}$
$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\liminf A_n}$ $\qquad \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\limsup A_n}$

Beweis zu Korollar 9. Es ist:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\liminf_{n} A_n\right) &= \int \mathbb{1}_{\liminf_n A_n}\, d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}\, d\mu \\
&\overset{\text{Satz von Fatou}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_{A_n}\, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \checkmark
\end{aligned}$$

Zu (10):

$$\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^C = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_k\right)^C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^C = \liminf_{n\to\infty} A_n^C$$

Ist also $\mu(X) < \infty$, so gilt

$$\mu\left(\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^C\right) = \mu(X) - \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n^C\right)$$
$$\overset{(9)}{\le} \liminf_{n\to\infty} \mu\left(A_n^C\right) = \liminf_{n\to\infty} \mu(X \setminus A_n) = \liminf_{n\to\infty} \left(\mu(X) - \mu(A_n)\right)$$
$$= \mu(X) - \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \implies (10)$$

$\square$

Nach Fatou ist $f_n \geq 0$ messbar und somit gilt:

$$\int \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu$$

Reicht es wenn gilt: $f_n \geq -g,\ g \geq 0,\ g$ ist integrierbar?

14 Integrierbare Funktionen

Frage: Was ist wenn $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ oder $f : X \to \mathbb{C}$ messbar ist?

Definition 14.1. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.*
Eine numerische Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt ($\mu-$)integrierbar, falls sie ($\mathcal{A}-$) messbar ist und die Integrale $\int f^+ \, d\mu$, $\int f^- \, d\mu$ reelle Zahlen sind. Dann heißt

$$\boxed{\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu} \tag{1}$$

das ($\mu-$)Integral von f (über X).

Wir schreiben auch:
- $\int f(x) \, d\mu(x)$
- $\int f(x) \ \mu(dx)$
- $\int_X f \, d\mu$
- $\ldots$

Ist $f \geq 0$, so gilt $f^- \equiv 0$. Daraus folgt, dass (1) konstant mit dem Integral von $f \in \mathcal{M}^+$ ist. Die rechte Seite von (1) ist wohldefiniert, falls mindestens einer der Terme $\int f^+ \, d\mu$ oder $\int f^- \, d\mu$ endlich ist. Man sagt dann, dass f quasi-integrierbar ist oder dass das Integral von f existiert.

Satz 14.2. *Notwendig und hinreichend für die Integrierbarkeit einer messbaren, numerischen Funktion $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ ist jede der Bedingungen:*

a) f^+ *und* f^- *sind integrierbar.*
b) *Es existieren integrierbare Funktionen* $u, v \geq 0$ *mit* $f = u - v$.
c) *Es existiert eine integrierbare Funktion* $g \geq 0$ *mit* $|f| \leq g$
d) $|f|$ *ist integrierbar.*

Aus b) folgt $\int f \, d\mu = \int u \, d\mu - \int v \, d\mu$

Beweis. Es reicht die Äquivalenz von a), ..., d) zu zeigen:

a) $\implies$ b) Nehme $u := f^+$ und $v := f^-$.

b) $\implies$ c) Sei $f = u - v$, wobei $u, v \geq 0$ integrierbar sind. Dann ist $|f| \leq u + v =: g$ und

$$\int g \, d\mu = \int u + v \, d\mu = \int u \, d\mu + \int v \, d\mu < \infty$$

c) $\implies$ d) Aus der Monotonie folgt sofort: $\int |f| \, d\mu \leq \int g \, d\mu < \infty$

d) $\implies$ a) Es gilt $f = f^+ - f^-, |f^+ + f^-| \geq f^\pm$. Dies impliziert, dass f integrierbar ist, denn

$$\int f^\pm \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu < \infty$$

Nun zeigen wir noch die zusätzliche Implikation von b):
Sei also erneut $f = u - v$, wobei $u, v \geq 0$ integrierbar sind. Nach Definition gilt:

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

Wegen $f = f^+ - f^- = u - v$ ist $f^+ + v = f^- + u \geq 0$. Da alle diese Funktionen in $\mathcal{M}^+$ liegen dürfen wir hier die Summen in das Integral ziehen und wieder rausholen. Also schreiben wir:

$$\int f^+ \, d\mu + \int v \, d\mu = \int \left(f^+ + v\right) d\mu = \int \left(f^- + u\right) d\mu = \int f^- \, d\mu + \int u \, d\mu$$
$$\implies \underbrace{\int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu}_{= \int f \, d\mu} = \int u \, d\mu - \int v \, d\mu$$

Wobei gilt: $f^+ \leq u, \; f^- \leq v \implies f^+, \; f^-$ sind integrierbar. $\square$

Satz 14.3. *Seien* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *integrierbare, numerische Funktionen. Dann sind* $\alpha \cdot f, \alpha \in$

$\mathbb{R}$ und $f+g$ (sofern diese auf dem Intervall definiert sind) integrierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} \int (\alpha \cdot f)\, d\mu &= \alpha \int f\, d\mu \\ \int (f+g)\, d\mu &= \int f\, d\mu + \int g\, d\mu \end{aligned} \tag{2}$$

Ferner sind $f \vee g$ und $f \wedge g$ integrierbar.

Beweis. Da $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ und $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ falls $\alpha \geq 0$ ist, bzw $(\alpha f)^+ = |\alpha|\, f^-$ und $(\alpha f)^- = |\alpha|\, f^+$ falls $\alpha < 0$ gilt, können wir folgendes aufschreiben:

$$\int \alpha f\, d\mu = \int \left(\alpha f^+\right) d\mu - \int \left(\alpha f^-\right) d\mu \underset{(13.5)}{=} \alpha \int f^+\, d\mu - \alpha \int f^-\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu$$

Zum zweiten Teil der Behauptung: Es ist $f = f^+ - f^-$ und $g = g^+ - g^-$. Also ist $f+g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-) =: u - v$. Nach dem Zusatz von Satz 2 ist das Integral von $f+g$ also:

$$\int (f+g)\, d\mu = \int u\, d\mu - \int v\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$$

wobei die zweite Gleichheit wegen folgendem gilt:

$$\begin{aligned} \int u\, d\mu &= \int \left(f^+ + g^+\right) d\mu = \int f^+\, d\mu + \int g^+\, d\mu < \infty \\ \int v\, d\mu &= \int \left(f^- + g^-\right) d\mu = \int f^-\, d\mu + \int g^-\, d\mu < \infty \end{aligned}$$

Außerdem gilt $|f \vee g| \leq |f| + |g|$ und nach Satz 2 $\int |f|\, d\mu < \infty$ und $\int |g|\, d\mu < \infty$. Nach Satz 2 ist also $f \vee g$ integrierbar. Weiterhin ist $|f \vee g| \leq |f| + |g|$, womit wieder nach Satz 2 $|f \wedge g|$ integrierbar ist. $\square$

Satz 14.4. *Seien $f, g : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ integrierbare, numerische Funktionen. Dann gilt, wenn $f \leq g$:*

$$\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu \tag{3}$$

$$\left| \int f\, d\mu \right| \leq \int |f|\, d\mu \tag{4}$$

Bemerkung. *(3) gilt auch wenn f, g quasi-integrierbar sind.*

Beweis. Ist $f \leq g$, so gilt $f^+ \leq g^+$ und $f^- \geq g^-$. Also:

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu = \int f^- \, d\mu \leq \int g^+ \, d\mu - \int g^- \, d\mu = \int g \, d\mu \implies (3)$$

Wir haben weiterhin $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$. Also gilt:

$$\left| \int f \, d\mu \right| = \max \left(\int f \, d\mu, \int -f \, d\mu \right) = \max \left(\int f \, d\mu, - \int f \, d\mu \right) \leq \int |f| \, d\mu \implies (4)$$

□

Korollar 14.5. *Für jede μ-integrierbare numerische Funktion f auf X ist $\{ |f| = +\infty \}$ eine μ-Nullmenge.*

Beweis. $A := \{ |f| = +\infty \}$ ist messbar. Außerdem haben wir $\int |f| \, d\mu < \infty$ und $\infty \cdot \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} \infty & x \in A \\ 0 & x \in A^C \end{cases} \leq |f|$. Nach Satz 3 folgt daraus

$$\int \infty \mathbb{1}_A \, d\mu = \infty \int \mathbb{1}_A \, d\mu = \infty \mu(A) \leq \int |f| \, d\mu < \infty$$

Also ist $\infty \cdot \mu(A) < \infty$ und somit $\mu(A) = 0$. ☺ □

Komplexwertige Funktionen:
$\mathbb{C}$ „=“ $\mathbb{R}^2 \implies$ nehme auf $\mathbb{C}$ die Borel σ-Algebra $\mathcal{B}^2$.
Sei $f : X \to \mathbb{C}$ und $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. f ist $(\mathcal{A})$-messbar falls $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \; \forall B \in \mathcal{B}^2$.

$z \in \mathbb{C}$, $z = \mathrm{Re}(z) + i \cdot \mathrm{Im}(z)$
$f = \mathrm{Re}(f) + i \cdot \mathrm{Im}(f)$ wobei $\mathrm{Re}(f), \; \mathrm{Im}(f) : X \to \mathbb{R}$. f ist genau dann messbar wenn der Real- und Imaginärteil von f messbar sind was außerdem äquivalent zu der Messbarkeit des komplex Konjugierten $\overline{f}$ von f ist.

Definition 14.6. *$f : X \to \mathbb{C}$ heißt (μ-)integrierbar (über X), wenn f messbar ist und $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)$ integrierbar sind. Wir setzen dann*

$$\boxed{\int f \, d\mu := \int \mathrm{Re}(f) \, d\mu + i \cdot \int \mathrm{Im}(f) \, d\mu}$$

Satz 14.7. *Für jede Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

a) f *ist integrierbar.*
b) $\mathrm{Re}(f)$ *und* $\mathrm{Im}(f)$ *sind integrierbar.*
c) $(\mathrm{Re}(f))^{\pm}$ *und* $(\mathrm{Im}(f))^{\pm}$ *sind integrierbar.*

d) Es existieren reelle integrierbare Funktionen $p, q, r, s \geq 0$ *mit* $f = p - q + i\,(r - s)$
e) f *ist messbar und es existiert eine reelle integrierbare Funktion* $g \geq 0$ *mit* $|f| \leq g$
f) f *ist messbar und* $|f|$ *ist integrierbar und reellwertig.*

Beweis. Es gilt die Äquivalenz $a) \iff b) \iff c)$ nach Definition.

c) $\implies$ d) $f = p - q + i \cdot (r - s)\,, p = (\mathrm{Re}\,(f))^{+}\,,\ q = (\mathrm{Re}\,(f))^{-}$ usw.

d) $\implies$ e) Es gilt $|f| \leq |p - q| + |r - s| \leq p + q + r + s =: g$. Also ist g integrierbar.

e) $\implies$ f) Aus der Monotonie des Integrals folgt $\int f\ d\mu \leq \int g\ d\mu < \infty$, womit $|f|$ integrierbar ist.

f) $\implies$ a) $|\mathrm{Re}\,(f)| \leq |f|$ und $|\mathrm{Im}\,(f)| \leq |f|$. Nach Satz 2 sind also $\mathrm{Re}\,(f)$ und $\mathrm{Im}\,(f)$ integrierbar.

$\square$

06.12.2019

Satz 14.8. *Seien* $f, g : X \to \mathbb{C}$ *integrierbar und* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Dann gilt sind auch* αf *und* $f + g$ *integrierbar und*

$$\int \alpha f\ d\mu = \alpha \int f\ d\mu$$
$$\int f + g\ d\mu = \int f\ d\mu + \int g\ d\mu$$

Beweis. Es gilt $\mathrm{Re}\,(f+g) = \mathrm{Re}\,(f) + \mathrm{Re}\,(g)\,, \mathrm{Im}\,(f+g) = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$. Also ist nach Satz 3 $\mathrm{Re}\,(f+g)$ und $\mathrm{Im}\,(f+g)$ integrierbar und

$$\begin{aligned} \int \mathrm{Re}\,(f+g)\ d\mu &= \int \mathrm{Re}\,(f)\ d\mu + \int \mathrm{Re}\,(g)\ d\mu \\ \int \mathrm{Im}\,(f+g)\ d\mu &= \int \mathrm{Im}\,(f)\ d\mu + \int \mathrm{Im}\,(g)\ d\mu \\ \implies \int f + g\ d\mu &= \int f\ d\mu + \int g\ d\mu \end{aligned}$$

Es bleibt $\int \alpha \cdot f\ d\mu = \alpha \cdot \int f\ d\mu$ zu zeigen: Es ist $|\alpha \cdot f| = |\alpha| \cdot (|\mathrm{Re}\,(f)| + |\mathrm{Im}\,(f)|)$. Deshalb ist αf integrierbar.

Sei $\alpha = i$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int if\,d\mu &= \int \mathrm{Re}\,(if)\,d\mu + i\int \mathrm{Im}\,(if)\,d\mu\\ &= \int -\mathrm{Im}\,(f)\,d\mu + i\int \mathrm{Re}\,(f)\,d\mu\\ &= i\left(\int \mathrm{Re}\,(f)\,d\mu + i\int \mathrm{Im}\,(f)\,d\mu\right)\end{aligned}$$

Also ist $\int if\,d\mu = i\int f\,d\mu$.

Wähle also $\alpha = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int \alpha\cdot f\,d\mu &= \int (a+ib)\cdot f\,d\mu\\ &= \int a\cdot f\,d\mu + \int i\cdot(b\cdot f)\,d\mu\\ &= \dots\\ &= a\cdot\int f\,d\mu + bi\cdot\int f\,d\mu\\ &= (a+bi)\int f\,d\mu\\ &= \alpha\cdot\int f\,d\mu\end{aligned}$$

$\square$

Satz 14.9 (Dreiecksungleichung)**.** *Ist $f : X \to \mathbb{C}$ integrierbar, dann folgt*

$$\boxed{\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu}$$

Beweis.

Erster Versuch

$$\begin{aligned}
\left|\int f\, d\mu\right| &= \left|\int \operatorname{Re}(f)\, d\mu + i\int \operatorname{Im}(f)\, d\mu\right| \\
&\le \left|\int \operatorname{Re}(f)\, d\mu\right| + \left|\int \operatorname{Im}(f)\, d\mu\right| \\
&\le \int |\operatorname{Re}(f)|\, d\mu + \int |\operatorname{Im}(f)|\, d\mu \\
&\le \int |f|\, d\mu + \int |f|\, d\mu \\
&= 2 \cdot \int |f|\, d\mu \qquad ☹
\end{aligned}$$

Zweiter Versuch Sei $z := \int f\, d\mu$. Schreibe z dann als $z = |z|\, e^{i\phi}$ mit $\phi \in [0, 2\pi)$. Also $z = \left|\int f\, d\mu\right| e^{i\phi}$. Daraus folgt, dass $\left|\int f\, d\mu\right|$ in $\mathbb{R}$ liegt und sich als folgendes schreiben lässt:

$$\boxed{\left|\int f\, d\mu\right| = e^{-i\phi}\int f\, d\mu = \int \left(e^{-i\phi} f\right) d\mu}$$

Also ist:

$$\begin{aligned}
\left|\int f\, d\mu\right| = \operatorname{Re}\left(\int e^{-i\phi} f\, d\mu\right) &= \int \operatorname{Re}\left(e^{-i\phi} f\right) d\mu \\
&\le \int \left|e^{-i\phi} f\right| d\mu \le \int \left|e^{-i\phi}\right| |f|\, d\mu \\
&= \int |f|\, d\mu
\end{aligned}$$

Ungleichung korrigieren

$\square$

Satz 14.10. *Seien $f,\ g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ quasi integrierbar und $f \le g \implies \int f\, d\mu \le \int g\, d\mu$*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $f^+ \le g^+$ und $f^- \ge g^-$:

$$\implies \int f^+\, d\mu \le \int g^+\, d\mu, \int f^-\, d\mu \ge \int g^-\, d\mu$$

$$\implies \int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu \le \int g^+\, d\mu - \int g^-\, d\mu = \int g\, d\mu$$

$\square$

Definition 14.11. *Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar oder in $\mathcal{M}^+$ (oder $f : X \to \mathbb{C}$ integrierbar).*
Ist $A \in \mathcal{A}$, so setzen wir

$$\boxed{\int_A f \, d\mu := \int \mathbb{1}_A f \, d\mu} \tag{4}$$

Insbesondere gilt $\int_X f \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Rechenregeln:

$$\boxed{\int_{A \cup B} f \, d\mu + \int_{A \cap B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu \quad \forall A, B \in \mathcal{A}} \tag{5}$$

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu \text{ falls } A \cap B = \emptyset \tag{5'}$$

$$f(x) \leq g(x) \ \forall x \in A \implies \int_A f \, d\mu \leq \int_A g \, d\mu \tag{6}$$

Wir setzen:

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \text{Menge aller } \mu\text{-integrierbaren reellen Funktionen auf } X$$
$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu) := \text{Menge aller } \mu\text{-integrierbaren komplexen Funktionen auf } X$$

Sind μ, ν Maße auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$ in X, so gilt:
Die numerische Funktion f auf X ist $(\mu + \nu)$-integrierbar gdw. sie μ- und ν-integrierbar ist.
Es gilt:

$$\boxed{\int f \, d(\mu + \nu) = \int f \, d\mu + \int f \, d\nu} \tag{7}$$

mit $(\mu + \nu)(A) := \mu(A) + \nu(A)$

Man rechnet dies für $f \in E^+$ nach und wendet dann die Definition des Integrals an. Insbesondere ist

$$\mathcal{L}^1(\mu + \nu) = \mathcal{L}^1(\mu) \cap \mathcal{L}^1(\nu)$$
$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu + \nu) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu) \cap \mathcal{L}^1(\nu)$$

Also ist insbesondere ist $\mathcal{L}^1(\mu)$ ein Vektorraum und $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum!

Beobachtung: Die Abbildung

$$f \longmapsto \int_A f \, d\mu \tag{8}$$

ist eine monotone Linearform auf $\mathcal{L}^1(\mu)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Alternative: Gegeben sei μ auf $\mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A}$. Setze dann μ_A als die Restriktion von μ auf der Spur-σ-Algebra $A \cap \mathcal{A}$.

Lemma 14.12. *Sei f eine numerische Funktion in M^+ oder μ-integrierbar. Sei außerdem f' die Restriktion von f auf A:*

$$f' := f\big|_A, f' : A \to \overline{\mathbb{R}}, x \longmapsto f(x)$$

Dann ist f' $M^+(A, A\cap\mathcal{A})$- bzw. μ_A-integrierbar und

$$\boxed{\int f'\, d\mu_A = \int_A f\, d\mu} \tag{9}$$

Dabei sei $\mu_A = \mu\big|_{A\cap\mathcal{A}}$.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$.
Dann ist $f' \in \mathcal{M}^+(A, A\cap\mathcal{A})$ denn $f^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)\ \forall B \in \overline{\mathcal{B}^{-1}}$.

Zur Funktion $\mathbb{1}_A f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$ existiert eine Folge $(u_n)_n$ in E^+ mit $u_n \uparrow \mathbb{1}_A f$. Also ist $u_n' \uparrow f'$ und $u_n' \in E^+(A, A\cap\mathcal{A})$.

$$\int_A f\, d\mu = \int \mathbb{1}_A f\, d\mu \overset{Mon.Konv.}{=} \sup_k \int u_k\, d\mu$$
$$\int f'\, d\mu_A = \sup_n \int u_n'\, d\mu_A$$
$$\text{Da } 0 \le u_n \le \mathbb{1}_A f \implies u_n(x) = 0\ \ \forall x \in A^C$$
$$\text{und } u_n = \sum_{j=1}^{K_n} \alpha_j^{(n)} \mathbb{1}_{A_j^{(n)}} \qquad \alpha_j^{(n)} > 0$$

ergänzen

$$
\begin{aligned}
\mathbb{1}_A u_n = u_n& \\
&= \mathbb{1}_A \sum_{j=1}^{K_n} \alpha_j^{(n)} \cdot \mathbb{1}_{A_j^{(n)}} \\
&= \sum_{j=1=K_n}^{\alpha_j} \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_{A_j^{(n)}} \\
&= \sum \alpha_j^{(n)} \mathbb{1}_{A \cap A_j^{(n)}} \\
&= u_n' \text{ auf } A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \int u_n \, d\mu = \int u_n' \, d\mu_A \\
&\Longrightarrow \int f' \, d\mu_A = \int f \, d\mu
\end{aligned}
$$

□

Ist $f \in \mathcal{M}^+ (A, A \cap \mathcal{A})$ beziehungsweise μ_A-integrierbar, so ist

$$\int_A f \, d\mu = \int f \, d\mu_A$$

Wir nennen f über A μ-integrierbar, falls $\int |f| \, d\mu_A < \infty$.

Korollar 14.13. *Sei f eine auf einer Menge $A \in \mathcal{A}$ definierte numerische Funktion (oder $\mathbb{C}$-wertig). Dann ist f genau dann über A μ-integrierbar, wenn die durch*

$$f_A (x) := \begin{cases} f(x) & , x \in A \\ 0 & , x \in A^C \end{cases}$$

auf ganz X definierte Funktion μ-integrierbar ist. Es gilt:

$$\boxed{\int_A f \, d\mu = \int f_a \, d\mu = \int \mathbb{1}_A f \, d\mu}$$

Beweis. Lemma 12. □

15 Fast überall

Erinnerung: $N \subset X$ heißt (μ-)Nullmenge, falls $N \in \mathcal{A}$ und $\mu(N) = 0$ gilt. Sind $(N_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Nullmengen, dann ist auch $N := \sum_{j=1=\infty}^{N_j}$ eine Nullmenge, denn

$$\boxed{\mu(N) = \mu\left(\sum_{j=1}^{\infty} N_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(N_j) = 0}$$

Weiterhin gilt für $A \in \mathcal{A}, A \in N$, wobei N eine Nullmenge ist, dass $0 \leq \mu(A) \leq \mu(N) = 0$, womit A auch eine Nullmenge ist.

Definition 15.1. *Sei E eine Eigenschaft, die für jeden Punkt $x \in X$ sinnvoll ist (d.h. für jeden Punkt $x \in X$ ist definiert, ob E gilt oder nicht). Wir sagen (μ-)fast alle Punkte $x \in E$ besitzen die Eigenschaft E oder E gilt (μ-)fast überall (μ-f-üb.), wenn es eine μ-Nullmenge N gibt so, dass alle $x \in N^C$ die Eigenschaft E besitzen.*

Beispiele.

1. *Für $f, g : X \to Y$ ist $f = g$ μ-fast-überall, falls es eine Nullmenge N gibt so, dass $f(x) = g(x) \quad \forall x \in N^C$.*
2. *Eine numerische Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist μ-fast-überall endlich, falls es eien Nullmenge N gibt mit $f\left(N^C\right) \subset \mathbb{R}$.*
3. *Betrachte $(f_n)_n$ mit $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$ oder metrischer Raum): $(f_n)_n$ ist μ-fast-überall konvergent gegen f, wenn es eine Nullmenge N gibt mit: $\forall x \in N^C$ konvergiert $f_n(x)$ gegen $f(x)$ im Grenzwert $n \to \infty$.*
4. *Korollar 14.5: Ist f μ-integrierbar, so ist $|f| < \infty$ μ-fast-überall.*

Satz 15.2. *Sei $f \in \mathcal{M}^+$. Dann gilt:*

$$\int f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \ \mu\text{-fast-überall}$$

Beweis.
„$\Longrightarrow$“ Es sei N messbar mit

$$\begin{aligned} N :&= \{ f \neq 0 \} = \{ f > 0 \} \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} \{ f \geq \frac{1}{j} \} = \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j \end{aligned}$$

$$x \in N_j : \ f(x) \geq \frac{1}{j} \implies \boxed{j \cdot f(x) \geq 1}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\mu(N_j) &= \int \mathbb{1}_{N_j}\, d\mu \\ &= \int_{N_j} 1\, d\mu \leq \int_{N_j} j \cdot f(x)\, d\mu \\ &= j \cdot \int_{N_j} \mathbb{1}_{N_j} \cdot f\, d\mu \leq j \cdot \int f\, d\mu = 0\end{aligned}$$

Annahme: $\int f\, d\mu = 0 \implies \mu(N_j) = 0 \implies \mu(N) = 0$ Ergänzen.

„$\Longleftarrow$“ Sei $f \in M^+$ mit $f = 0$ μ-fast-überall. Sei N eine Nullmenge mit $f(x) = 0\ \forall x \in N^C$. Setze $u_n := n \cdot \mathbb{1}_N$. Dann gilt:

$$\int u_n\, d\mu = n \cdot \int \mathbb{1}_N\, d\mu = n \cdot \mu(N) = n \cdot 0 = 0$$

Weiterhin ist $g = \lim_{n\to\infty} u_n$ und $u_n \uparrow g \implies \int g\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int u_n\, d\mu}_{=0} = 0$

$$g(x) \forall x \in \mathbb{N} \implies f < g \implies 0 \leq \int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$$

□ 09.12.2019

Bemerkung. *Warum ist $\infty \cdot 0 = 0$?*

Sei $\mu(N) = 0$. Definiere:

$$g := \infty \cdot \mathbb{1}_N \in \mathcal{M}^+ \qquad g_n := n\mathbb{1}_N \qquad g_{n+1} \geq g_n \qquad g = \lim_{n\to\infty} g_n$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}&\implies \int g_n\, d\mu = n\mu(N) = n \cdot 0 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\overset{\textit{Mon. Kon.}}{\implies} \underbrace{\int g\, d\mu}_{=\infty\cdot\mu(N)=\infty\cdot 0} = \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = 0\end{aligned}$$

Korollar 15.3. *Jede $\mathcal{A}$-messbare Funktion f auf X ist über beliebige μ-Nullmengen N integrierbar und*

$$\int_N f\, d\mu = 0$$

Beweis. Ist $f \geq 0$, dann folgt dies direkt aus Satz 2, da $\mathbb{1}_N \cdot f \in \mathcal{M}^+$ μ-f.ü. gleich 0! Der allgemeine Fall folgt aus $f = f^+ - f^-$. □

Bemerkung. *Die Komplexe Version folgt aus* $f = \mathrm{Re}\,(f) + \mathrm{Im}\,(f)$.

Satz 15.4. *Seien* f, g $\mathcal{A}$*-messbare numerische Funktionen auf* X*, welche* μ*-f.ü. gleich sind. Dann gilt:*

a) $f \geq 0,\ g \geq 0 :\ \int f\ d\mu = \int g\ d\mu$

b) f *integrierbar* $\Longrightarrow$ g *integrierbar und* $\int f\ d\mu = \int g\ d\mu$

c) f, g *komplexwertig,* f *integrierbar* $\Longrightarrow$ g *integrierbar und* $\int f\ d\mu = \int g\ d\mu$

Beweis.

a) Nach Voraussetzung ist $N := \{\, f \neq g \,\}$ eine Nullmenge. Also folgt aus Satz 2, dass

$$\int_N f\ d\mu = \int_N g\ d\mu = 0$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} M := N^C \implies \int_M f\ d\mu &= \int \mathbb{1}_M \cdot f\ d\mu = \int \mathbb{1}_M \cdot g\ d\mu = \int_M g\ d\mu \\ M \cap N = \emptyset \implies \int f\ d\mu\ &= \int (\mathbb{1}_M + \mathbb{1}_N) \cdot f\ d\mu = \int_M f\ d\mu + \int_N f\ d\mu \\ &= \int_M g\ d\mu + \int_N g\ d\mu = \int g\ d\mu \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathbb{1}_M + \mathbb{1}_N = \mathbb{1}_{M \cup N} = \mathbb{1}_X$

b) Nach Voraussetzung gilt:

$$f^+ = g^+\ \mu\text{-f.-ü. und } f^- = g^-\ \mu\text{-f.-ü.}\ .$$
$$\underset{\text{a)}}{\Longrightarrow} \int f^+\ d\mu = \int g^+\ d\mu, \quad \int f^-\ d\mu = \int g^-\ d\mu$$

c) Wende b) auf $\mathrm{Re}\,(f)\,,\ \mathrm{Im}\,(f)\,,\ \mathrm{Re}\,(g)\,,\ \mathrm{Im}\,(g)$ an.

□

Korollar 15.5. *Seien* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *(oder* $\mathbb{C}$*),* $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar und* $\boxed{|f| \leq g\ \mu\text{-f.-ü.}}$. *Dann ist mit* g *auch* f μ*-integrierbar.*

Beweis. Setze $\tilde{g} := g \vee |f|$ messbar und da $|f| \leq g\ \ \mu$-f.-ü. ist $\tilde{g} = g\ \ \mu$-f.-ü. .

Aus Satz 4 folgt dann, dass $0 \leq \int \tilde{g}\ d\mu = \int g\ d\mu < \infty$, womit also $\tilde{g}$ μ integrierbar ist und nach Konstruktion $|f| \leq \tilde{g}$ überall gilt.

Aus der Monotonie folgt dann

$$\int |f| \, d\mu \leq \int \tilde{g} \, d\mu = \int g \, d\mu < \infty$$

Also ist f integrierbar. $\square$

Satz 15.6. *Seien f, g integrierbare, numerische Funktionen auf X. Gilt*

$$\boxed{\int_A f \, d\mu \leq \int_A g \, d\mu \qquad \forall\, A \in \mathcal{A}} \tag{1}$$

so folgt $f \leq g$ μ-f.-ü. . Ferner folgt aus der Gleichheit in (1), dass $f = g$ μ-f.-ü. gilt.

Beweis. Sei $M := \{ f > g \}$. Wir geben uns ein bisschen „Sicherheitsabstand“ mit $M_n := \{ f \geq g + \frac{1}{n} \}, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\implies & M_n \subset M_{n+1}, \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = M \\
\implies & \int_{M_n} f \, d\mu \geq \int_{M_n} g + \frac{1}{n} \, d\mu = \int_{M_n} g \, d\mu + \frac{1}{n} \cdot \int_{M_n} \, d\mu \\
& \qquad = \int_{M_n} g \, d\mu + \frac{1}{n} \cdot \mu(M_n) \geq \int_{M_n} f \, d\mu + \frac{1}{n} \cdot \mu(M_n) \\
\implies & \mu(M_n) \leq 0 \\
\implies & \mu(M_n) = 0 \\
\implies & \mu(M) = \lim_{n \to \infty} \mu(M_n) = 0 \\
\implies & f \leq g \;\; \mu\text{-f.-ü.}
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung. *Integrierbarkeitsannahme ist wichtig!*
Betrachte beispielsweise $X, \mathcal{A} = \{ \emptyset, X \}, \mu(\emptyset) = 0, \mu(X) = +\infty$ und $f = 2 \cdot \mathbb{1}_X, g = \mathbb{1}_X$.

$$\begin{aligned}
\implies & \int_A f \, d\mu \leq \int_A g \, d\mu \qquad A = \emptyset \text{ oder } A = X \\
\implies & \text{(1) gilt, aber } g < f.
\end{aligned}$$

16 Majorisierte Konvergenz

Satz 16.1 (Lebesgue, 1910, majorisierte Konvergenz)**.** *Die Funktionen f_n, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) seien messbar und* $\lim f_n = f$ *μ-f.-ü. Ferner gebe es eine μ-integrierbare Funktion $g \geq 0$ auf X mit $|f_n| \leq g$ μ-f.-ü.*

$\Longrightarrow$ *$f_n, \; n \in \mathbb{N}$ und f μ-integrierbar* *und*

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu &= \int f \, d\mu \qquad (1) \\ \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu &= 0 \qquad (2) \end{aligned}}$$

Wir nennen g integrierbare Majorante.

Beispiele. *Definiere $f_n(x) = \begin{cases} 1 & n \leq x \leq n+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Also ist $\int f_n(x) \; d\lambda^1 = 1$ und* Skizze
$\lim_{n\to\infty} = 0$. *f_n hat also keine integrierbare Majorante auf $[0, \infty)$! Betrachte nun f_n :*
$[0,1) \to [0,\infty), f_n(x) = \begin{cases} n & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. *Dann ist $\int f_n \, dx = 1$*

Beweis. Da $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-f.-ü. , existiert eine Nullmenge N_0 mit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in N_0^C$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist weiterhin $|f_n| \leq g \quad \mu$-f.-ü. . Also existieren Nullmengen $N_n : |f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in N_n^C$. Offensichtlich ist $M := \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) \cup N_0$ auch eine μ-Nullmenge!

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \; \forall x \in M^C : |f(x)| = |f_n(x)| \leq g(x) \\ &\Longrightarrow \; |f| \leq g \;\; \mu\text{-f.-ü.} \\ &\overset{Korollar 15.5}{\Longrightarrow} f_n \text{ und } f \text{ sind } \mu\text{-integrierbar für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Setze $g_n := |f| + g - |f_n - f|$. Also ist $g_n \geq |f| + g - |f_n| - |f| \geq 0 \;\; \mu$-f.-ü. . Weiterhin ist:

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} g_n &= \liminf_{n\to\infty} (|f| + g - |f_n - f|) \\ &= |f| + g - \underbrace{\limsup_{n\to\infty} |f_n - f|}_{=0 \;\; \mu\text{-f.-ü.}} \qquad = |f| + g \;\; \mu\text{-f.-ü.} \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \int |f| + g \, d\mu &= \int \liminf_{n\to\infty} g_n \, d\mu \\ &\overset{Fatou}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int (|f| + g - |f_n - f|) \, d\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(\int (|f| + g) \, d\mu - \int |f_n - f| \, d\mu \right) \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \; 0 \leq \limsup \int |f_n - f| \, d\mu \leq 0 \\
&\Longrightarrow \; \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0 \\
&\Longrightarrow \; (2)!
\end{aligned}$$

Zu (1):

$$\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| = \left| \int f_n - f \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

Also ist $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$! ☐

<u>Anwendungen:</u>

Lemma 16.2 (Stetigkeitslemma). *Sei E metrischer Raum und $f : E \times X \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) eine Funktion mit*

a) $x \mapsto f(t,x)$ ist μ-integrierbar $\forall\, t \in E$
b) $t \mapsto f(t,x)$ ist stetig in t_0 $\forall\, x \in X$
c) $\exists\, \mu$-integrierbare Funktion $h \geq 0$ auf X mit

$$|f(t,x)| \leq h(x) \;\; \forall\, t \in E, x \in X$$

Dann ist die auf E definierte Funktion

$$\boxed{\varphi(t) := \int f(t,x)\, \mu(dx)} \qquad \text{(Parameterabhängiges Integral!)}$$

stetig in t_0!

Beweis. Sei $(t_n)_n$ eine Folge in E mit $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$. Zu zeigen ist: $\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n) = \varphi(t_0)$. Wir setzen $f_n(x) := f(t_n, x), x \in X$. Aus c) folgt $|f_n| \leq h \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} = f(t_0, \cdot)$ überall! Nach dem Satz der monotonen Konvergenz folgt

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int f_n \, d\mu}_{\varphi(t_n)} = \int f(t_0, x)\, \mu(dx) = \varphi(t_0)$$

Also:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\varphi(t_n) &= \lim_{n\to\infty}\int f(t_n,x)\,\mu(dx)\\ &= \int f(t_0,x)\,\mu(dx)\\ &= \int \lim_{n\to\infty} f(t_n,x)\,\mu(dx)\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 16.3 (Differentiationslemma)**.** *Sei I ein nicht ausgeartetes Intervall in $\mathbb{R}$ (d.h. weder leer, noch einpunktig). Sei nun $f: I \times X \to \mathbb{R}$ Funktion mit*

a) $x \longmapsto f(t,x)$ *ist μ-integrierbar* $\forall\, t \in I$

b) $t \longmapsto f(t,x)$ *ist differenzierbar* $\forall\, x \in X$*. Die Ableitung bezeichnen wir mit $f'(t,x)$*

c) Es existiert eine μ-integrierbareMajorantenfunktion h für $f'(t,\cdot)$, uniform in $t \in I$ mit $|f'(t,x)| \le h(x)\ \forall\, x \in X$

Dann ist die Funktion $I \ni t \mapsto \varphi(t) := \int f(t,x)\ \mu(dx)$ differenzierbar in I und $f'(t,\cdot)$ ist μ-integrierbar und

$$\boxed{\varphi'(t) = \int f'(t,x)\ \mu(dx)}$$

11.12.2019

Beweis.

$$t \neq s \in I \quad \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} = \int \frac{f(t,x) - f(s,x)}{t - s}\, \mu(dx) \text{ mit } s \text{ fest}$$

$$I \ni t_n \neq s,\ t_n \to s,\ n \to \infty$$

$$f_n(x) = \frac{f(t_n,x) - f(s,x)}{t_n - s} \to f'(s,x) \quad n \to \infty \text{ nach Voraussetzung.}$$

Sei nun $x \in X$ fest. Nach dem Mittelwertsatz ist:

$$|f(t,x) - f(s,x)| = \underbrace{\left|\frac{\delta f}{\delta s}\right|(\zeta,x)}_{=f'(\zeta,x)} = |f'(\zeta,x)| \leq |h(x)| \text{ nach Voraussetzung}$$

ζ zwischen t und s.

$$\zeta \in (t,s)\ t < s$$

$$\zeta \in (s,t)\ t > s$$

$$\overset{Dom.Konv.}{\Longrightarrow} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu}_{=\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(t_n)-\varphi(s)}{t_n - s}} = \underbrace{\int \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu}_{=\int f'(s,x)\, \mu(dx)}$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(t_n) - \varphi(s)}{t_n - s} = \int f'(s,x)\ \mu(dx)$$

$$\Longrightarrow \lim_{t\to s} \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} = \int f'(s,x)\ \mu(dx)$$

□

Wir wollen als nächstes $\mathcal{L}^p$-Räume betrachten. Sei f eine messbare Funktion auf X. Dann betrachten wir

$$\left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

für $1 \leq p < \infty$.

Für $a, b \geq 0$ ist (wenn wir oBdA $a \geq b$ annehmen)

$$\lim_{p\to\infty} (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to\infty} a \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \lim_{p\to\infty} a\,(1+1)^{\frac{1}{p}} \overset{p\to\infty}{\to} a$$

Das bedeutet

$$\lim_{p\to\infty} (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} = a \vee b$$

Deswegen nehmen wir für den obigen Term als Ersatz für $p = +\infty$:

$$\sup_{x \in X} |f(x)|$$

Abändern $\inf \{ \alpha > 0 : |f| \leq \alpha \ \mu\text{-f.-ü.} \}$

17 Jensensche Ungleichung

Erinnerung: Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine Intervall.
$\varphi : I \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls $\forall\, x, y \in I, \lambda \in [0,1]$ gilt:

$$\boxed{\varphi(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda \varphi(x) + (1-\lambda) \varphi(y)} \tag{1}$$

Gilt $<$ in (1) für alle $x \neq y \in I$ und $0 < \lambda < 1$, so heißt φ strikt konvex.

Skizze

Lemma 17.1. *Für jede Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ sind äquivalent*

a) φ *ist konvex.*

b) $\forall\, x < t < y \in I : \varphi(t) \leq \varphi(x) + \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \cdot (t-x)$

c) $\forall\, x < t < y \in I : \frac{\varphi(t)-\varphi(x)}{t-x} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}$

d) $\forall\, x < t < y \in I : \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(t)}{y-t}$

e) $\forall\, x < t < y \in I : \frac{\varphi(t)-\varphi(x)}{t-x} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(t)}{y-t}$

mehr Skizze; Problem: Aufschrieb fehlt

Beweis. Jede der Bedingungen a), c), d), e) ist äquivalent zu b). (Siehe Übung) □

Ferner: Die strikte Konvexität von φ ist äquivalent zu b), c), d) und e) jeweils mit "$<$".

Lemma 17.2. *Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ konvex, so folgt:*

$$\delta_+ \varphi(x) = \lim_{t \to x_+} \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t-x} \text{ existiert } \forall\, x \in I^\circ$$

$$\delta_- \varphi(x) = \lim_{t \to x_-} \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t-x} \text{ existiert } \forall\, x \in I^\circ$$

Beweis. Es gilt $s < x < t < y \in I^\circ$. Daraus folgt:

$$\frac{\varphi(s)\,\varphi(x)}{s-x} \leq \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t-x} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y-x}$$

Einerseits ist nun $t_n > x$, andererseits $t_{n+1} < t_n \to \underbrace{\frac{\varphi(t_n) - \varphi(x)}{t_n - x}}_{\geq \frac{\varphi(s)-\varphi(x)}{s-x}}$ monoton fallend. Aus dem Satz der monotonen Konvergenz folgt also, dass der Grenzwert existiert! $\square$

Bemerkung. *Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ konvex und $m \in I^\circ$, dann gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit*

$$\boxed{\varphi(t) \geq \varphi(m) + \alpha(t - m)} \; \forall t \in I \tag{2}$$

Ist φ strikt konvex, so gilt „>" in (2) für alle $t \in I$ mit $t \neq m$!

(Zusatz: Jedes $\alpha \in [\partial_-\varphi(m), \partial_+\varphi(m)]$ geht in (2)!)

Satz 17.3 (Jensensche Ungleichung)**.** *Sei $(x, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum (also $\mu(X) = 1$), $\varphi : I \to \mathbb{R}$ konvex und $f : X \to I$ μ-integrierbar. Dann ist $\varphi \circ f$ $\mathcal{A}$-messbar und $(\varphi \circ f)^{-1}$ μ-integrierbar (also ist $\varphi \circ f$ quasi-integrierbar). Außerdem gilt*

$$\boxed{\int \phi \circ f \, d\mu \geq \varphi\left(\int f \, d\mu\right)} \tag{1}$$

Ferner ist f μ-f.ü. konstant falls φ strikt konvex ist und in (3) sogar „=" gilt (dann ist also auch $f = \int f \, d\mu$ μ-f.ü.).

Beweis. Sei a der linke und b der rechte Rand von I. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\implies a \leq f \leq b \\
&\implies 0 \leq \int f - a \, d\mu = \int f \, d\mu - a\mu(x) = \int f \, d\mu - a \\
&\implies a \leq \int f \, d\mu \underset{\text{analog}}{\leq} b
\end{aligned}$$

Setze $m := \int f \, d\mu$. Angenommen, $a \notin I$.

$$\begin{aligned}
&\implies f - a > 0 \;\; \mu\text{-f.-ü.} \\
&\implies \int f - a \, d\mu > 0 \implies m > a
\end{aligned}$$

Genauso ist $m < b$, falls $b \notin I$. Falls $a \in I$ und $m = a$, so folgt mit dem gleichen Argument:

$$f = m = a \;\; \mu\text{-f.-ü.}$$

Falls $b \in I$ und $m = b$, so folgt ebenfalls gleich:

$$f = m = b \;\; \mu\text{-f.-ü.}$$

In diesem Fall ist also $\int \varphi(f)\, d\mu = \int \varphi(m)\, d\mu = \varphi(m)$ Jensen ok(?)

Sei $m \in I^\circ$. Es folgt mit (2):

$$\begin{aligned} \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : \varphi(t) &\geq \varphi(m) + \alpha(t-m) \ \forall\, t \in I \\ \int \varphi(f)\, d\mu &\geq \int \varphi(m) + \alpha(f-m)\, d\mu \\ &= \varphi(m) + \alpha \left(\underbrace{\int f\, d\mu}_{=m} - m \right) \\ &= \varphi(m) + \alpha(m-m) = \varphi(m) \end{aligned}$$

$\implies$ Behauptung

Ist φ strikt konvex und $m \in I^\circ$, so gilt:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{(\varphi(f) - \varphi(m) - \alpha(f-m))}_{\geq 0\ (2)}\, d\mu &= \int \varphi(f)\, d\mu - \varphi(m) - 0 \\ &= \int \varphi(f)\, d\mu - \varphi(m) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dabei setzen wir immer noch $m = \int f\, d\mu$. Letztere Gleichheit gilt, wenn $\int \varphi(f)\, d\mu = \varphi\left(\int f\, d\mu\right)$ ist. Ein alter Satz $\underbrace{\varphi(f(x)) - \varphi(m) - \alpha(f(x)-m)}_{>0 \text{ falls } f(x) \neq m} = 0$ für μ-f.-ü. $x \in X$. Ist φ strikt konvex und $\int \varphi(f)\, d\mu = \int f\, d\mu$, so folgt

WHAT DOES THAT MEAN?

$$f = m = \int f\, d\mu \quad \mu\text{-f.-ü. !}$$

$\square$

Anwendung: $t \longmapsto \exp t$ ist strikt konvex. Also:

$$\Longrightarrow \int \exp f \, d\mu \geq \exp \int f \, d\mu$$

$$\text{und } \text{“}=\text{”} \Longrightarrow f = \int f \, d\mu \quad \mu\text{-f.-ü. .}$$

$$\varphi(t) \leq \varphi(m) + \alpha(t-m)$$
$$\Longrightarrow \varphi^{-}(t) \leq \varphi^{-}(m) + |\alpha|(|t|+m)$$
$$\Longrightarrow f = \log g$$

$$\Longrightarrow \int g \, d\mu = \int \exp(\log g) \, d\mu \geq \exp\left(\int \log g \, d\mu\right)$$

$$\text{“}=\text{”} \Longrightarrow g = \ \mu\text{-f.-ü. konstant}$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N = 1$$
$$\mu(\{l\}) := \alpha_l \mu(\{l\}) := \alpha_l \text{ Zählmaß auf } \{1, 2, \ldots, N\}$$
$$g(k) := x_k > 0$$
$$\int \log(g) \, d\mu = \sum_{n=2}^{N} (\log(x_k)) \alpha_k = \sum_{n=1}^{N} \log\left(x_k^{\alpha_k}\right)$$
$$\int g \, d\mu = \sum_{j=1}^{N} \alpha_k x_k \geq \exp \sum_{k=1}^{N} \log\left(x_k^{\alpha_k}\right) \leq \prod_{k=1}^{N} x_k^{\alpha_k} \quad \text{für } x_k \geq 0$$

Pp 16.12.2019

18 $\mathcal{L}^p$-Räume, Hölder- und Minkowskiungleichung

Frage: Welche Eigenschaften haben (messbare) Abbildungen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) für die $|f|^p$ für ein $p > 1$ (oder > 0) integrierbar ist? (Meistens nimmt man $p > 1$.)

Notiz: Ist $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) messbar, so ist auch $|f|^p$ messbar mit:

$$\{|f|^p \geq \alpha\} = \begin{cases} X & \text{falls } \alpha \leq 0 \\ |f| \geq \alpha^{\frac{1}{p}} & \text{falls } \alpha > 0 \end{cases}$$

Wir definieren die Abbildung:

$$N_p(f) := \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{für } 0 < p < \infty$$

Für $p = \infty$ definieren wir: $N_\infty(f) := \inf\{k > 0 \mid |f| < k \text{ fast überall}\}$

Bemerkung. *N_p ist keine Norm, aber $0 \leq N_p \leq \infty$. Man betrachte beispielsweise $f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. Dann ist $\left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0$, aber $f \neq 0$.*

Es gilt sofort:

$$N_0 (\alpha f) = |\alpha| \, N_0 (f) \;\; \forall \, \alpha \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}. \tag{1}$$

Für $N_p (f) \, , \; N_p (g) < \infty$ ist auch $N_p (f+g) < \infty$.

Beweis. Sei $0 < p < \infty$. Dann ist

$$|f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq (2 \max (|f| \, , |g|))^p \leq 2^p \left(|f|^p + |g|^p\right) \tag{2}$$

$$\Longrightarrow \int |f+g|^p \, d\mu \leq 2^p \int |f|^p + |g|^p \, d\mu = 2^p \left(\int |f|^p \, d\mu + \int |g|^p \, d\mu \right) < \infty$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen der Voraussetzung $N_p (f) \, , N_p (g) < \infty$. □

Definition 18.1. *Eine Abbildung $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) heißt p-fach μ-integrierbar, ($0 < p < \infty$), falls f messbar und $|f|^p$ μ-integrierbar ist.*
Äquivalent: f ist messbar $\Longleftrightarrow$ $N_p (f) < \infty$

Fall $p = 1$: Stimmt mit den integrierbaren Funktion überein.

Fall $p = 2$: Heißen auch quadratisch integrierbare Funktionen;
Spezialfall, da $\int \overline{f} g \, d\mu =: \langle f, g \rangle$.

Definition 18.2. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Messraum und die Räume $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}} := \{ \, f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ messbar und } N_p (f) < \infty \, \}$. für $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}$ oder $\mathbb{C}$.*
Wir schreiben manchmal $\mathcal{L}^p$ oder $\mathcal{L}^p (X)$ $(0 < p < \infty)$ und nennen diese Menge alle p-fach integrierbaren Funktionen.

Bemerkung.

1) *(1) und (2) zeigen, dass $\mathcal{L}^p$ ein Vektorraum ist.*
2) *Ist $f \in \mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}$, so ist $|f| < \infty$ μ-f.ü. . Für $\int |f|^p \, d\mu < \infty$ gilt: $A_f := \{ \, |f| = +\infty \, \}$ ist eine μ-Nullmenge. Sei nun $\tilde{f} := \begin{cases} f & \text{auf } A_f^C \\ 0 & \text{auf } A_f \end{cases}$ Dann ist $f = \tilde{f}$ μ-f.ü. und $\tilde{f} \in \mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}$!*
   In diesem Sinne gilt $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}} := \mathcal{L}^p_{\overline{\mathbb{R}}}$. Ähnliches gilt für $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}} = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}} + i \cdot \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$.

Satz 18.3 (Hölder-Ungleichung)**.** *Seien p und q dual, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $1 \leq p \leq \infty$. Sei $f \in \mathcal{L}^p$ und $g \in \mathcal{L}^q$ und $f \cdot g$ das punktweise Produkt von f und g (also $f \cdot g : X \to \mathbb{K}$*

oder $\overline{\mathbb{R}}$ mit $x \longmapsto f(x)\,g(x)$). Dann gilt $f \cdot g \in \mathcal{L}^1$ und

$$\boxed{\left|\int f \cdot g \; d\mu\right| \leq \int |f \cdot g| \; d\mu \overset{\text{Hölder}}{\leq} N_p(f)\, N_q(g)} \tag{3}$$

Genau dann wenn in der ersten Ungleichung von (3) Gleichheit gilt, ist
i) $\quad f \cdot g = e^{i\varphi} |f| \cdot |g|$ *μ-f.ü. für ein $\varphi \in [0, 2\pi)$*

Es gilt: {φ nicht μ-f.ü. 0 $\Longrightarrow$ Gleichheit in der 2. Ungleichung von (3)} $\Longleftrightarrow$ $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ mit
ii.a) *Ist $1 < p < \infty : |g| = \lambda\, |f|^{p-1} \quad \mu$-f.-ü. .*
ii.b) *Ist $p = 1 : |g| \leq \lambda \quad \mu$-f.-ü. .*
ii.c) *Ist $p = \infty$, so ist* $\begin{cases} |f| \leq \lambda & \mu\text{-f.-ü.} \\ |f| = \lambda & \mu\text{-f.-ü. auf } \{\, g \neq 0 \,\}\,. \end{cases}$

Bemerkung. *Der Spezialfall $p = q = 2$ entspricht der Cauchy-Schwartz-Ungleichung (CSU):*

$$|\langle a, b\rangle| = \|a\|\,\|b\| \underbrace{\cos(\theta)}_{\leq 1} \leq \|a\|\,\|b\| \tag{CSU}$$

$$\left|\int fg \; d\mu\right| \leq \left(\int |f|^2 \; d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int |g|^2 \; d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \tag{ p = q = 2}$$

Hölder lässt sich auf mehrere Funktionen verallgemeinern. Sei $1 \leq r, p_j \leq \infty, 1 \leq j \leq k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j} = \frac{1}{r}$ (für $r = 1$ und $p_1 = q$ und $p_2 = p$ ist dies die Hölderdualität). Dann gilt:

$$\boxed{N_r\left(\prod_{j=1}^{k} f_j\right) \leq \prod_{j=1}^{k} N_{p_j}(f_j)} \tag{4}$$

Beweis. Hausaufgabe. ☹ $\square$

Beweis zu Hölder und dem Fall der Gleichheit. Wir hatten bereits die Δ-Ungleichung für Integrale und $\left|\int h \; d\mu\right| \leq \int |h| \; d\mu$ und damit gilt sofort die erste Ungleichung in (3) (indem wir $h = f \cdot g$ setzen). Angenommen es gilt „=“, dann folgt $\mathbb{C} \ni \int h \; d\mu = e^{i\varphi} \left|\int h \; d\mu\right| = e^{i\varphi} \int |h| \; d\mu$ und damit

$$\mathbb{R} \ni \left|\int h \; d\mu\right| = e^{-i\varphi} \int h \; d\mu = \int e^{-i\varphi} h \; d\mu = \operatorname{Re}\left(\int e^{-i\varphi} h \; d\mu\right) = \int \operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi} h\right) \, d\mu \leq \int |h| \; d\mu$$

Da sogar „=“ nach Annahme gilt, ist

$$\left|\int h\ d\mu\right| = \int |h|\ d\mu \implies \int |h| - \mathrm{Re}\left(e^{-i\varphi}h\right)\ d\mu = 0$$
$$\overset{15.2}{\implies} |h| = \mathrm{Re}\left(e^{-i\varphi}h\right)\ \mu\text{-f.-ü.} \qquad (*)$$

Da im Allgemeinen $h \in \mathbb{C}$ gibt es eine Abbildung $\lambda : X \to [0, 2\pi)$ mit $h(x) = e^{i\lambda(x)} |h(x)|$ μ-f.ü.
Mit $(*)$ gilt dann

$$|h| = \mathrm{Re}\left(e^{-i\varphi}h\right) = \mathrm{Re}\left(e^{-i\varphi}e^{i\lambda}|h|\right) = |h|\,\mathrm{Re}\left(e^{-i(\varphi-\lambda)}\right) = |h|\underbrace{\cos\varphi - \lambda}_{=1}$$

Also ist $\lambda = \varphi$ und somit konstant.

Für $0 < h < \infty$ ist $\lambda = \varphi$ μ-f.ü. gilt

$$\implies h = e^{i\varphi}|h| \text{ auf } \{\,|h| < \infty\,\}\,(\leftarrow \text{ Nullmenge})$$
$$\implies h = e^{i\varphi}|h| \quad \mu\text{-f.-ü. .}$$

Sei $1 < p < \infty$ und somit auch $1 < q < \infty$ (Erinnerung: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Da $|f \cdot g| = |f| \cdot |g|$, können wir o.B.d.A. $f \geq 0$ annehmen. Ist $N_q(g) = 0$, so folgt $g = 0$ μ-f.ü. und somit $f \cdot g = 0$ μ-f.ü. , woraus direkt die Hölderungleichung folgt. Sei also $A := \{\,g > 0\,\}$. Dann ist $\int g^q\ d\mu = \int_A g\ d\mu$ und somit $\int f \cdot g\ d\mu = \int_A f \cdot g\ d\mu$. Das heißt wir können uns immer auf A einschränken oder alternativ $g > 0$ auf X annehmen. Also ist $\frac{1}{g}$ reellwertig auf X. Wir definieren das Maß (mit Dichte) $\nu := \frac{1}{N_q(g)} g^q \mu$. Das heißt $\nu(B) = \frac{1}{N_q(g)} \int_B g^q\ d\mu$. Sei $F := f \cdot g^{-\frac{q}{p}}$. Dann folgt

$$N_q(g)^q \int F\ d\nu = \int f\ \underbrace{g^{-\frac{q}{p}} g^q}_{g^{q\left(1-\frac{1}{p}\right)}}\ d\mu$$

ν ist dabei das normierte Maß, da $\nu(x) = \frac{N_q(g)^q}{N_q(g)^q} = 1 = \int fg\ d\mu$

$$\begin{aligned}
\implies \left(\frac{1}{N_q(g)^q}\int fg\ d\mu\right)^p &= \left(\int F\ d\nu\right)^p \\
&\leq \left(\int F^p\ d\nu\right) && \text{(Jensen Ugl.)} \\
&= \int f^p g^{-q}\ d\nu \\
&= \dots
\end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\int fg\ d\mu \leq N_p(f) \cdot N_p(g)}$$

$\square$ Ergänzen

Wiederholung:

$N_p(f) := \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ für $0 < p < \infty$ und $N_\infty(f) := \inf\{\, k > 0 \mid |f| < k \ \mu\text{-f.-ü.} \,\}$
Wir haben die Hölder-Ungleichung für $0 < p,\ q < \infty$ gezeigt.
Es war $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ f \in \mathcal{L}^p$ und $g \in \mathcal{L}^q$. Dann gilt:

$$N_1(f \cdot g) \leq N_p(f) \cdot N_q(g) \qquad \text{(Idee: } |f \cdot g|^p \overset{|\cdot|^p \text{ ist konvex}}{\rightsquigarrow} \text{Jensens Ungleichung)}$$

Fortsetzung des Beweises der Hölder-Ungleichung. Betrachte nun den Fall $q = \infty \implies p = 1$ (Der Fall $p = \infty$ und $q = 1$ folgt dann symmetrisch). Sei also $g \in \mathcal{L}^\infty$ und $f \in \mathcal{L}^1$. Wir definieren nun $\infty > K := N_\infty(g)$, oBdA $f, g \geq 0 \implies f \cdot g \leq K \cdot f$ μ-f.ü. Also ist $N_1(fg) = \int fg \, d\mu \leq K \int f \, d\mu \underset{Def}{=} N_\infty(g) N_1(f)$

Frage: Was gilt bei Gleichheit?

$$\begin{aligned}
&\int fg \, d\mu = N_1(f) N_\infty(g) = \int kf \, d\mu \\
&\implies \int fg - kf \, d\mu = 0 && \implies k \cdot f = g \cdot f \quad \mu\text{-f.-ü.} \\
&A = \{\, 0 < f < \infty \,\} && \implies g(x) = k \ \forall x \in A \\
& && \implies g \leq k \ \mu\text{-f.-ü. und } g = k \text{ auf } \{\, f > 0 \,\}
\end{aligned}$$

□

Satz 18.4 (Minkowski-Ungleichung (Δ-Ungleichung für N_p))**.**
Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$). Dann gilt:

$$N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g)$$

Bei Gleichheit gilt mit $1 < p < \infty$:

$$\exists \lambda \leq 0 : g = \lambda f \vee f = \lambda g \ \mu\text{-f.-ü.}$$

Bemerkung. *Für $N_p(f) + N_p(g) < \infty$ gibt es Nullmengen N_1, N_2 mit $|f| < \infty$ auf N_1 und $|g| < \infty$ auf N_2. Also ist $N = N_1 \cup N_2$ eine Nullmenge und $f + g$ ist auf N^C wohldefiniert.*

Beweis.

Schritt 1: Für $p = 1$ und $p = \infty$ ist die Aussage trivial, denn:

$p = 1$ $\quad |f + g| \leq |f| + |g| \underset{Linearitt}{\Longrightarrow} N_1 (f + g) \leq N_1 (f) + N_1 (g)$

$p = \infty$ Ist $|f| < L_1$ μ-f.ü. und $|g| < L_2$ μ-f.ü. , so ist $|f + g| \leq |f| + |g| \leq L_1 + L_2$ μ-f.ü.
Demnach ist aber auch $N_\infty (f + g) = \inf (L > 0 | \, |f + g| \leq L \ \mu\text{-f.-ü.}) \leq N_\infty (f) + N_\infty (g)$

Schritt 2: Mit $N_p (f) + N_p (g) < \infty$ folgt $N_p < \infty$ für $0 < p < \infty$.

Beweis. Es ist $|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p \max (|f|^p , |g|^p)$.
Also ist $N_p (f + g)^p = \int |f + g|^p \, d\mu \leq 2^p (N_p (f)^p + N_p (g)^p) < \infty$. □

Schritt 3:

$$\int |f + g| \, d\mu = \int |f + g| \, |f + g|^{p-1} \, d\mu \leq \int (|f| + |g|) \, |f + g|^{p-1} \, d\mu \tag{6}$$
$$= \int |f| \, |f + g|^{p-1} \, d\mu + \int |g| \, |f + g|^{p-1} \, d\mu$$

Sei nun $q > 0$ sodass $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, also $q = \frac{p}{p-1}$. Damit ist:

$$\underbrace{\int |f| \, |f + g|^{p-1} \, d\mu}_{=N_1\left(\underbrace{|f|}_{s} \underbrace{|f+g|^{p-1}}_{t}\right)} \overset{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{=N_p\left(\underbrace{f}_{s}\right)} \underbrace{\left(\int |f + g|^{p-1} \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}}_{=N_q\left(|f+g|^{p-1}\right)}$$
$$= N_p (f) \left(\left(\int |f + g|^{p-1} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{p-1}$$
$$= N_p (f) \, N_p (f + g)^{p-1}$$

Dasselbe gilt nach Vertauschen von f und g, d.h.:

$$\int |f| \, |f + g|^{p-1} \, d\mu \leq N_p (f) \, N_p (f + g)^{p-1} \tag{7}$$
$$\int |g| \, |f + g|^{p-1} \, d\mu \leq N_p (g) \, N_p (f + g)^{p-1} \tag{8}$$

Mit (6), (7) und (8) folgt

$$N_p (f + g)^p = \int |f + g|^p \, d\mu \leq (N_p (f) + N_p (g)) \, N_p (f + g)^{p-1}$$

Es ist $N_p (f + g) < \infty$ falls $f + g \in \mathcal{L}^p$

$$\Longrightarrow N_p (f + g) \leq N_p (f) + N_p (g)$$

Schritt 4: Fall der Gleichheit

Angenommen $N_p(f+g) = N_p(f) + N_p(g)$ und $f, g \in \mathcal{L}^p$ und $N_p(f) > 0$. Dann haben wir Gleichheit in (6), (7) und (8).

Beachte: Sind $z, w \in \mathbb{C}$ dann gilt $|z+w| \leq |z| + |w|$. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
|z+w| = |z| + |w| &\iff z, w \text{ sind parallel} \\
&\iff \exists\, \lambda > 0 \text{ mit } w = \lambda z \;\; z \neq 0 \\
&\text{oder } z = \lambda w \text{ falls } w \neq 0 \\
&\text{oder } z = w = 0
\end{aligned}
$$

Skizze

Es war (6) mit Gleichheit:

a)
$$\int |f+g|^p \, d\mu = \int |f+g| \, |f+g|^{p-1} \, d\mu = \int (|f| + |g|) \, |f+g|^{p-1} \, d\mu$$

Dies ist äquivalent zu $\exists\, \tilde{\lambda} : x \to [0, \infty)$ mit $g = \tilde{\lambda} f$ μ-f.ü. (falls f nicht 0 ist μ-f.ü. , sonst $f = \tilde{\lambda} g$)

b) Gleichheit in (7) und (8) bedeutet Gleichheit in Hölder, was nach Satz 3 äquivalent ist zu:
$$\exists\, 0 \leq C_1, C_2 < \infty \text{ mit } |f+g| = C_1 |f| \text{ und } |f+g| = C_2 |g|$$

Es ist $\{ f + g \neq 0 \}$ keine Nullmenge. Für $f + g = 0$ μ-f.ü. folgt „=“ kann nur gelten falls $f = 0 = g$ μ-f.ü.
Wir nehmen aber an $N_p(f) > 0$!

$\implies C_1, C_2 > 0$

$\implies C_1 |f| = |f+g| = C_2 |g| = C_2 \tilde{\lambda} |f|$

$\implies \forall\, x \in A_1 = \{ 0 < |f| < \infty \}$ gilt $C_1 |f(x)| = C_2 \tilde{\lambda} |f(x)|$ mit $\tilde{\lambda}(x) \equiv \dfrac{C_1}{C_2} = \lambda$

(impliziert NICHT $f = g$)

$\implies \forall\, x \in A$ ist $g(x) = \tilde{\lambda} f(x) = \lambda f(x)$ für $f(x) = 0$

$|g(x)| = |g(x) + f(x)| = C_1 |f(x)| = 0 \qquad \implies g(x) = 0$

$\square$

Bemerkung. *Nach Satz 4 „Minkowski-UGL“ folgt, dass* $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$ *ist* N_p *eine Halbnorm auf* $\mathcal{L}^p$*, denn* $\forall\, f, g \in \mathcal{L}^p$ *gilt:*

a) $N_p(f) \geq 0$ $\quad$ *($N_p(f) = 0 \implies f = 0\mu$-f.-ü.)*
b) $N_p(\alpha f) = |f| N_p(f) \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *(oder $\mathbb{C}$)*
c) $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$

„$d(x,y) = \|x-y\|$“

Korollar 18.5. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mu(X) < \infty$.*
Dann gilt: $\mathcal{L}^1 \subset \mathcal{L}^p \ \forall 1 \leq p \leq \infty$

Beweis. Für $p = \infty$ gilt $|f| \leq N_\infty(f)$ μ-f.ü.. Also ist $\int_X |f| \ d\mu \leq \int_X N_\infty(f) \ d\mu = N_\infty(f) \mu(X)$. Ist nun $q \leq p < \infty$ so folgt mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dass

$$\int_X |f| 1 \ d\mu \underset{\text{Hölder}}{\leq} N_p(f) N_q(1) = N_p(f) \left(\int_X 1^q \ d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = N_p(f) \mu(X)^{\frac{1}{q}}$$

□

19 Konvergenzsätze auf $\mathcal{L}^p$

$N_p : \mathcal{L} \to \mathbb{R}^+$ ist eine Halbnorm.
Setze $d_p(f,g) := N_p(f-g) \implies d_p(f,g) \leq d_p(f,h) + d_p(h,g)$ $\quad$ Δ-Ungleichung
Und $d_p(f,g) = d_p(g,f) \geq 0$
Aber nicht $d_p(f,g) = 0 \implies f = g$ ↯ $\circledast$
Aber es ist $d_p(f,g) = 0 \implies f = g$ μ-f.ü.
Abstandsfunktionen ohne die Eigenschaft ($\circledast$) nennt man Pseudometriken

Definition 19.1. *Für $f, g \in \mathcal{L}^p$ ist $d_p(f,g) = N_p(f-g)$ die Pseudometrik für die Konvergenz im p-ten Mittel oder die $\mathcal{L}^p$ -Konvergenz.*
Ist $(f_n)_n$ Folge in $\mathcal{L}^p$ die im p-ten Mittel gegen eine Fkt. $f \in \mathcal{L}^p$ wenn $\lim\limits_{n\to\infty} d_p(f_n - f) = \lim\limits_{n\to\infty} N_p(f_n - f) = 0$

23.12.2019

Wir hatten:

- $N_p(f) := \left(\int |f|^p \ d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$
- Δ-Ungleichung: $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$
- Pseudodistanz: Sei $d_p(f,g) := N_p(f-g)$. Dann besitzt sie für $0 < p \leq \infty$ alle Eigenschaften einer Metrik außer $d_p(f,g) = 0 \implies f = g$ μ-f.-ü. und nicht $f = g$.
- $f_n \to f$ in $\mathcal{L}^p$: $N_p(f_n - f) \to 0, n \to \infty$
- Umgekehrte Δ-Ungleichung $|N_p(f) - N_p(g)| \leq N_p(f-g)$

Beweis.

$$\begin{aligned}
&N_p(f) = N_p(f-g+g) \le N_p(f-g) + N_p(g)\\
&\implies N_p(f) - N_p(g) \le N_p(f-g)\\
&\implies N_p(g) - N_p(f) \le N_p(g-f) = N_p(f-g)\\
&\implies |N_p(f) - N_p(g)| \le N_p(f-g)
\end{aligned}$$

□

Für $p = 1$ erhalten wir die Konvergenz im Mittel und für $p = 2$ die Konvergenz im quadratischen Mittel. Für $A \in \mathcal{A}$ erhalten wir:

$$\left|\int_A f\, d\mu - \int_A g\, d\mu\right| \le \int_A |f-g|\, d\mu \le \int |f-g|\, d\mu = N_1(f-g) \tag{1}$$

Für $1 \le p \le \infty$ erhalten wir weiterhin:

$$|N_p(\mathbb{1}_A f) - N_p(\mathbb{1}_A g)| \le N_p(\mathbb{1}_A(f-g)) \le N_p(f-g) \tag{2}$$

Satz 19.2. *Für jede Folge $(f_n)_n \subset \mathcal{L}^p$, welche im p-ten Mittel gegen $f \in \mathcal{L}^p$ konvergiert, gilt $\forall A \in \mathcal{A}$:*
a) $p = 1 : \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu = \int_A f\, d\mu$
b) $1 < p < \infty : \lim_{n\to\infty} \int_A |f_n|^p\, d\mu = \int_A |f|^p\, d\mu$

Beweis. Der Fall $p = 1$ folgt aus (1).

Für $1 < p < \infty$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_A |f_n|^p\, d\mu = (N_p(\mathbb{1}_A f_n))^p\\
&\overset{(2)}{\implies} f_n \to f \text{ in } \mathcal{L}^p : N_p(\mathbb{1}_A f_n) \to N_p(\mathbb{1}_A f), n \to \infty\\
&0 \le t \longmapsto t^p \text{ ist stetig}\\
&\implies \lim_{n\to\infty} \int_A |f_n|^p\, d\mu = \lim_{n\to\infty} N_p(\mathbb{1}_A f_n)^p = N_p(\mathbb{1}_A f)^p
\end{aligned}$$

□

Satz 19.3. *$(f_n)_n \subset \mathcal{L}^p$ mit $1 \le p < \infty$ konvergieren μ-f.ü. gegen $f \in \mathcal{L}^p$. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n|^p\, d\mu = \int |f|^p\, d\mu \tag{3}$$

$$\iff f_n \to f \text{ in } \mathcal{L}^p \text{ für } n \to \infty \tag{4}$$

Bemerkung.

$$
\begin{aligned}
& f_n \;\; \mu\text{-}f.\text{-}\ddot{u}. \\
& \overset{Fatou}{\Longrightarrow} \int |f|^p \, d\mu = \int \liminf |f_n|^p \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int |f_n|^p \, d\mu \\
& \Longrightarrow f_n \in \mathcal{L}^p, f \in \mathcal{L}^p, f_n \to f \;\; \mu\text{-}f.\text{-}\ddot{u}. \\
& \Longrightarrow \boxed{N_p(f) \le \liminf_{n\to\infty} N_p(f_n)}
\end{aligned}
$$

Beweis.

$\Longleftarrow$ Man wende Satz 2 an mit $A = X$, wobei $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

$\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
& \alpha, \beta \ge 0 : (\alpha + \beta)^p \le (2\max(\alpha,\beta))^p = 2^p \max(\alpha^p, \beta^p) \le 2^p(\alpha^p + \beta^p) \\
& \Longrightarrow |f_n - f|^p \le (|f_n| + |f|)^p \le 2^p(|f_n|^p + |f|^p) \\
& \mathcal{L}^1 \ni g_n := 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p \ge 0 \quad f_n \to f \;\; \mu\text{-f.-ü.} \\
& \Longrightarrow g_n \to 2^{p+1}|f|^p \;\; \mu\text{-f.-ü.} \\
& \Longrightarrow 2^{p+1} \int |f|^p \, d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} g_n \, d\mu \overset{Fatou}{\le} \liminf_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu \\
& \quad \le \underbrace{2^p \liminf_{n\to\infty} \int |f_n|^p \, d\mu}_{\underset{(3)}{=} \int |f|^p \, d\mu} + 2^p \int |f|^p \, d\mu - \limsup \int |f_n - f|^p \, d\mu \\
& \Longrightarrow 2^{p+1} \int |f|^p \, d\mu \le 2^{p+1} \int |f|^p \, d\mu - \limsup \int |f_n - f|^p \, d\mu \\
& \Longrightarrow \limsup \int |f_n - f|^p \, d\mu \le 0 \\
& \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu = 0 \\
& \Longrightarrow f_n \to f \text{ in } \mathcal{L}^p
\end{aligned}
$$

□

Lemma 19.4. *Sei $(f_n)_n \subset \mathcal{M}^+(X, \mathcal{A})$. Dann gilt:*

$$\forall\, 1 \le p < \infty : N_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n) \qquad (\infty\text{-}\Delta\text{-Ungleichung})$$

Beweis. Den Fall $p = \infty$ soll man sich selber überlegen. Betrachte also $1 \le p < \infty$. Die Partialsummen $s_n := f_1 + \cdots + f_n$ sind wachsend, also $s_{n+1} \ge s_n$ und $s_n \to$

$\sum_{j=1}^{\infty} f_j \;\; n \to \infty$. Es gilt sogar $\sup_n s_n = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$, womit $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ obere Einhüllende für $(s_n)_n$ ist. Weiterhin ist:

$$N_p(s_n) = N_p(f_1 + \dots f_n) \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} N_p(f_1) + \dots N_p(f_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n)$$

Auch haben wir $sup_n s_n^p \leq (\sum_{n=1}^{\infty} f_n)^p$. Also erhalten wir mit monotoner Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} N_p(s_n) = N_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n)$$

□

Satz 19.5 (majorisierte Konvergenz)**.** *Sei $(f_n)_n \subset \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit $1 \leq p < \infty$ μ-f.ü. konvergent und es gebe ein $0 \leq g \in \mathcal{L}^p$ mit*

$$\boxed{|f_n| \leq g \;\; \mu\text{-f.-ü.} \;\; \forall n \in \mathbb{N}} \tag{5}$$

Dann gibt es eine Funktion f auf X gegen die f_n μ-f.ü. konvergiert. Jede solche Funktion ist in $\mathcal{L}^p$ und $(f_n)_n$ konvergiert im p-ten Mittel gegen f, d.h. $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu = 0$.

Beweis. Aus der Annahme folgt direkt:

- $\exists$ Nullmenge $M_1 : \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert $\forall x \in M_1^c$
- $\exists$ Nullmenge $M_2 : g(x) < \infty \; \forall x \in M_2^c$

Definiere nun $M := M_1 \cup M_2$ und $f(x) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} & , x \in M^c \\ 0 & , x \in M \end{cases}$.

f ist damit $\mathcal{A}$-messbar und $|f| \leq g$ μ-f.-ü. . Wegen $|f_n| \leq g$ μ-f.-ü. $\exists$ Nullmengen $(N_n)_n$: $|f_n(x)| \leq g(x) \;\; \forall x \in N_n^c$. Damit ist $\tilde{M} := M \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ auch eine Nullmenge.
Es gilt also

$$\forall x \in \tilde{M}^c : |f(x)| \leftarrow |f_n(x)| \leq g(x) \implies |f(x)| \leq g(x)$$

Sei nun f irgendeine Funktion mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-f.-ü. .

$\implies |f| \leq g$ μ-f.-ü.

$\implies f \in \mathcal{L}^p$ (wegen $g \in \mathcal{L}^p$)

Definiere nun $g_n := |f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq (|f| + g)^p =: h \in \mathcal{L}^1$

$\implies h - g_n \leq 0$

$$\overset{Fatou}{\implies} \int h \, d\mu = \int \underbrace{\liminf_{n\to\infty} (h - g_n)}_{h \;\; \mu\text{-f.-ü.}} d\mu \leq \liminf \int (h - g_n) \, d\mu = \int h \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu$$

$$\implies \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu = 0$$

□

Bemerkung. *Der Begriff der Cauchy-Folge ist sinnvoll auch bei Halbräumen bzw. Pseudometriken und dadurch insbesondere auf* $\mathcal{L}^p$.

$0 \leq p \leq \infty : (f_n)_n \subset \mathcal{L}^p$ *ist eine Cauchyfolge, wenn:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} : d_p\left(f_n, f_m\right) = N_p\left(f_n - f_m\right) \leq \varepsilon\, \forall\, n, m \geq N_\varepsilon$$

Dies ist äquivalent zu

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \limsup_{m\to\infty} d_p\left(f_n, f_m\right) = \lim_{n\to\infty} \limsup_{m\to\infty} N_p\left(f_n - f_m\right) = 0}$$

Jede konvergente Folge in $\mathcal{L}^p$ *ist eine Cauchyfolge!*

Satz 19.6 (Vollständigkeit von $\mathcal{L}^p$)**.** *Sei* $1 \leq p \leq \infty$. *Sei* $(f_n)_n \subset \mathcal{L}^p$ *eine Cauchyfolge. Dann existiert* $f \in \mathcal{L}^p$ *gegen das* $(f_n)_n$ *im* p*-ten Mittel konvergiert. Eine geeignete Teilfolge konvergiert* μ*-f.ü. gegen* f*!*

Beweis. Den Fall $p = \infty$ soll man sich erneut selbst überlegen.

Schritt 1: Existenz eines Kandidaten für den Grenzwert.
Wir haben $(f_n)_n$ ist Cauchy:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \limsup_{m\to\infty} N_p\left(f_n - f_m\right) = 0}$$

Definiere nun die Teilfolge n_k: Sei $n_1 \in \mathbb{N}$ beliebig.

$$\Longrightarrow \text{ wähle } n_1 < n_2 \in \mathbb{N} : N_p\left(f_{n_2} - f_{n_1}\right) \leq 2^{-1}$$
$$\Longrightarrow \text{ wähle } n_2 < n_3 \in \mathbb{N} : N_p\left(f_{n_3} - f_{n_2}\right) \leq 2^{-2}$$

usw.

$$\Longrightarrow \boxed{\forall\, k \in \mathbb{N} : n_k < n_{k+1} \wedge N_p\left(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right) \leq 2^{-k}}$$

Setze $g := f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ und $g := \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|$. Nach Lemma 4 gilt dann:

$$\boxed{N_p(g) = N_p\left(\sum_{k=1}^{\infty} |g_k|\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} N_p(g_k) = \sum_{k=1}^{\infty} N_p\left(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int g^p \, d\mu \leq 1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{g < \infty \ \mu\text{-f.-ü.}}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \text{ konvergiert absolut für } \mu\text{-fa. } x \in X$$

$$\sum_{j=1}^{k} g_j = \sum_{j=1}^{k} \left(f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right) = f_{n_{k+1}} - f_{n_1}$$

$$\Longrightarrow f_{n_{k+1}} = \sum_{j=1}^{k} g_j + f_{n_1} \Longrightarrow \left(f_{n_{k+1}}\right)_k \text{ ist } \mu\text{-f.ü. konvergent}$$

Schritt 2: Konvergenz von f_{n_k} gegen f in $\mathcal{L}^p$
Es gilt

$$\begin{aligned}
\left|f_{n_{k+1}}\right| &= |g_1 + \cdots + g_k + f_{n_1}| \\
&\leq |g_1| + \cdots + |g_k| + |f_{n_1}| \\
&\leq g + |f_{n_1}| \in \mathcal{L}^p
\end{aligned}$$

Also folgt aus der Monotonen Konvergenz und Satz 5 $f_{n_k} \to f$ in $\mathcal{L}^p$.

Schritt 3: $f_n \to f$ in $\mathcal{L}^p$:

$$\begin{aligned}
N_p(f_n - f) &= N_p(f_n - f_{n_k} + f_{n_k} - f) \\
&\overset{Minkowski}{\leq} N_p(f_n - f_{n_k}) + \underbrace{N_p(f_{n_k} - f)}_{\to 0, k \to \infty \text{ nach Schritt 2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{k\to\infty}{\Longrightarrow} N_p(f_n - f) &\leq \limsup_{k\to\infty} N_p(f - f_{n_k}) \\
&\leq \limsup_{m\to\infty} N_p(f - f_m) \\
\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} N_p(f - f_n) &\leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{m\to\infty} N_p(f_n - f_m) \\
&= 0 \ !
\end{aligned}$$

Also $f_n \to f$ in $\mathcal{L}^p$.

$\square$ 08.01.2020

Korollar 19.7. *Eine Cauchyfolge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p$, $1 < p < \infty$ *konvergiere* μ*-f.ü. gegen eine* $\mathcal{A}$*-messbare Funktion* f.
Es folgt:

$$f \in \mathcal{L}^p \text{ und } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } f \text{ in } \mathcal{L}^p$$

Beweis. Nach Satz 6 $\exists\, h \in \mathcal{L}^p, f_n \to h$ in $\mathcal{L}^p$ und eine Teilfolge von $(f_n)_n$ konvergiert μ-f.ü. gegen h. Also ist $f = h$ μ-f.ü. $\square$

$$\left(\int |f_n - h|^p \, d\mu \to 0 \quad n \to \infty\right)$$

Korollar 19.8. *Sei* $(f_n)_n \in \mathcal{L}^p, (g_n)_n \in \mathcal{L}^p, 1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f_n \to f$ *in* $\mathcal{L}^p$, $g_n \to g$ *in* $\mathcal{L}^p$. *Dann gilt* $f_n g_n \to fg$ *in* $\mathcal{L}^p$.

Beweis. $|f_n g_n - fg| \leq |f_n - f|\,|g_n| + |f|\,|g_n - g|$. Demnach ist also:

$$\begin{aligned}
N_1(f_n g_n - fg) &= \int |f_n g_n - fg| \, d\mu \leq \int |f_n - f|\,|g_n| \, d\mu + \int |f|\,|g_n - g| \, d\mu \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int |f_n - f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g_n|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g_n - g|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \underbrace{N_p(f_n - f)}_{\to 0 (n\to\infty)} \underbrace{N_q(g_n)}_{\text{beschränkt in n}} + N_p(f)\, \underbrace{N_q(g_n - g)}_{\to 0 (n\to\infty)} \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

$\square$

Korollar 19.9. *Sei* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ein endlicher Maßraum* $(\mu(x) < \infty)$. *Dann ist* $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^1 \;\; \forall\, p \geq 1$ *und ist* $(f_n)_n \subset \mathcal{L}^p, f_n \to f$ *in* $\mathcal{L}^p$, *dann ist auch* $f \in \mathcal{L}^1$ *und* $f_n \to f$ *in* $\mathcal{L}^1$.

Beweis. Sei $\infty \geq p > 1$. Wir haben:

$$\begin{aligned}
\int_X |f| \, d\mu &= \int_X 1 \cdot |f| \, d\mu \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \Bigg(\underbrace{\int_X 1 \, d\mu}_{=\mu(x)<\infty}\Bigg)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \mu(x)^{\frac{1}{q}} N_p(f) < \infty
\end{aligned}$$

, wobei $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Wegen $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^q, 1 \leq q \leq p$ und

$$\int |f-f_n| \, d\mu = \int 1 \cdot |f-f_n| \, d\mu \overset{\text{Hölder}}{\leq} \mu(x)^{\frac{1}{q}} \Bigg(\underbrace{\int |f-f_n|^p \, d\mu}_{\to 0, n \to \infty} \Bigg)^{\frac{1}{p}}$$

folgt sofort $f_n \to f$ in $\mathcal{L}^1$. □

20 Der fehlende Term in Fatou

Nach Fatou wissen wir, dass folgendes für $h_n \geq 0$ gilt:

$$\implies \boxed{\int \liminf_{n\to\infty} h_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int h_n \, d\mu} \tag{1}$$

Seien $f_n : X \to \mathbb{C}$ messbar, $f_n \in \mathcal{L}^p$ für ein $0 < p < \infty \quad f_n \to f$ μ-f.-ü.

$$\begin{aligned} \overset{\text{Fatou}}{\implies} \int |f|^p \, d\mu &= \int \liminf_{n\to\infty} |f_n|^p \, d\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int |f_n|^p \, d\mu \\ \implies f \in \mathcal{L}^p \text{ falls } & \boxed{\sup_n \int |f_n|^p \, d\mu < \infty} \end{aligned}$$

$$\left(\text{reicht: } \liminf_{n\to\infty} \int |f_n|^p \, d\mu < \infty \right)$$

Behauptung.

$$\int |f_n|^p \, d\mu = \int |f|^p \, d\mu + \int |f-f_n|^p \, d\mu + \underbrace{o(1)}_{\textit{Fehler } \to 0 (n\to\infty)} \tag{2}$$

Satz 20.1 (Fehlerterm in Fatou)**.** *Sei $(f_n)_n$ eine Folge messbarer komplexwertiger Funktionen mit $f_n \to f$ μ-f.ü. und $\int |f_n|^p \, d\mu \leq C \ \forall n \in \mathbb{N}$ und ein $0 < p < \infty$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n|^p - |f-f_n|^p - |f|^p \, d\mu = 0 \tag{3}$$

Bemerkung.

1) Resultat von Brézis-Lieb 1983

2)

$$\left| \int |f_n|^p \, d\mu - \int |f|^p \, d\mu - \int |f - f_n|^p \, d\mu \right| \leq \int ||f_n|^p - |f|^p - |f - f_n|^p| \, d\mu \overset{\textit{Satz 1}}{\to} 0$$

$\Longrightarrow$ *(2) gilt.*

3) Wichtig in der modernen Variationsrechnung!

Skizze

Beweis. Für $f_n = f + g_n$ gilt $g_n \to 0$ μ-f.ü. . Außerdem ist

$$|f_n|^p - |f - f_n|^p - |f|^p = |f + g_n|^p - |g_n|^p - |f|^p$$

Behauptung. $\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, C_\varepsilon < \infty$ *sodass* $\forall\, a, b \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$||a + b|^p - |b|^p| \leq \varepsilon \, |b|^p + C_\varepsilon \, |a|^p \tag{4}$$

Angenommen 4 gilt. Dann definiere

$G_n^\varepsilon := (|f + g_n|^p - |g_n|^p - |f|^p - \varepsilon \, |g_n|^p)_+$

$\Longrightarrow$ $G_n^\varepsilon \to 0$ μ-f.-ü. und

$\Longrightarrow$ $||f + g_n|^p - |g_n|^p - |f|^p| \leq ||f + g_n|^p - |g_n|^p| + |f|^p \underset{(4)}{\leq} \varepsilon \, |g_n|^p + (C_\varepsilon + 1) \, |f|^p$

$\Longrightarrow$ $\boxed{0 \leq G_n^\varepsilon \leq (1 + C_\varepsilon) \, |f|^p}$

Wir haben also eine integrierbare Majorante G_n^ε und somit nach dominierter Konvergenz

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \int G_n^\varepsilon \, d\mu = 0}$$

<u>Beachte</u>:

$$||f + g_n|^p - |g_n|^p - |f|^p| \leq \varepsilon \, |g_n|^p + G_n^\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \limsup_{n \to \infty} \int ||f + g_n|^p - |g_n|^p - |f|^p| \, d\mu \leq \varepsilon \boxed{\sup_n \int |g_n|^p \, d\mu}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \int |g_n|^p \, d\mu &= \int |f - f_n|^p \, d\mu \\ &\leq \int 2^p \left(|f|^p + |f_n|^p \right) d\mu \\ &= 2^p \left(\int |f|^p \, d\mu + \int |f_n|^p \, d\mu \right) \\ &\leq 2^{p+1} C =: D \qquad\qquad (C := \sup_n \textstyle\int |f_n|^p \, d\mu < \infty) \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\limsup_{n\to\infty} \int ||f+g_n|^p - |g_n|^p - |f|^p| \, d\mu \leq \varepsilon D \quad \forall \varepsilon > 0}$$

Damit folgt die Behauptung des Satzes. $\square$

Beweis von (4). Sei $1 \leq p < \infty$ und $\epsilon > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|a+b|^p - |b|^p &\leq (|a|+|b|)^p - |b|^p \quad \text{o.B.d.A. } a \neq 0 \\
&= |a|^p \left(1 + \left|\frac{b}{a}\right|\right)^p - |b|^p \\
&= |a|^p \left(\left(1 + \left|\frac{b}{a}\right|\right)^p - \left|\frac{b}{a}\right|^p\right) - \varepsilon\,|b|^p + \varepsilon\,|b|^p \\
&= |a|^p \left((1+t)^p - (1+\varepsilon)\,t^p\right) + \varepsilon\,|b|^p \ \text{ mit } t = \left|\frac{b}{a}\right|
\end{aligned}$$

Definiere $C_\varepsilon^+ := \sup_{t\geq 0} \left((1+t)^p - (1+\varepsilon)\,t^p\right) < \infty$!.

$$\implies |a+b|^p - |b|^p \leq C_\varepsilon\,|a|^p + \varepsilon\,|b|^p$$

Aus der umgekehrten Dreiecksungleichung folgern wir:

Checken ob das stimmt (ab hier).

$$\begin{aligned}
&|a+b| &&\geq ||a|-|b|| \\
\implies &|a+b|^p - |b|^p &&\geq ||a|-|b||^p - |b|^p \\
& &&= |a|^p \left(\left|1 - \left|\frac{b}{a}\right|\right|^p - (1-\varepsilon)\left|\frac{b}{a}\right|^p\right) - \varepsilon\,|b|^p \\
& &&\geq |a|^p \left(\left|1 - \left|\frac{b}{a}\right|\right|^p - (a-\varepsilon)\left|\frac{b}{a}\right|^p\right) + \varepsilon\,|b|^p \\
& &&= -\,|a|^p \left((1-\varepsilon)\,t^p - |1-t|^p\right) - \varepsilon\,|b|^p\,, \quad t = \left|\frac{b}{a}\right| \\
& &&\geq -C_\varepsilon^-\,|a|^p - \varepsilon\,|b|^p
\end{aligned}$$

, wobei wir für den letzten Schritt $C_\varepsilon^- := \sup_{t\geq 0} (t-\epsilon)\,t^p - |1-t|^p < \infty$ setzen. Also leistet $C_\varepsilon := \max\left(C_\varepsilon^-, C_\varepsilon^+\right)$ das Gewünschte. $\square$

21 Produkt-σ-Algebren

Gegeben seien endlich viele Maßräume $(X_j, \mathcal{A}_j)\,, j = 1..n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Produktmenge $X = \prod_{j=1}^n X_j = X_1 \times \cdots \times X_n$ kartesisches Produkt der Mengen. Es gilt $x \in X \implies x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_j \in X_j$.

Koordinatenprojektionen $p_j : X \to X_j, x \longmapsto p_j(x) = x_j$ für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$. $p_j(x)$ ist also die j-te Koordinate von x.

Frage: Was ist die (kleinste) σ-Algebra, die alle p_j $\mathcal{A} - \mathcal{A}_j$-messbar macht.

Antwort: $\boxed{\mathcal{A} := \sigma(p_1, \ldots, p_n)}$

Definition 21.1. *Die von den Abbildungen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ erzeugte σ-Algebra*

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j := \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n := \sigma(p_1, \ldots, p_n) = \bigcap \mathcal{A}$$

heißt das Produkt der σ-Algebren $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ oder Produkt-σ-Algebra. Dabei geht schneiden wir über alle $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}$ ist σ-Algebra in X und p_j ist $\mathcal{A}-\mathcal{A}_j$-messbar für alle $j = 1..n$. Sie ist also die kleinste σ-Algebra für die alle p_j $\mathcal{A} - \mathcal{A}_j$-messbar sind.

Frage: Angenommen wir haben einen Erzeuger $\mathcal{E}_j$ von $\mathcal{A}_j$ $(= \sigma(\mathcal{E}_j))$. Können wir mit denen einen Erzeuger von $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ basteln?

Satz 21.2 (Erzeugendenprinzip für Produkt-σ-Algebren)**.** *Seien $\mathcal{E}_j$ Erzeuger von $\mathcal{A}_j$ in X_j für die es Folgen $(E_{j,k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_j, E_{j,k} \uparrow X_j, (E_{j,k+1} \supset E_{j,k}, X_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k})$ gibt. Dann wird die σ-Algebra $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ von dem Mengensystem aller $E_1 \times \cdots \times E_n, E_j \in \mathcal{E}_j \ \ \forall j = 1, \ldots, n$ erzeugt, oder als Gleichung:*

$$\Longrightarrow \boxed{\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma(E_1 \times \cdots \times E_n, E_j \in \mathcal{E}_j, j = 1, \ldots, n)}$$

Bemerkung. *Sei $n = 2, \mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X_1\}, \mathcal{A}_2$ eine mindestens 4 Elemente enthaltende σ-Algebra in X_2. Dann sind $\mathcal{E}_1 = \{\emptyset\}, \mathcal{E}_2 = \mathcal{A}_2$ Erzeuger von $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$. Dann gilt:*

$$E_1 \in \mathcal{E}_1, E_2 \in \mathcal{E}_2 \implies E_1 \times E_2 = \emptyset \times E_2 = \emptyset$$

Also ist nach dem Satz $\emptyset$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. 13.01.2020

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ irgendeine σ-Algebra in $X_1 \times \cdots \times X_n$, die $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ enthält.

$$\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma(p_1, \ldots, p_n) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra in } X \\ \text{alle } p_j : X \to X_j \\ \text{sind } \mathcal{A}-\mathcal{A}_j\text{-messbar.}}} \mathcal{A}$$

Es reicht also zu zeigen:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Jede Abbildung } p_j \text{ ist genau dann } \mathcal{A}\!-\!\mathcal{A}_j\text{-messbar, wenn} \\ E_1 \times \cdots \times E_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, E_j \in \mathcal{E}_j, j = 1, \ldots, n\end{array}}$$

„$\Longrightarrow$“: Angenommen p_j ist $\mathcal{A} - \mathcal{A}_j$-messbar. Dies ist nach einem alten Satz äquivalent zu:

$$p_j^{-1}(E_j) \in \mathcal{A} \;\; \forall\, E_j \in \mathcal{E}_j$$
$$\Longrightarrow \; E_1 \times \cdots \times E_n = p_1^{-1}(E_1) \cap p_2^{-1}(E_2) \cap \cdots \cap p_n^{-1}(E_n) \in \mathcal{A} ☺$$

„$\Longleftarrow$“: Sei umgekehrt $\boxed{E_1 \times \cdots \times E_n} \in \mathcal{A}, E_j \in \mathcal{E}_j, j = 1, \ldots, n$. Definiere $F_k := E_{1,k} \times \cdots \times E_{j-1,k} \times E_j \times E_{j+1,k} \times \cdots \times E_{n,k} \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \in \mathcal{A}$. Weiterhin ist:

$$p_1^{-1}(E_1) = E_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

Es ist also zu zeigen, dass

$$p_j^{-1}(E_j) = X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times E_j \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n \in \mathcal{A}$$

Andererseits ist aber

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times E_j \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n = p_j^{-1}(E_j) \in \mathcal{A}$$

Also ist p_j $\mathcal{A} - \mathcal{A}_j$-messbar.

□

Beispiel. *Seien $X_j = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_j = B^1$, $\mathcal{E}_j = J$ (rechts halboffene Intervalle).*

$$E_j \in J \implies E_1 \times \cdots \times E_n \in J^n \quad \mathcal{B}^n = \sigma(J^n) \underset{\textit{Satz 2}}{=} \underbrace{\mathcal{B}^1 \otimes \mathcal{B}^1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}^1}_{n \textit{ Faktoren}}$$

λ^n *Lebesgue Maß auf $\mathcal{B}^n$; λ^1 auf $\mathcal{B}^1$.*

$$E_j \in J^1 \quad \boxed{\lambda^n(E_1 \times \cdots \times E_n) = \lambda^1(E_1) \cdot \cdots \cdot \lambda^1(E_n)}$$

<u>Frage:</u> Gegeben Maßraum $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $j = 1, \ldots, n$ und $\mathcal{E}_j$ Erzeuger von $\mathcal{A}_j$, $j = 1, \ldots, n$. Unter welchen Bedingungen existiert Maß π auf $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ für das für beliebige $E_j \in \mathcal{E}_j$ gilt:

$$\boxed{\pi(E_1 \times \cdots \times E_n) = \mu_1(E_1) \cdot \ldots \cdot \mu_n(E_n)} \tag{1}$$

Wir werden zeigen, dass die Antwort dieser Frage „Ja.“ ist. Zur Eindeutigkeit:

Satz 21.3. *Jeder der Erzeuger $\mathcal{E}_j$ von $\mathcal{A}_j$ sei $\cap$-stabil und enthalte eine Folge $(E_{j,k})_k \in \mathcal{E}_j, E_{j,k} \uparrow X_j$ und $\mu_j(E_{j,k}) < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es höchstens ein Maß π auf $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$, welches Eigenschaft 1 hat.*

Beweis. Definiere $\mathcal{E} := \{ E_1 \times E_n : E_j \in \mathcal{E}_j, j = 1, \ldots, n \}$. Da $\mathcal{E}_j$ $\cap$-stabil ist, ist auch $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil, denn

$$\left(\prod_{j=1}^n E_j\right) \cap \left(\prod_{j=1}^n F_j\right) = \prod_{j=1}^n \left(\underbrace{E_j \cap F_j}_{\in \mathcal{E}_j}\right) \in \mathcal{E}$$

und $F_k := E_{1,k} \times \cdots \times E_{n,k} \uparrow X = X_1 \times \cdots \times X_n$ und $\pi(F_k) \overset{(1)}{=} \prod_{j=1}^n \mu_j(E_{j,k}) < \infty$. Nun ist nach Satz 2 $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma(\mathcal{E})$. Der Eindeutigkeitssatz für Maße liefert also, dass π eindeutig bestimmt ist! $\square$

Bemerkung.

1. *Unter der Voraussetzung von Satz 3 ist die Existenz gesichert.*
2. *Sei $f : X_0 \to X_1 \times \cdots \times X_n$, wobei $(X_0, \mathcal{A}_0)$ und $(X_j, \mathcal{A}_j)$ Maßräume sind. Dann gilt:*

   $$f \ \mathcal{A}_0\text{--}\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n\text{-messbar} \overset{\text{Alter Satz}}{\Longleftrightarrow} \text{Koordinatenabb. } f_j = p_j \circ f \text{ sind } \mathcal{A}_0\text{--}\mathcal{A}_j\text{-messbar}$$

22 Produktmaße, Fubini und Tonelli

Es seien zwei Maßräume $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $j = 1, 2$ gegeben.
Sei $Q \subset X_1 \times X_2$ beliebige Teilmenge. Der x_j-Schnitt von Q ist definiert durch

$$\boxed{\begin{aligned} Q_{x_1} &:= \{ x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in Q \} \\ Q_{x_2} &:= \{ x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in Q \} \end{aligned} \quad (1)}$$

Skizze okay????

Dann gilt:

Lemma 22.1. *Für beliebige $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ liegen alle x_1- bzw. x_2-Schnitte einer Menge $Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ in $\mathcal{A}_2$ bzw. $\mathcal{A}_1$.*

Beweis. Prinzip der guten Mengen!

$$\mathcal{A} := \{ Q \subset X : Q_{x_1} \in \mathcal{A}_2 \}$$

Ziel: $\mathcal{A}$ ist σ-Algebra und $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$.
Seien $Q, Q_1, Q_2, \dots \subset X = X_1 \times X_2$. Für $x_1 \in X_1$ ist dann

$$\begin{aligned}(X \setminus Q)_{x_1} &= X_2 \setminus Q_{x_1} \\ \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right)_{x_1} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (Q_n)_{x_1} \\ X_{x_1} = (X_1 \times X_2)_{x_1} &= X_2\end{aligned}$$

Allgemeiner: Ist $A_j \subset X_j$ so gilt $(A_1 \times A_2)_{x_1} = \begin{cases} A_2 & \text{falls } x_1 \in A_1 \\ \emptyset & \text{falls } x_1 \notin A_1 \end{cases}$. Also ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra (!) und $\mathcal{A}$ enthält alle Mengen der Form $A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Also ist $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$! Somit folgt $\forall Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, x_1 \in X_1 : Q_{x_1} \in \mathcal{A}_2$.

Die Schritte sind für x_2 analog. □

D.h. $\forall x_1 \subset X_1,\ x_2 \subset X_2,\ Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sind $\mu_2(Q_{x_1}),\ \mu_1(Q_{x_2})$ erklärt!

Lemma 22.2. *Die Maße μ_1, μ_2 seien σ-endlich. Es folgt $\forall Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$:*

$$\begin{aligned}x_1 &\longmapsto \mu_2(Q_{x_1}) \text{ ist } \mathcal{A}_1\text{-messbar.} \\ x_2 &\longmapsto \mu_1(Q_{x_2}) \text{ ist } \mathcal{A}_2\text{-messbar.}\end{aligned}$$

Wenn Lemma 2 stimmt:

$$\pi_1(Q) := \int_{X_1} \mu_2(Q_{x_1})\ \mu_1(dx_1), \pi_2(Q) := \int_{X_2} \mu_1(Q_{x_2})\ \mu_2(dx_2) \overset{\text{Eindeutigkeit}}{\Longrightarrow} \pi_2(Q) = \pi_1(Q)$$

Beweis. Sei $s_Q : X_1 \to \overline{\mathbb{R}}_+, x_1 \longmapsto \mu_2(Q_{x_1})$. Wir zeigen die Messbarkeit von $s_Q\ \ \forall Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Die Messbarkeit von $x_2 \longmapsto \mu_1(Q_{x_2})$ folgt analog.

Schritt 1: Angenommen $\mu_2(X_1) < \infty$.

Behauptung. $\mathcal{D} := \{ D \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : s_D$ *ist* $\mathcal{A}_1$*-messbar*$\}$ *ist ein Dynkin-System in* $X = X_1 \times X_2$.

Denn:

$$\begin{aligned}s_X = \mu_2(X_{x_1}) = \mu_2(X_2) &\text{ ist messbar, da konstant} \\ s_{X \setminus D} &= s_X - s_D \\ s_{\cup D_j} &= \sum_j s_{D_j} \quad \forall\ (D_j)_j \subset \mathcal{D} \text{ von disjunkten Mengen}\end{aligned} \tag{2}$$

Also ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System!

Auch:

$$A_1 \times A_2 \in \mathcal{D} \,\forall\, A_j \in \mathcal{A}_j, j = 1,2$$
$$\mu_2\left((A_1 \times A_2)_{x_1}\right) = \mu_2(A_2)\,\mathbb{1}_{A_1}(x_1) \implies s_{A_1\times A_2} = \mu_2(A_2)\,\mathbb{1}_{A_1}$$

Es ist also $\mathcal{E} = \{\, A_1 \times A_2, A_j \in \mathcal{A}_j, j = 1,2\,\} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Weil $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil ist gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E})$ und nach einem alten Satz über Dynkin-Systeme ist $\delta(\mathcal{E}) \subset \delta(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Also ist $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und somit $\mathcal{D} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$!

$\implies$ Jede Funktion $x_1 \longmapsto \mu_2(Q_{x_1})$ mit $Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ist $\mathcal{A}_1$-messbar. ☺

Schritt 2: Sei μ_1 σ-endlich.

$$\implies \exists\, (E_k)_k \in \mathcal{A} : \mu_1(E_k) < \infty \,\forall\, k \in \mathbb{N},\ E_k \uparrow X \qquad \left(E_{k+1} \supset E_k,\ \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = X_1\right)$$

Definition. $\mu^n(A) := \mu_1(A \cap E_n) \quad A \in \mathcal{A}_1$ *alle endlichen Maße!*

$$\overset{\text{Schritt 1}}{\implies} x_2 \longmapsto \mu^n(Qx_2) \text{ ist } \mathcal{A}_2 - \text{messbar}$$
$$\implies \mu_1(A \cap E_n) \uparrow \mu_1(A) \;\; n \to \infty$$
$$\implies \underbrace{\mu_1(Qx_2)}_{\mathcal{A}_2-\text{messbar in } x_2} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\mu_n(Qx_2)}_{\text{messbare Funktion des Parameters } x_2}$$

Vertauscht man die Rollen von x_1, x_2, so liefert es den Rest der Behauptung.

□ 15.01.2020

Satz 22.3. *Seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ σ-endliche Maßräume für $j = 1,2$. Dann gibt es genau ein Maß π auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit*

$$\boxed{\pi(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2)} \tag{3}$$

für alle $A_j \in \mathcal{A}_j$ (wieder mit $j = 1,2$).

Beweis. Definiere $\pi_1(Q) := \int_{X_1} \mu_2(Q_{x_1})\ \mu_1(dx_1)$. Diese ist wohldefiniert nach Lemma 2 mit $Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Weiterhin ist $x_1 \longmapsto S_Q(x_1) := \mu_2(Q_{x_2})$ messbare positive numerische Funktion auf X.

Behauptung. π_1 *ist ein σ-endliches Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.*

$$\boxed{\pi_1(Q) = \int s_Q\, d\mu_1 = \int_{X_1} s_Q\, d\mu_1}$$

- $\pi : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \to [0, \infty]$
- $(Q_n)_n \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ <u>disjunkte</u> Mengen.

$$\implies S_{\bigcup_{n=1}^\infty} = \sum_{n=1}^\infty S_{Q_n} \text{ Da } \mu_2 \text{ Maß ist.}$$

- $S_\emptyset = 0$

$$\begin{aligned}\pi_1\left(\bigcup_{n=1}^\infty Q_n\right) &= \int S_{\bigcup Q_n}\, d\mu_1 = \int \left(\sum_{n=1}^\infty S_{Q_n}\right) d\mu_1 \\ &\underset{\text{Mon. Konv.}}{=} \sum_{n=1}^\infty \int S_{Q_n}\, d\mu_1 = \sum_{n=1}^\infty \pi_1(Q_n) \\ &\pi_1(\emptyset) = 0\end{aligned}$$

Also ist π_1 ein Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Insgesamt haben wir:

$$\begin{aligned} Q &= A_1 \times A_2 \\ S_{A_1\times A_2} &= \mu_2(A_2)\, \mathbb{1}_{A_1} \\ S_{A_1 \times A_2}(x_1) &= \mu_2(A_2)\, \mathbb{1}_{A_1}(x_1) \\ (A_1 \times A_2) &= \begin{cases} A_2 & , x_1 \in A_1 \\ \emptyset & , x_1 \notin A_2 \end{cases}\end{aligned}$$

$\implies \pi_1(A_1 \times A_2)$
$\implies \pi_1 : \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \to [0, \infty]$ ist Maß mit Produkteigenschaft.

$\implies \pi_1(A_1 \times A_2)$

$\implies$ Es existieren Folgen $\left(E_n^1\right)_n \in \mathcal{A}_1, \left(E_m^2\right)_m \in \mathcal{A}_2, E_n^1 \uparrow X_1, E_n^2 \uparrow X_2, \mu_1\left(E_n^1\right) < \infty, \mu_2\left(E_n^2\right) < \infty \quad \forall n$

Es ist nun $F_n := E_n^1 \times E_n^2 \uparrow X_1 \times X_2$ und $\pi_1(F_n) < \infty \quad \forall n$. Also ist π_1 σ-endlich! Formatieren.

Genauso zeigt man, dass $\pi_2(Q) := \int_{X_2} \mu_1(Q_{x_2})\ \mu_2(dx_2)$ ein σ-endliches Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ist mit

$$\boxed{\pi_2(A_1 \times A_2)} = \mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2) \quad \forall\, A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$$

Die Eindeutigkeit liefert $\boxed{\pi_1 = \pi_2}$! $\square$

Definition 22.4. *Das für je zwei σ-endliche Maßräume $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ mit $j = 1,2$ eindeutig bestimmte Maß π auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ heißt das Produkt der Maße μ_1 und μ_2. Schreiben $\pi = \mu_1 \otimes \mu_2$.*

Beispiel 2. $\mathcal{B}^1 \otimes \mathcal{B}^1 = \mathcal{B}^2$, $\lambda^1 \otimes \lambda^1 = \lambda^2$, $\mathcal{B}^n \otimes \mathcal{B}^m = \mathcal{B}^{n+m}$, $\boxed{\lambda^n \otimes \lambda^m = \lambda^{n+m}}$

skizze mit Weihnachtsbaum

Notation: Zu $f : X_1 \times X_2 \to Y$ ist:
$f_{x_1} : X_2 \to Y \quad x_2 \mapsto f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2)$ heißt x_1-Schritt in f
$f_{x_2} : X_1 \to Y \quad x_1 \mapsto f_{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2)$ heißt x_2-Schritt in f

Ist $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}, Q \subset X_1 \times X_2$, so ist $f_{x_1} = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}_{x_1}}$ auf X_2 und $f_{x_2} = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}_{x_2}}$ auf X_1.

Zusatz zu Satz 3: Genau ein Maß π auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit

$$\boxed{\pi(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2) \quad \forall A_j \in \mathcal{A}_j, j = 1,2} \tag{3}$$

Weiterhin gilt für jede Menge $Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ mit

$$\boxed{\begin{aligned} \pi(Q) &= \int_{X_1} \mu_2(Q_{x_1})\ \mu_1(dx_1) \\ &= \int_{X_2} \mu_1(Q_{x_2})\ \mu_2(dx_2) \end{aligned}} \tag{4}$$

Das ist das sogenannte „Prinzip von Cavalieri“. Zuletzt ist auch:

$$\pi_1(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2) \tag{5}$$

Ab hier eventuell Trash. :)

Beweis. Sei nun $Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, Dann haben wir

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{1}_{Q_{x_1}}\right) &= \mathbb{1}_Q(x_1, \cdot) \\ &= \mathbb{1}_{Q_{x_1}} \mathbb{1}_{Q_{x_1}} \end{aligned}$$

Setze $f := \mathbb{1}_Q$

$$\implies f_{x_1}(x_2) = \mathbb{1}_Q(x_1, x_2) = \mathbb{1}_{Q_{x_1}}(x_2) = \mathbb{1}_{Q_{x_2}}(x_1)$$

$$
\begin{aligned}
\overset{(4)}{\Longrightarrow} \pi(Q) &= \mu_1 \otimes \mu_2(Q) \\
&= \int_{X_1} \mu_2(Q_{x_1})\ \mu_1(dx_1) = \int_{X_2} \mu_1(Q_{x_2})\ \mu_2(dx_2) \\
&= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}_{x_1}}\ d\mu_2 \right)\ \mu_1(dx_2) \\
&= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_1, x_2)\ \mu_2(dx_2) \right)\ \mu_1(dx_1) \\
&= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_1, x_2)\ \mu_1(dx_1) \right)\ \mu_2(dx_2)
\end{aligned}
$$

□

ab hier wieder kein Trash (eventuell)

Lemma 22.5. *Sei $(X^1, \mathcal{A}^1)$ ein beliebiger Maßraum und $f : (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \to (X^1, \mathcal{A}^1)$.*

Bemerkung. *Setzt man also beispielsweise $X^1 = \overline{\mathbb{R}}, \mathcal{A}^1 = \overline{\mathcal{B}}^1$, dann ist jede der Abbildungen f_{x_1}, f_{x_2} $\mathcal{A}_2$- bzw. $\mathcal{A}_1$-messbar.*

Beweis. Es ist $f^{-1}(A^1) \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \ \ \forall A^1 \in \mathcal{A}^1$. Dann gilt nach Lemma 1:

$$
\begin{aligned}
f_{x_1}^{-1}(A^1) &= \{ x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in f^{-1}(A^1) \} \\
&= \left(f^{-1}(A^1) \right)_{x_1} \in \mathcal{A}_2 \\
f_{x_2}^{-1}(A^1) &= \left(f^{-1}(A^1) \right)_{x_2} \in \mathcal{A}_1 && \text{(Analog.)}
\end{aligned}
$$

□

Satz 22.6 (Satz von Tonelli)**.** *Seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ σ-endliche Maßräume und $f : X_1 \times X_2 \to [0, \infty]$ eine positive messbare numerische Funktion. Dann gilt: Die Funktionen $x_2 \mapsto \int f_{x_2}\, d\mu_1 = \int_{X_1} f_{x_2}\, d\mu_1$ und $x_1 \mapsto \int f_{x_1}\, d\mu_2$ sind $\mathcal{A}_2$- bzw. $\mathcal{A}_1$-messbar und es gilt*

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\int_{X_1 \times X_2} f\ d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int \left(\int f_{x_2}\ d\mu_1 \right) d\mu_2 = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)\ \mu_1(dx_1) \right)\ \mu_2(dx_2) \\
&= \int \left(\int f_{x_1}\ d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\ \mu_2(dx_2) \right)\ \mu_1(dx_1)
\end{aligned}
}
\tag{6}
$$

(Integral bezüglich Produktmaß = Iterierte Integrale)

Bemerkung. *Vergleiche dies mit $f_n \geq 0$. Es ist:*

$$
\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\ d\mu
$$

Dies gilt wegen:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}, a_{m,n} \geq 0$$

17.01.2020

Beweis zu Satz 3. Sei $Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Dann ist:

$$\begin{aligned}(\mu_1 \otimes \mu_2)(Q) = \pi(Q) &= \int_{X_2} \mu_1(Q_{x_2})\ \mu_2(dx_2)\\ &= \int_{X_2}\int_{X_1} \mathbb{1}_{Q_{x_2}}\, d\mu_1\ \mu_2(dx_2)\\ &= \int_{X_2}\int_{X_1} (\mathbb{1}_Q)_{x_2}\, d\mu_1\ \mu_2(dx_2)\\ &= \int_{X_2}\int_{X_1} \mathbb{1}_Q(x_1,x_2)\ \mu_1(dx_1)\ \mu_2(dx_2)\end{aligned}$$

Die Umformungsschritte gelten wegen:

$$(\mathbb{1}_Q)_{x_2}(x_1) = \mathbb{1}_Q(x_1,x_2) = \mathbb{1}_{Q_{x_2}}(x_1)$$

<u>Schritt 1:</u>

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A^j} \in E^+(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2),\ \alpha_j \geq 0,\ A^j \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2.$$

$$\underbrace{f(x_1,x_2)}_{=f x_2(x_1)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{\mathbb{1}_{A^j}(x_1,x_2)}_{=(\mathbb{1}_{A^j})_{x_2}(x_1)=\mathbb{1}_{A^j_{x_2}}} \quad (x_1) \implies f x_2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A^j_{x_2}} = \mu_1\left(A^j_{x_2}\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_1\left(A^j_{x_2}\right)$$

$$x_2 \mapsto \int_{X_1} f(x_1,x_2)\, d\mu_1(dx_1) = \int f_{x_2}\, d\mu_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int \mathbb{1}_{A^j_{x_2}}\, d\mu_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_1\left(A^j_{x_2}\right)$$

(DONE vervollständigen) alles vollständig?

$$\begin{aligned}&\stackrel{\text{Lemma 2}}{\implies} x_2 \mapsto \int_{X_1} f(x_1,x_2)\ \mu_1(dx_1) = \int_{X_1} f_{x_2}\, d\mu_1 \geq 0 \text{ ist } \mathcal{A}_2\text{-messbar.}\\ &\implies \int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x_1,x_2)\ \mu_1(dx_1)\right)\ \mu_2(dx_2)\\ &= \int_{X_2}\int_{X_1} f_{x_2}\, d\mu_1\ \mu_2(dx_2)\\ &= \int \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_1\left(A^j_{x_2}\right)\ \mu_2(dx_2)\\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{X_2} \mu_1\left(A^j_{x_2}\right)\ \mu_2(dx_2)\end{aligned}$$

$$\overset{(4)}{\Longrightarrow} \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f\left(x_1, x_2\right)\ \mu_1(dx_1) \right)\ \mu_2(dx_2) = \int_{X_2} \int_{X_1} f_{x_2}\ d\mu_1\ \ \mu_2(dx_2)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \pi\left(A^j\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{X_1 \times X_2} \mathbb{1}_Q\ d\pi$$
$$= \int_{X_1 \times X_2} f\ d\pi$$

Also gilt der erste Teil von (6) für f! Vertauschen der Rollen von x_1, x_2 liefert den zweiten Teil von (6)!

<u>Schritt 2:</u> f ist eine $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-messbare numerische Funktion ≥ 0. Deswegen existiert eine Folge $(u^n)_n$ von p_∞ Elementarfunktionen mit $u^n \uparrow f$, also $u^{n+1} \geq u^n$ und $f = \sup_n u^n = \lim_{n\to\infty} u^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Schritt 1 folgt daraus:

$$\boxed{\int u^n\ d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{X_2} \int u^n_{x_2}\ d\mu_1\ \ \mu_2(dx_2)}$$

$$\int f\ d\mu_1 \otimes \mu_2 = \lim_{n\to\infty} \int u^n\ d\mu_1 \otimes \mu_2 \qquad \text{(mon. Konv.)}$$
$$= \int \int u^n_{x_2}\ d\mu_1\ \ \mu_2(dx_2) = \int \varphi^n\left(x_2\right)\ \mu_2(dx_2)$$

Mit $\varphi^n\left(x_2\right) := \int u^n_{x_2}\ d\mu_1 \leq \varphi^{n+1}$ und $f_{x_2} \uparrow \left(u^n\right)_{x_2} = u^n_{x_2}$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi^n\left(x_2\right) = \lim_{n\to\infty} \int u^n_{x_2}\ d\mu_1$$
$$= \int \lim_{n\to\infty} u^n_{x_2}\ d\mu_1 \qquad \text{(Mon. Kon.)}$$
$$= \int f_{x_2}\ d\mu_1$$
$$\Longrightarrow \int f\ d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \lim_{n\to\infty} \int u^n\ d\mu_1 \otimes \mu_2$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int \varphi^n\ d\mu_2$$
$$= \int \lim_{n\to\infty} \varphi^n\ d\mu_2 \qquad \text{(Mon. Kon.)}$$
$$= \int \left(\int f_{x_2}\ d\mu_1 \right) d\mu_2\left(x_2\right)$$

Zusammenfassend liefert also der Satz von Cavalieri und der Satz von Monotoner Konvergenz den Satz von Tonelli. Vertauschen der Rollen x_1, x_2 liefert den zweiten Teil. $\square$

Korollar 22.7 (Satz von Fubini)**.** *Seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ σ-endliche Maßräume und f eine $\mu_1 \otimes \mu_2$ integrierbare numerische (oder komplexwertige) Funktion auf $X_1 \otimes X_2$.*
Dann folgt:

$$f_{x_1} \text{ ist für } \mu_1\text{-f.a. } x_1\ \mu_2\text{-integrierbar}$$
$$f_{x_2} \text{ ist für } \mu_2\text{-f.a. } x_2\ \mu_2\text{-integrierbar}$$

, die Funktionen

$$x_1 \mapsto \int_{x_2} f_{x_1}\, d\mu_2, x_2 \mapsto \int_{x_1} f_{x_2}\, d\mu_1$$

sind μ_1- bzw. μ_2-f.ü. definiert und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{X_1 \times X_2} f\, d\mu_1 \otimes \mu_2 &= \int_{X_1} \int_{X_2} f_{X_1}\, d\mu_2\ \ \mu_1(dX_1) = \int_{X_1} \int_{X_2} f\,(x_1, x_2)\, d\mu_2\,(x_1)\ \ \mu_1(dx_1) \\ &= \int_{X_2} \int_{X_1} f_{X_2}\, d\mu_1\ \ \mu_1(dX_1) = \int_{X_2} \int_{X_1} f\,(x_1, x_2)\, d\mu_1\,(x_2)\ \ \mu_2(dx_2)\end{aligned}$$

Beispiel 3. *Sei $A := \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}^2 = \mathcal{B}^1 \otimes \mathcal{B}^1$, $f = \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_\mathbb{Q} \cdot \mathbb{1}_\mathbb{R}$. Dann ist*

$$f\,(x_1, x_2) = \mathbb{1}_A\,(x_1, x_2) = \mathbb{1}_\mathbb{Q}\,(x_1) \cdot \mathbb{1}_\mathbb{R}\,(x_2) = \mathbb{1}_\mathbb{Q}\,(x_1)$$

und $\int_{\mathbb{R}^2} f\, d\lambda^2 = 0$, aber

$$f_{x_1} = \mathbb{1}_\mathbb{Q}\,(x_1) = \begin{cases} 1 & , x_1 \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x_1 \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Beweis. Voraussetzung ist, dass $\int_{X_1 \times X_2} |f|\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty$. Nach Tonelli ist das Integral gerade $\int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f_{x_1}|\, d\mu_2 \right)\ \mu_1(dx_1)$. Dies gilt wegen $|f|_{x_1} = |f_{x_1}|$ und $|f|_{x_1} = |f|_{x_1}\,(x_2) = |f\,(x_1, x_2)| = |f_{x_1}\,(x_2)|$, weshalb $(f^\pm)_{x_1} = (f_{x_1})^\pm$ gilt. Eine ähnliche Aussage gilt für x_2-Schnitte.

$$\begin{aligned} &\implies \text{Für } \mu_1\text{-f.a.} x_1 \text{ ist } \int_{X_2} |f_{x_1}|\, d\mu_2 < \infty \\ &\implies \mu_1\text{-f.a.} x_1 \text{ ist } |f_{x_1}|\ \mu_2\text{-integrierbar. (Analog 2. Aussage.)} \\ &\implies \mu_1\text{-f.a.} x_1 \text{ ist } f_{x_1}^\pm\ \mu_2\text{-integrierbar.} \\ &\implies x_1 \mapsto \int_{X_2} f_{x_1}^+\, d\mu_2 - \int_{X_2} f_{x_1}^-\, d\mu_2 \text{ für } \mu_1\text{-f.a.} x_1 \text{ definiert.} \end{aligned}$$

Letzteres ist Gerade $\int_{X_2} f_{x_1}\, d\mu_2$, was μ_1-integrierbar ist. Weiterhin ist nach Tonelli

$$\int \left(\int f_{x_1}^\pm\, d\mu_2 \right)\ \mu_1(dx_1) = \int f^\pm\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty$$

und damit

$$\int \left(\int f_{x_1} \, d\mu_2 \right) \, \mu_1(dx_1) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f_{x_1}^+ \, d\mu_2 \right) \, \mu_1(dx_1) - \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f_{x_1}^- \, d\mu_2 \right) \, \mu_1(dx_1)$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{X_1 \times X_2} f^+ \, (d(\mu_1 \otimes \mu_2)) - \int_{X_1 \times X_2} f^- \, (d(\mu_1 \otimes \mu_2))$$

$$= \int_{X_1 \times X_2} f \, (d(\mu_1 \otimes \mu_2))$$

Für das andere iterierte Integral gehe man analog vor. □

(DONE Ergänzen) Alles vollständig?

Anwendung:

Satz 22.8. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine messbare positive reelle Funktion, $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty), \varphi(0) = 0$ eine stetig wachsende Funktion, die stetig differenzierbar auf $(0, \infty)$. Dann folgt:*

$$\int \varphi \circ f \, d\mu = \int_{(0,\infty)} \varphi'(t) \, \mu(\{ f \geq t \}) \; \lambda'(dt) = \int_0^\infty \varphi'(t) \, \mu(\{ f \geq t \}) \, dt$$

Bemerkung. *Sei $\varphi(t) = t^p \ (p > 0)$. Dann ergibt sich*

$$\int f^p \, d\mu = p \int_{-\infty}^\infty t^{p-1} \mu(\{ f \geq t \}) \, dt$$

$$\int f \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{ f \geq t \}) \, dt \qquad (\mathrm{p} = 1)$$

(DONE Tortendiagramm) Beschreibung verständlich/korrekt???

Sowas nennt man deswegen auch Layer-Cake-Principle.

Beweis. Es ist $\int_X \varphi \circ f \; d\mu = \int_X \varphi(f(x)) \; \mu(dx)$. Außerdem ist $\varphi(f(x)) - \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \int_{\frac{1}{n}}^{f(x)} \phi'(t) \, dt$. Für $n \to \infty$ geht $\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ gegen 0 und somit gilt:

$$\varphi(f(x)) = \int_{(0, f(x)]} \varphi'(t) \, dt = \int_0^{f(x)} \varphi'(t) \, dt$$

Also lässt sich das Ausgangsintegral schreiben als

$$\int_X \left(\int_0^{f(x)} \varphi'(t) \, dt \right) \; \mu(dx)$$

$$= \int_X \left(\int \mathbb{1}_{\{ [0, f(x)] \}}(t) \, \varphi'(t) \, dt \right) \; \mu(dx)$$

$$= \int_X \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} \varphi'(t) \, \mathbb{1}_{\{ f \geq t \}}(x, t) \, dt \right) \; \mu(dx) \, , \varphi' \geq 0 \wedge \mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$$

$\square$ 22.01.2020

Zu Satz 8: Sei $\mathbb{R}_+^* = (0,\infty), \mathcal{B}^* = \mathcal{B}^1 \cap \mathbb{R}_+^*$. Dann ist $F : X \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^2, (x,t) \mapsto F(x,t) :=$ $(f(x), t)$ ist $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}^*$-$\mathcal{B}^2$-messbar. Definiere $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}^* \ni E := \{ (x,t) \in X \times \mathbb{R}_+^* \} = F^{-1}\left(\underbrace{\{ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}, \alpha \geq \beta \}}_{\in \mathcal{B}^2} \right)$

Auf $\mu \otimes \lambda^*, \lambda^* = \lambda^1\big|_{\mathcal{B}^*}$ wende man Tonelli an. Man berechne dann Skizze

$$\begin{aligned}\int_X \int_0^\infty \varphi'(t)\, \mathbb{1}_E(x,t)\ \lambda^*(dt)\ \mu(dx) &= \int_\alpha^\infty \varphi'(t) \int_X \mathbb{1}_E(x,t)\ \mu(dx)\ \lambda^*(dt) \\ &= \int_\alpha^\infty \varphi'(t)\, \mu(\{ x \in X : f(x) \geq t \})\ \lambda^*(dt)\end{aligned}$$

23 Endlich viele Produkte

$(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)\,,\ j = 1, \ldots n,\ \mu_j$ σ-endliches Maß.
Identifizieren: $(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ und $X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \times X_n$ mittels der Bijektion

$$((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$$

Damit hat man:

$$\boxed{(\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{n-1} \otimes \mathcal{A}_n} \tag{1}$$

Denn nach Satz 21.2 $A_1 \times \cdots \times A_n$ mit $A_j \in \mathcal{A}_j$ für $j = 1, \ldots, n$ erzeugen die σ-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ und auch $(\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n$. Ähnlich:

$$\boxed{\left(\bigotimes_{j=1}^m \mathcal{A}_j \right) \otimes \left(\bigotimes_{j=m+1}^n \mathcal{A}_j \right) = \left(\bigotimes_{j=1}^n \mathcal{A}_j \right)} \qquad 1 \leq m < n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Satz 23.1. *Für σ-endliche Maße $\mu_1, \ldots, \mu_n$ auf $\mathcal{A}_1 \ldots, \mathcal{A}_n$ $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein Maß Π auf $\mathcal{A} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ mit*

$$\boxed{\Pi(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \ldots \mu_n(A_n) \qquad \forall\, A_j \in \mathcal{A}_j\ j = 1, \ldots, n} \tag{3}$$

Ferner ist Π σ-endlich.

Bemerkung. *Man nenne Π das Produkt der Maße $\mu_1, \ldots, \mu_n$.*
Wir schreiben $\Pi = \bigotimes_{j=1}^n \mu_j = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$.

Beweis.

Eindeutigkeit: Im Satz 21.3 nehme man $\mathcal{E}_j = \mathcal{A}_j$. Dies ist ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_j$.

Existenz: Die Existenz wird per Induktion bewiesen.
Der Fall $n = 2$ ist durch Satz 22.3 gegeben.
Die Induktionsannahme ist dann, dass $\Pi' = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_{n-1}$ für ein $n \geq 3$ existiert und σ-endlich ist.
Zum Induktionsschluss muss nun gezeigt werden, dass $\Pi = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ existiert und ebenfalls σ-endlich ist.

Nach Satz 22.3 ist $\Pi := \Pi' \otimes \mu_n$ ein Maß auf $(\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ mit

$$\Pi\left(G \times A_n\right) = \Pi'\left(G\right)\mu_n\left(A_n\right) \qquad \forall\, G \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{n-1}, A \in \mathcal{A}_n$$

Dies ist nach Satz 22.3 σ-endlich und es ist

$$\Pi\left(A_1 \times \cdots \times A_n\right) = \Pi'\left(A_1 \times \cdots \times A_{n-1}\right)\mu_n\left(A_n\right)$$

Letzteres ist nach Induktionsvoraussetzung genau $\mu_1\left(A_1\right) \ldots \mu_{n-1}\left(A_{n-1}\right)\mu_n\left(A_n\right)$.

$\square$

Bemerkung. *Somit gilt die Gleichheit*

$$\boxed{(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_{n-1}) \otimes \mu_n = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_{n-1} \otimes \mu_n} \tag{4}$$

und ähnlich:

$$\boxed{\left(\bigotimes_{j=1}^{m} \mu_j\right) \otimes \left(\bigotimes_{j=m+1}^{n} \mu_j\right) = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n} \; 1 \leq m < n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\lambda^1 \otimes \cdots \otimes \lambda^1}_{n \text{ Faktoren}} = \lambda^n = \lambda^m \otimes \lambda^{n-m}$$

Bemerkung. *(5) erlaubt uns, die allgemeine Version des Satzes von Fubini und Tonelli zu formulieren. Beispielsweise:*
Ist $f \geq 0$ $\;\mathcal{A} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ eine messbare numerische Funktion auf $X_1, \ldots, X_n$. Dann gilt für jede beliebige Permutation $j_1, \ldots, j_n$ von $1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}\int f\, d(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n) &= \int \left(\ldots \int \left(\int f\left(x_1, \ldots, x_n\right)\; \mu_{j_1}(dx_{j_1})\right)\; \mu_{j_2}(dx_{j_2}) \ldots \right)\; \mu_{j_n}(dx_{j_n}) \\ &= \int \ldots \int f\left(x_1 \ldots, x_n\right)\; \mu_{j_1}(dx_1)\; \mu_{j_n}(dx_n)\end{aligned}$$

Beweis. Man zeige das selber per Induktion. (The proof is trivial and is left as an exercise to the reader.) □

Satz 23.2. *Sei $(x_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f_j \geq 0$ eine reellwertige $\mathcal{A}_j$-messbare Funktion auf x_j für $j = 1 \dots n$. Setze dann $\nu_j := f_j \mu_j$ (also $\nu_j(A_j) = \int_{A_j} f_j \, d\mu_j$). Dann ist ν_j σ-endlich und*

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \nu_j = F \bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j$$

mit Dichtefunktion $F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j)$ (Tensorprodukt „$F = \bigotimes_{j=1}^{n} f_j$“)

Beweis.

Schritt 1: ν_j ist σ-endlich. Also existiert $\left(E_k^j\right)_j \subset \mathcal{A}_j, \mu_j\left(E_k^j\right) < \infty$ mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^j = X_j$. Wir definieren

$$E_{k,m}^j := \{\, x_j \in E_k^j : f_j(x_j) \leq m \,\} = f_j^{-1}([0,m]) \cap E_k^j \subset \mathcal{A}_j$$

Weiterhin ist

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} f_j^{-1}([0,m]) = f_j^{-1}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} [0,\infty]\right) = f_j^{-1}([0,\infty]) = X_j$$

Es gilt per Konstruktion $E_k^j = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{k,m}^j$ und

$$\nu_j\left(E_{k,m}^j\right) = \int \mathbb{1}_{E_{k,m}^j} f_j \, d\mu_j \leq m \int \mathbb{1}_{E_k^j} \, d\mu_j = m\mu_j\left(E_k^j\right) < \infty$$

Letztere Abschätzung ist gültig wegen

$$\mathbb{1}_{E_{k,m}^j} f_j \leq m \mathbb{1}_{E_{k,m}^j} \leq m \mathbb{1}_{E_k^j}$$

Es folgt $X_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{k,m}^j$. ☺

Schritt 2: Nur für $n = 2$ (dann Induktion!)

$$\begin{aligned}
\nu_1(A_1)\,\nu_2(A_2) &= \left(\int_{A_1} f_1 \, d\mu_1\right)\left(\int_{A_2} f_1 \, d\mu_2\right) \\
&= \int\int \mathbb{1}_{A_1}(x_1)\, f_1(x_1)\, \mathbb{1}_{A_2}(x_2)\, f_2(x_2)\ \mu_1(dx_1)\ \mu_2(dx_2) \\
&= \int\int \mathbb{1}_{A_1 \times A_2}(x_1, x_2)\, f_1(x_1)\, f_2(x_2)\ \mu_1(dx_1)\ \mu_2(dx_2) \\
&= \int\int \mathbb{1}_{A_1 \times A_2}(x_1, x_2)\, F(x_1, x_2)\ \mu_1(dx_1)\ \mu_2(dx_2) \\
&= \int_{A_1 \times A_2} F \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)
\end{aligned}$$

Auf Produktmengen $A_1 \times A_2$ stimmt die Aussage also. Aufgrund von Eindeutigkeit stimmt die Aussage also auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$!

$\square$

24 Die Transformationsformel (Jacobi, 1841)

Hier haben wir eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ wobei $V, U \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $\varphi : U \to V$ eine <u>nette</u> Bijektion (bspw. $\varphi(x) = T \cdot x, T \in \mathbb{R}^{m \times m}$).
Wir stellen uns die Frage, ob man $\int_U f \circ \varphi \, |\det D\varphi| \, d\lambda^m$ berechnen kann.

Beispiel. *Sei $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linear und bijektiv ($\iff \det T \neq 0$) und $f = \mathbb{1}_A$. Es ist dann*

$$
\begin{aligned}
&\int \mathbb{1}_A (T(x)) \, |\det T| \, d\lambda^m && = \int \mathbb{1}_A \, d\lambda^m \\
&= |\det T| \int \mathbb{1}_A (T(x)) \, d\lambda^m && = \int_A d\lambda^m \\
&= |\det T| \int \mathbb{1}_{T^{-1}(A)} (x) \, d\lambda^m && \\
&= |\det T| \, \lambda^m \left(T^{-1}(A)\right) \overset{!}{=} \lambda^m (A) &&
\end{aligned}
$$

Lemma 24.1. *Sei $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linear und bijektiv ($\iff \det T \neq 0$), dann ist $T(B) \in \mathcal{B}^m \ \ \forall B \in \mathcal{B}^m$.*

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt, dass $T^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linear und somit stetig ist, da $\dim(\mathbb{R}^m) = m < \infty$. Also gilt $T^{-1}(B) \in \mathcal{B}^m \ \ \forall B \in \mathcal{B}^m$. Also ist $T(B) = \left(T^{-1}\right)^{-1}(B) \in \mathcal{B}^m \ \ \forall B \in \mathcal{B}^m$. $\square$

Lemma 24.2. *Sei $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linear und bijektiv ($\iff \det T \neq 0$), dann ist*

$$\boxed{\lambda^m (T(B)) = |\det T| \, \lambda^m (B)} \tag{1}$$

Beweis. Später. $\square$

Bemerkung. *Ist $\det T = 0$, dann ist $\lambda^m (T(B)) = 0$.*

Erinnerung: Sei $X \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, also

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix}, \qquad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ sei die partielle Ableitung.}$$

Die Ableitung sei dabei

$$D\varphi = (\partial_1 \varphi, \dots, \partial_m \varphi) = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1 & \dots & \partial_m \varphi_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \varphi_m & \dots & \partial_m \varphi_m \end{pmatrix}$$

Letzteres bezeichnet man als die Funktionalmatrix. Die Richtungsableitung nach h sei dabei

$$D\varphi(x)[h] = \sum_{j=1}^{m} \partial_j \varphi(x) h_j$$

Analysis II: Zusammenhang zwischen $\det(D\varphi) \neq 0$ und lokaler Bijektivität von φ
Sei $a \in X, \det(D\varphi(a)) \neq 0$. Dann existieren offene Umgebungen $U \subset X$ von a und V von $\varphi(a)$ so, dass $\varphi\big|_U : U \to V$ bijektiv und stetig differenzierbar und $\varphi\big|_U^{-1} : V \to U$ auch stetig differenzierbar ist. Außerdem gilt $\mathrm{id}_U = \varphi\big|_U^{-1} \circ \varphi\big|_U : U \to U, x \mapsto x$. Ist also $\det D\varphi$ nullstellenfrei auf X, so ist $Y := \varphi(X) \subset \mathbb{R}^m$ offen! 24.01.2020

$U, V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\varphi : U \to V$ $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, d.h. φ ist $\mathcal{C}^1$ (stetig differenzierbar) bijektiv und φ^{-1} ist stetig differenzierbar. Wir hatten, dass $\det D\varphi$ nullstellenfrei auf U ist, womit $\varphi(U)$ offen.
Weiter folgt: Ist $\varphi : U \to V, U, V \subset \mathbb{R}^m$ offen bijektiv, stetig differenzierbar, so gilt:

$$\varphi \ \mathcal{C}^1\text{-Diffeomorphismus} \iff \det D\varphi \text{ ist nullstellenfrei auf } U$$

Definition (Operatornorm)**.** *Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. Es sei weiterhin $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{R}^m$.*

$$\|T\| := \sup \{ \|Tx\| : x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1 \} \implies \underbrace{\|Tx\|}_{\text{Norm in } \mathbb{R}^m} \leq \underbrace{\|T\|}_{\text{Operatornorm}} \underbrace{\|x\|}_{\text{Norm in } \mathbb{R}^m}$$

Sei $(e_1, \dots, e_n)$ kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$ und $(l_1, \dots, l_m)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^m$, dann gilt $\mathbb{R}^n \ni x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ und $\mathbb{R}^m \ni y = \sum_{j=1}^{m} y_j l_j$.

$$y=Tx=T\left(\sum_{k=1}^{n}x_kl_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{Te_k}_{\in\mathbb{R}^m}x_k=\sum_{j=1}^{m}T_{j,k}f_jx_k=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}\underbrace{T_{j,k}x_k}_{\text{Matrixelemente}}\right)l_j$$

$$T\cong(T_{j,k})_{\substack{j=1,\ldots,m\\k=1,\ldots,n}}$$

$$\|Tx\|^2=\sum_{j=1}^{m}\underbrace{\left|\sum_{k=1}^{n}T_{j,k}x_k\right|^2}_{\underset{\text{CSU}}{\leq}\sum_{k=1}^{n}T_{j,k}^2\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k^2}\qquad\text{mit }\sum_{k=1}^{n}x_k^2=\|x\|^2$$

$$\Longrightarrow\ \|Tx\|\leq\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}T_{j,k}^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=:\|T\|_{\text{HS}}\text{ Hilbert-Schmidt Norm}}\|x\|$$

$$\Longrightarrow\ \|T\|\leq\|T\|_{\text{HS}}$$

$$\Longrightarrow\ \|T-M\|\leq\|T-M\|\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(T_{j,k}-M_{j,k})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

WICHTIG: Ist $L:U\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ und $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, so ist L stetig in $x_0\in U$ genau dann wenn $\lim_{x\to x_0}\|L(x)-L(x_0)\|=0$, was außerdem äquivalent dazu ist, dass alle Matrixelemente $L_{j,k}(x)$ stetig in x_0 sind (dabei ist $j=1\ldots m$ und $k=1\ldots n$).

$$\|L(x)-L(x_0)\|\leq\|L(x)-L(x_0)\|_{\text{HS}}=\left(\sum\sum\left(L_{j,k}(x)-L_{j,k}(x_0)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$L_{j,k}(x)=\langle f_j,L(x)e_k\rangle_{\mathbb{R}^m}$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned}&\varphi:U\to\mathbb{R}^m,U\subset\mathbb{R}^n\text{ ist stetig differenzierbar}\\\Longleftrightarrow\ &U\ni x\mapsto D\varphi(x)\ \text{ ist stetig (in Operatornorm)}\\\Longleftrightarrow\ &\text{Alle partiellen Ableitungen }\partial_k\varphi_j:U\to\mathbb{R},j=1\ldots m,k=1\ldots n\text{ sind stetig}\end{aligned}$$

Weiterhin hatten wir:

$$T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n\text{ linear}\underset{(\det T\neq0)}{\overset{\text{Lemma 2}}{\Longrightarrow}}\lambda^m(T(B))=|\det T|\,\lambda^m(B),B\in\mathcal{B}^m$$

Frage: Ist $\varphi : U \to V, U, V \subset \mathbb{R}^m$ ein Diffeomorphismus, gilt dann auch

$$\lambda^m(V) = \int_V d\lambda^m = \int_{\varphi(U)} d\lambda^m = \int_U |\det D\varphi| \, d\lambda^m$$

$$\text{oder gilt } \lambda^m(\varphi(B)) = \int_{\varphi(B)} d\lambda^m = \int_B |\det D\varphi| \, d\lambda^m$$

$$\text{oder sogar } \int_V f \, d\lambda^m = \int_{\varphi(U)} f \, d\lambda^m = \int_U f \circ \varphi \, |\det D\varphi| \, d\lambda^m \text{ für geeignete } \varphi?$$

Satz 24.3 (Transformationsformel, Jacobi 1841). *$U, V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\varphi : U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus (inbesondere also $\det D\varphi$ ist nullstellenfrei auf U), $V = \varphi(U)$. Dann gilt:*

a) $\forall \ A \subset \mathcal{B}_U^m = U \cap \mathcal{B}^m$ *(Spur σ-Algebra) ist*

$$\boxed{\lambda^m(\varphi(A)) = \int_A |\det D\varphi| \, d\lambda^m} \tag{3}$$

b) $\forall \in \mathcal{M}^+(V, \mathcal{B}_V^m) = \mathcal{M}^+(V, V \cap \mathcal{B}^m)$ *gilt*

$$\boxed{\int_V f \, d\lambda^m = \int_{\varphi U} f \, d\lambda^m = \int_U f \circ \varphi \, |\det D\varphi| \, d\lambda^m} \tag{4}$$

c) Sei $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) ist λ^m integrierbar über V oder äquivalenterweise $f \circ \varphi \, |\det D\varphi|$ ist über U λ^m integrierbar. Dann gilt

$$\boxed{\int_V f \, d\lambda^m = \int_{\varphi(U)} f \, d\lambda^m = \int_U f \circ \varphi \, |\det D\varphi| \, d\lambda^m} \tag{5}$$

Ein paar Vorarbeiten: Halbring $\mathcal{H} = \{ \emptyset \} \cup \{ [a, b), a, b \in \bigcup_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\mathbb{Z}^m, [a, b] \subset U \}$ erzeugt Spur σ-Algebra $\mathcal{B}_U^m = U \cap \mathcal{B}^m$.

Lemma 24.4. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\varphi : U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus. Dann gilt*

$$\boxed{\forall I \in \mathcal{H} : \lambda^m(\varphi(I)) \leq \int_I |\det D\varphi| \, d\lambda^m} \tag{6}$$

Es gilt also Gleichung (3) als Ungleichung $\leq$.

Beweis. Später. $\square$

Lemma 24.5.

$$\forall\, A \in \mathcal{B}_u^m \ \textit{ist}\ \lambda^m\left(\varphi\left(A\right)\right) \leq \int_A \left|\det D_\varphi\right| \, d\lambda^m. \tag{7}$$

Beweis. Vergleichssatz oder Nachmachen des Beweises des Eindeutigkeitssatzes über $\mathcal{D} := \{\, D \in \mathcal{B}_u^m : (7)\,\} \implies \mathcal{D}$ ist Dynkinsystem sowie $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}$ □

Lemma 24.6. *$\forall\, f \in \mathcal{M}^+\left(V, \mathcal{B}_V^m\right)$ ist, $U, V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\varphi : U \to U$ Diffeomorphismus.*

$$\int_V f \, d\lambda^m = \int_{\varphi(U)} f \, d\lambda^m \leq \int_U f \circ \varphi \left|\det D\varphi\right| \, d\lambda^m$$

Beweis.

Schritt 1 $f \in E^+\left(V, \mathcal{B}_V^m\right), f = \sum_{l=1}^k \alpha_l \mathbb{1}_{B_l}, B_l \in \mathcal{B}_V^m, \alpha_l \geq 0$

$$\begin{aligned}
\implies \int_V f \, d\lambda^m &= \sum \alpha_l \int_{B_l} d\lambda^m && = \sum \alpha_l \int_{\varphi(A_l)} d\lambda^m, A_l := \varphi^{-1}\left(B_l\right) \\
&= \sum \alpha_l \lambda^m\left(\varphi\left(\right)\right) && \overset{\text{Lemma 5}}{\leq} \sum \alpha_l \int_{A_l} \left|\det D\varphi\right| \, d\lambda^m \\
&= \int \sum \alpha_l \mathbb{1}_{A_l} \left|\det D\varphi\right| \, d\lambda^m && = \int_U f \circ \varphi \left|\det D\varphi\right| \, d\lambda^m
\end{aligned}$$

Schritt 2 Es gilt $f \in \mathcal{M}^+\left(V, \mathcal{B}_V^m\right)$. Nehme eine wachsende Folge $u_n \in E^+\left(V, \mathcal{B}_V^m\right), u_{n+1} \geq u_n \geq 0$ mit $f = \sup_n u_n = \lim_{n\to\infty} u_n$.

Damit sind wir fertig! □

Wir haben

$$\begin{aligned}
\int_V f \, d\lambda^m = \int_{\varphi(U)} f \, d\lambda^m &\leq \int_U f \circ \varphi \left|\det D\varphi\right| \, d\lambda^m \\
= \int_U \tilde{f} \, d\lambda^m = \int_{\Psi(V)} \tilde{f} \, d\lambda^m &\underset{\text{Lemma 6}}{\leq} \int_V \tilde{f} \circ \Psi \left|\det D\Psi\right| \, d\lambda^m
\end{aligned}$$

Dabei soll $\tilde{f} = f \circ \varphi \left|\det D\varphi\right|$ und $\Psi = \varphi^{-1}$ sein. Es ist also

$$\begin{aligned}
\tilde{f}\left(\Psi\left(x\right)\right) &= \left(\tilde{f} \circ \Psi\right)\left(x\right) = \left(\left(\left(f \circ \varphi \left|\det D\varphi\right|\right) \circ \Psi\right)\left(x\right)\right) \\
&= f\left(\varphi\left(\Psi\left(x\right)\right)\right) \left|\det D\varphi\left(\Psi\left(x\right)\right)\right| = f\left(x\right) \left|\det D\varphi\left(\varphi^{-1}\left(x\right)\right)\right|
\end{aligned}$$

Daraus folgt auch

$$\begin{aligned}\left(\tilde{f}\circ\Psi\left|\det D\Psi\right|\right)(x) &= f(x)\left|\det D\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\det D\varphi^{-1}(x)\right|\\ &= f(x)\left|\det\left(D\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)D\varphi^{-1}(x)\right)\right|\\ &= f(x)\left|\det \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}\right| = f(x)\end{aligned}$$

Also ist schließlich

$$\int_V \tilde{f}\circ\Psi\left|\det D\Psi\right|\,d\lambda^m = \int_V f\,d\lambda^m ☺$$

Wir wissen auch, dass wegen $\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right) = \mathrm{id}_V,\ \varphi : U \to V$ und der Kettenregel $D\varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\cdot D\varphi^{-1}(x) = D\left(\varphi\circ\varphi^{-1}\right)(x) = D\mathrm{id}_V = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ gilt.
Damit folgt Teil b) von Satz 3, dass f Indikatorfunktion messbarer Mengen $B = \varphi(A)$ ist und damit Teil a von Satz 3. Für Teil c betrachte man f^+, f^-, Teil b und subtrahiere.
Damit hätten wir Satz 3 geschaffen (Modulo Beweis von Lemma 4 und Lemma 2). 27.01.2020

Lemma 6 folgt aus Lemma 5 und dieser aus Lemma 4! Zuerst zeigen wir aber Lemma 2:

Beweis zu Lemma 2. Man rechne nach, dass $\nu_T(A) := \lambda^m(T(A)), A \in \mathcal{B}^m$ ein Maß auf $\mathcal{B}^m$ definiert. Weiterhin ist:

$$\nu_T(A+x) = \lambda^m(T(A+x)) = \lambda^m(T(A)+Tx) = \lambda^m(T(A)) = \nu_T(A)$$

Also ist ν_T translationsinvariant auf $\mathcal{B}^m$ und es gilt:

$$\begin{aligned}\nu_T = \psi(T)\cdot\lambda^m, \psi(T) &= \nu_T([0,1)^m) &= \underbrace{\lambda^m(T([0,1)^m))}_{>0} < \infty\\ \lambda^m(ST(A)) = \psi(S)\lambda^m(T(A)) &= \psi(S)\psi(T)\lambda^m(A)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \psi(ST) = \psi(S)\psi(T)$$

<u>Polarzerlegung:</u> Sei $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linear und bijektiv. Es existiert dann eine längenerhaltende, positiv definite Matrix $O \in \mathcal{O}(m)$ mit $|T|$, für die $T = O|T|$ gilt.

$$\Longrightarrow \psi(T) = \psi(O|T|) = \psi(O)\psi(|T|) = \psi(|T|)$$

Weiterhin existieren $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_m), \lambda_j > 0, S \in \mathrm{SU}(m)\left(\Longrightarrow S^t = S^{-1}, S^tS = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}\right)$ mit $|T| = S^tDS$. Wegen $\psi(O)\lambda^m(B_1) = \lambda^m(O(B_1)) = \lambda^m(B_1)$ gilt $\psi(O) = 1$. Nun folgt:

$$\psi(|T|) = \underbrace{\psi\left(S^t\right)}_{=1}\psi(D)\underbrace{\psi(S)}_{=1} = \underbrace{\psi\left(S^tS\right)}_{\mathrm{id}}\psi(D) = \psi(D)$$

Nun ist aber $\lambda^m(D([0,1)^m)) = \lambda^m\left(\prod_{j=1}^m[0,\lambda_j)\right) = \prod_{j=1}^m\lambda_j = \det(|T|) = |\det(T)|$ $\square$

Polarzerlegung: Sei $T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ linear und bijektetiv.

$$\implies\ \exists\, O\subset\mathcal{O}\left(m\right):\left|T\right|\ \text{positiv definite Matrix}\quad T=O\left|T\right|\quad \left|\det T\right|=det\left|T\right|$$

Beweis. Sei T^tT symmetrische positiv definite Matrix.

$$\begin{gathered}\implies\ \exists\, R\in SU\left(m\right),\ R^tR=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}=\mathbb{1}_{m\times m}\\ T^tT=R^tR\qquad D=diag\left(d_1,\dots,d_m\right)\quad d_j>0\\ \text{Definiere }\left|T\right|=\sqrt{T^tT}=R^t\sqrt{D}R\text{ invertierbar. }\sqrt{D}=diag\left(\sqrt{d_1},\dots,\sqrt{d_m}\right)\end{gathered}$$

Definiere $O=T\left|T\right|^{-1}$ $\qquad\left|T\right|^{-1}=R^t\left(\sqrt{D}\right)^{-1}R$

$$\begin{aligned}
&& \left\langle Ox,Ox\right\rangle_{\mathbb{R}^m}&=\left\langle T\left|T\right|^{-1}x,T\left|T\right|^{-1}x\right\rangle=\left\langle \left|T\right|^{-1}x,\underbrace{\overbrace{T^tT}^{=\left|T\right|^2}\left|T\right|^{-1}}_{=\left|T\right|^2\left|T\right|^{-1}=\left|T\right|}x\right\rangle\\
&\implies T=O\left|T\right|\quad\lambda\in\mathbb{R}^m && =\left\langle \left|T\right|^{-1}x,\left|T\right|x\right\rangle=\left\langle\underbrace{\left|T\right|\left|T\right|^{-1}}_{=\mathrm{id}}x,x\right\rangle\\
&\implies O^tO=\mathrm{id}_{R^m} && =\left\langle x,x\right\rangle
\end{aligned}$$

☺ ☐

Wir haben auch $\left(\det\left|T\right|\right)^2=\det\left(\left|T\right|^2\right)=\det\left(T^tT\right)=\left(\det T\right)^2$ und somit $\det\left|T\right|=\left|\det T\right|$.

Beweis zu Lemma 4. Nehme $I\in\mathcal{H}$ sodass $\overline{I}\subset U$. Dann gilt

$$I=\dot{\bigcup_{\nu=1}^{n}}I_\nu\tag{8}$$

wobei I_ν Würfelseiten der Länge l sind. Beliebig verfeinern durch Halbieren der Seiten von I_ν. Zerlegung (7) kann beliebig fein sein. Skizze

$$\overline{I}\subset U\implies\exists\, r>0:B_r\left(x\right)\subset U\ \forall x\in\overline{I}$$

Da $\overline{I}$ kompakt ist gilt $\forall\varepsilon>0\ \exists\, 0\le\delta\le1$ mit

$$\boxed{\left\|D_\varphi\left(x\right)-D_\varphi\left(y\right)\right\|\le\varepsilon\ \forall x,y\in\overline{I}:\left\|x-y\right\|\le\delta}\tag{9}$$

Behauptung Mit $M := \sup_{x \in \overline{I}} \left\| (D\varphi(x))^{-1} \right\| < \infty$ gilt für I_ν, sofern die Kantenlänge d von I_ν klein genug ist

$$\lambda^m(\varphi(I_\nu)) \leq \left(1 + 2M\sqrt{m}\varepsilon\right) \int_{I_\nu} |\det D\varphi| \, d\lambda^m \tag{10}$$

mit ε an Verlust.

Angenommen die Behauptung gilt

$$\begin{aligned}
\lambda^m(\varphi(I)) &= \lambda^m\left(\bigcup_{\nu=1}^{m} \varphi(I_\nu)\right) \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{n} \lambda^m(\varphi(I_\nu)) \\
&\underset{(9)}{\leq} \sum_{\nu=1}^{n} \left(1 + 2M\sqrt{m}\varepsilon\right)^m \int_{I_\nu} |\det D\varphi| \, d\lambda^m \\
&= \left(1 + 2M\sqrt{m}\varepsilon\right)^m \int_{I} |\det D\varphi| \, d\lambda^m \quad \forall \varepsilon > 0
\end{aligned}$$

Der Grenzwert $\varepsilon \downarrow 0$ liefert $\lambda^m(\varphi(I)) = \int_I |\det D\varphi| \, d\lambda^m$! ☺
Es reicht also, die (9) zu zeigen. Sei $a \in \overline{I}_\nu$ mit $\inf_{x \in \overline{I}_\nu} |D\varphi(x)| = |D\varphi(a)|$. Die Idee wäre, φ durch eine affin lineare Funktion auf I_ν zu approximieren:
Definiere $T := D\varphi(a) \overset{(8)}{\Longrightarrow} \sup_{x \in \overline{I}} \left\| D\varphi(x) - \underbrace{D\varphi(a)}_{=T} \right\| \leq \varepsilon$, sofern $I_\varphi \subset \overline{B}_\delta(a)$. Dies ist der Fall, sofern $l \leq \frac{\delta}{\sqrt{m}}$. Definiere also $h(x) = \varphi(x) - Tx$.

$$\|h(x) - h(a)\| = \|\varphi(x) - Tx - (\varphi(a) - Ta)\| \overset{\text{MWS auf } \mathbb{R}^m}{\leq} \sup_{z \in \overline{I}_\nu} \underbrace{\|Dh(z)\|}_{=\|D\varphi(z) - T\| \leq \varepsilon} \|x - a\| \leq \varepsilon\sqrt{m}l$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow h(x) \in h(a) + B_{\varepsilon\sqrt{m}l}(0) \\
&\Longrightarrow \varphi(x) - T(x) \in \varphi(a) - T(a) + B_{\varepsilon\sqrt{m}l}(0) \\
&\Longrightarrow \varphi(x) \in \varphi(a) + T(x - a) + B_{\varepsilon\sqrt{m}l}(0) \\
&\Longrightarrow \varphi(x) \in \varphi(a) + T(x - a) + T\left(T^{-1}\left(B_{\varepsilon\sqrt{m}l}(0)\right)\right)
\end{aligned}$$

Wegen $\left\|T^{-1}\right\| \leq M$ und $\delta \leq 1$ sowie $l \leq \frac{\delta}{\sqrt{m}} \leq \frac{1}{\sqrt{m}}$ gilt $T^{-1}\left(B_{\varepsilon\sqrt{m}l}(0)\right) \in B_{\|T^{-1}\|\varepsilon\sqrt{m}l}(0) \subset$

$B_{\varepsilon M\sqrt{m}l}(0) \subset B_{\varepsilon M}(0)$ und somit folgt:

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \overline{I_\nu} : \varphi(x) &\subset \varphi(a) + T(x-a) + T(B_{\varepsilon M}(0)) \\
&= \varphi(a) + T(x - a + B_{\varepsilon M}(0)) \\
\implies \varphi(I_\nu) &\subset \varphi(a) + T\left(\underbrace{I_\nu + B_{\varepsilon M}(0)}_{\subset \tilde{I}_\nu} - a\right)
\end{aligned}$$

Dabei ist $\tilde{I}_\nu$ ein Würfel mit Kantenlänge $l(1+2\varepsilon M)$.

$$\begin{aligned}
\implies \lambda^m(\varphi(I_\nu)) &\le \lambda^m\left(\varphi(a) + T\left(\tilde{I}_{\tilde{\nu}}\right) - a\right) \\
&= \lambda^m\left(T\left(\tilde{I}_\nu - a\right)\right) \\
&\underset{\text{Lemma 2}}{=} |\det T|\,\lambda^m\left(\tilde{I}_\nu - a\right) \\
&= |\det T|\,\lambda^m\left(\tilde{I}_\nu\right) \\
&= |\det T|\,(l(1+2\varepsilon M))^m \\
&= (1+2\varepsilon M)^m \underbrace{\lambda^m(I_\nu)}_{l^m}
\end{aligned}$$

Dies gilt für alle $\varepsilon > 0$, sofern die Kantenlänge von I_ν klein genug ist!

$$|\det T|\,\lambda^m(I_\nu) = \int_{I_\nu} |\det T|\, d\lambda^m \le \int_{I_\nu} |\det D\varphi|\, d\lambda^m$$

Es folgt die Behauptung, womit alles endgültig gezeigt ist. $\square$

Beispiel (Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$)**.** *Seien* $U = (0,\infty)\times(0,2\pi)$, $V = \mathbb{R}^2 \backslash \underbrace{([0,\infty)\times\{\infty\})}_{\lambda^2 \textit{ Nullfolge}}$

$$\begin{aligned}
\varphi : U \to V,\ (r,\vartheta) &\to \varphi(r,\vartheta) := (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)^t \\
D\varphi(r,\theta) \text{ `` = '' } (\partial_r\varphi, \partial_\vartheta\varphi) &= \begin{pmatrix} \partial_r\varphi_1 & \partial_\vartheta\varphi_1 \\ \partial_r\varphi_2 & \partial_\vartheta\varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -r\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & r\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \\
&\implies \det D\varphi = r > 0
\end{aligned}$$

$$\implies \int_{\mathbb{R}^2} f\, d\lambda^2 = \int_{\underbrace{V}_{=\varphi(U)}} f\, d\lambda^2 = \int_U f\circ\varphi \underbrace{|\det D\varphi|_{=r}}\, d\lambda^2(r,\vartheta), \quad r = \left|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \int_U f(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))\, r\, d\lambda^2(r,\vartheta) = \int_U f(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))\, r\, drd\vartheta = \int_U f(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta))\, r\, d\vartheta$$

Dies gilt für messbar oder integrierbare $f \geq 0$. Nach Tonelli gilt also

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda^2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f\left(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)\right) d\vartheta \; r \, dr \qquad \left(x_1^2 + x_2^2 = r^2\right)$$

Betrachte beispielsweise das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \, dx_1 \, dx_2 \\
&\overset{\text{Polarkoord.}}{=} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} \, d\vartheta \;\; dr \\
&= 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} \, dr \\
&\overset{u=r^2}{=} \frac{2\pi}{2} \int_0^\infty e^{-u} \, du \\
&= \pi \left[-e^{-u}\right]_0^\infty \\
&= \pi
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}}$$

31.01.2020

25 Integration auf Mengen, die durch eine Karte beschrieben werden können

Ziel: Maß und Integral auf Untermannigfaltigkeiten (U-Mfg)

Motivation:

1. Betrachte eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, 1 \leq k < n$ (also $T \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mit maximalem Rang $\operatorname{Rang} T = k$). Dann ist $T\left(\mathbb{R}^k\right) =: L = \operatorname{Bild}(T)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Ist $V \subset \mathbb{R}^k$ offen, so ist $T(V) \subset L$ relativ offen.

Lemma 25.1 (Polarzerlegung)**.** *Wir definieren die Menge*

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(k,n) :&= \{ \textit{längenerhaltende Abbildungen } Q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \} \\
&= \{ Q \in \mathbb{R}^{n \times k} : Q^t Q = \mathbb{1}_{k \times k} \}
\end{aligned}$$

Sei $T \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mit $\operatorname{Rang} T = k$. Dann existiert eine Matrix $Q \in \mathcal{O}(k,n)$ und eine positiv definite symmetrische Matrix $|T| \in \mathbb{R}^{k\times k}$ mit

$$T = Q\,|T| \tag{1}$$

$$|T|^2 = T^tT, \det|T| = \left(\det T^tT\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

Beweis.

$\underbrace{T^tT}_{\text{symm., pos. def.}}$ $\operatorname{Rang} T = k \implies T^tT$ ist postiv semidefinit, hat also Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$.

Also existiert ein R mit $T^tT = R^tDR, R^tR = \mathrm{id}_{k\times k}, R^t = R^{-1}$, wobei $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Definiere $|T| := R^t\sqrt{D}R^t$, wobei wir $\sqrt{D} := \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, sqrt\lambda_k\right)$. Es gilt:

$$|T|^2 = R^t\sqrt{D}\underbrace{RR^t}_{=\mathrm{id}}\sqrt{D}R = R^t\sqrt{D}\sqrt{D}R = R^tDR = T^tT$$

Weiterhin gilt

$$|T|^{-1} = R^t\,(D)^{-\frac{1}{2}}\,R = R^t\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\right)R$$

Definiere $Q := T\,|T|^{-1}$, dann gilt:

$$T = Q\,|T|$$

$$\begin{aligned}\langle Qx, Qx\rangle_{\mathbb{R}^n} = \left\langle T\,|T|^{-1}x, T\,|T|^{-1}x\right\rangle_{\mathbb{R}^n} = \left\langle |T|^{-1}x, \underbrace{\overbrace{T^tT}^{|T|^2}\,|T|^{-1}}_{=|T|}x\right\rangle_{\mathbb{R}^k} &= \left\langle |T|^{-1}x, |T|\,x\right\rangle_{\mathbb{R}^k} \\ &= \langle x, x\rangle_{\mathbb{R}^k}\end{aligned}$$

Damit ist

$$(\det(T))^2 = k\det\left(|T|^2\right) = \det T^tT$$

$\square$

Beobachtung: $Q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ Isometrie, $T = G\,|T|$, $L = \operatorname{Bild}(T) = G(\operatorname{Bild}|T|)$.

S^k = nat. vol. auf L, $A \subset \mathbb{R}^k$, $T(A) \subset L$, $S^k(T(A)) = S^k(G\,|T|\,(A)) = \lambda^k(|T|\,(A))$.

G: Weil $|T|\,(A)$ im $\mathbb{R}^n$ keinen ??? aber längenerhaltend.

$$\lambda^k(|T|\,(A)) = \det|T|\,\lambda^k(A) = \left(\det T^tT\right)^{\frac{1}{2}}\lambda^k(A) =: S^k(T(A)) \tag{3}$$

$V \subset \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^n)$ eine Immersion (d.h. $D_\varphi(x)$ ist injektiv, d.h. $\operatorname{Rang} D_\varphi(x) = k\ \forall x \in V$) und Homöomorphismus von V auf $\varphi(V)$ (d.h. $\varphi : V \to \varphi(V)$ ist stetig, bijektiv und $\varphi^{-1} : \varphi(V) \to V$ ist stetig).

Definition 25.2.

$$\zeta_k := \{\, E \subset \varphi(V) : \varphi^{-1}(E) \in \mathcal{B}^m \,\} \tag{4}$$

$$S^k(E) := \int_{\varphi^{-1}(E)} \left(\det\left(D\varphi^t D\varphi\right)\right)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^k \tag{5}$$

Lemma 25.3.

a) ζ_k *ist* σ*-Algebra*

b) $S^k : \zeta_k \to [0, \infty]$ *ist ein Maß*

c) ζ_k *und* S^k *hängen nur von der Menge* $\varphi(V)$ *ab! D.h. ist* $V' \subset \mathbb{R}^k$ *offen und* $\varphi' \in \mathcal{C}^1(V', \mathbb{R}^n)$ *eine Immersion, sowie* $\varphi' : V' \to \varphi(V')$ *ein Homöomorphismus mit* $\varphi(V) = \varphi'(V')$*, so folgt:*

$$E \in \zeta_k \iff \varphi'^{-1}(E) \notin \mathcal{B}^n \tag{6}$$

$$\int_{\varphi^{-1}(E)} \left(\det D_\varphi^t D_\varphi\right)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^k = \int_{\varphi'^{-1}(E)} \left(\det D_\varphi'^t D_\varphi'\right)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^k \tag{7}$$

Beweis. a) und b) folgen aus der Definition und der Bijektivität von φ auf $\varphi(V)$ und der Linearität des Integrals. Betrachte also den 3. Fall:

$$\begin{array}{ccc} V & \overset{\varphi}{\to} & \varphi(V) \\ \uparrow \psi & & || \\ V' & \overset{\varphi'}{\longrightarrow} & \varphi'(V') \end{array}$$

Dabei ist $\varphi^{-1} \circ \varphi' : V' \to V$ ein Homöomorphismus.

Behauptung. ψ *ist sogar* $\mathcal{C}^1$*-Diffeomorphismus (siehe Skript)*

Es gilt $\boxed{\varphi' = \varphi \circ \psi}$. Also ist

$$D\varphi' = D(\varphi \circ \psi) = (D\varphi \circ \psi)\, D\varphi \tag{8}$$

$$D\varphi'(x)^t \, D\varphi(x) = (D\psi(x))^t \left(\left(D\varphi^t(\psi(x))\right)\right) D\psi(x) \tag{9}$$

$$\left(\det\left(D\varphi'^t D\varphi\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\det\left(D\varphi^t D\varphi\right) \circ \psi\right)^{\frac{1}{2}} |\det D\varphi| \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \implies \int_{\varphi'^{-1}} \left(\det D\varphi'^t D\varphi\right)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^k &= \int_{\varphi^{-1} \circ \varphi^{-1}(E)} \left(\det\left(D\varphi'^t D\varphi\right)\right)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^k \\ &\underset{\text{Jacobi}}{=} \int_{\varphi^{-1}(E)} \left(\det D\varphi^t D\varphi\right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left|\det D\varphi \circ \varphi^{-1}\right| \cdot \left|\det D\varphi^{-1}\right|}_{=1} d\lambda^k \\ &= \int_{\varphi(E)^{-1}} \left(\det D\varphi^t D\varphi\right)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^k \end{aligned} \tag{11}$$

$\square$

Also ist $\left(\varphi\left(V\right), \lambda^k\right)$ ist Maßraum. $f : \varphi\left(V\right) \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) messbar gdw. $f \circ \varphi$ messbar ist. Für integrierbares f ist weiterhin $|f| \circ \varphi \left(\det D\varphi^t D\varphi\right)^{\frac{1}{2}}$ auf V bzgl. λ^k integrierbar und es gilt

$$\boxed{\int_{\varphi(V)} f \; dS^k = \int_V f \circ \varphi \left(\det D\varphi^t D\varphi\right)^{\frac{1}{2}} \; d\lambda^k} \tag{12}$$

Wir nennen weiterhin $g = D\varphi^t D\varphi$ die Gramsche Matrix oder Flächeninhalt oder Jacobische. Oft schreiben wir das als $J\varphi = \left(\det D\varphi^t D\varphi\right)^{\frac{1}{2}} = (\det g)^{\frac{1}{2}}$. vielleicht???

Wichtig: Matrix $D_\varphi^t D_\varphi$ kann man schreiben als

$$\boxed{\left(D_\varphi^t D_\varphi\right)_{i,j} = \langle \partial_i \varphi, \partial_j \varphi \rangle_{\mathbb{R}^n} \qquad i,j = 1, \ldots, k} \tag{13}$$

Denn: $(D_\varphi)_{l,m} = \frac{\partial \varphi_l}{\lambda}$ weil gilt $D_\varphi = (\partial_1 \varphi, \ldots, \partial_k \varphi)$ und $D_\varphi^t = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi^t \\ \vdots \\ \partial_k \varphi^t \end{pmatrix}$. Also ist

$$D_\varphi^t D_\varphi = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi^t \\ \vdots \\ \partial_k \varphi^t \end{pmatrix} (\partial_1 \varphi, \ldots, \partial_k \varphi) = \left(\partial_i \varphi^t \dot{\partial}_j \varphi\right)_{i,j} = \left(\langle \partial_i \varphi, \partial_j \varphi \rangle_{\mathbb{R}^n}\right)_{i,j=1,\ldots,k}$$

Zum Beispiel sei $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ eine 2-dimensionale Immersion. Dann heißt $\varphi = \varphi\left(x,y\right)$ eine reguläre Fläche. Es sei dann $g = D_\varphi^t D_\varphi = \begin{pmatrix} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|^2 & \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle & \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|^2 \end{pmatrix}$.
Dann ist

$$\det g = \det D_\varphi^t D_\varphi = \left(\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|^2 \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|^2 - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}^2 \times \frac{\partial \varphi}{\partial y}^2\right|^2$$

Wobei im letzten Ausdruck das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ gemeint ist, denn für $a, b \in \mathbb{R}^3$ gilt $|a|^2 |b|^2 - \langle a, b \rangle^2 = |a \times b|^2$.

Sphäre

$$\varphi : U = (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathcal{B}^2 \subset \mathbb{R}^3 \quad \varphi\left(\Theta_1, \Theta_2\right) = (\sin \Theta_1 \cos \Theta_2, \sin \Theta_1 \sin \Theta_2, \cos \Theta_1)$$

$$\implies D\varphi^t D\varphi = |\sin \Theta_1|^2$$

$$\implies S^2\left(\mathcal{B}^2\right) = \text{ Fläche in } \mathcal{B}^2 = \int_a^{2\pi} \left(\int_a^{2\pi} \sin \Theta_1 \; d\Theta_1\right) \; d\Theta_2 = 4\pi$$

Beispiel 4. *Sei* $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *offen,* $\psi \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$, $\varphi : V \to \mathbb{R}^n, x \mapsto (x, \psi(x))$ *eine Immersion und Homöomorphismus. Es gilt* $\partial_j \varphi = e_j + e_n \partial_j \psi, j = 1, \ldots, n$. *Nach (13) gilt*

$$D\varphi^t D\varphi = id_{n-1} + \nabla(\psi) \otimes \nabla(\psi) \tag{14}$$

Wir definieren weiterhin $(a \times b)_{i,j} := a_i b_j$. *Dann ist* $\det(\mathbb{1} + a \otimes a) = 1 + |a|^2$ $(*)$. *Also*

$$A = \mathbb{1} + a \otimes a = \mathbb{1} + |a\rangle\langle a| \qquad \text{(Physiker)}$$
$$Ax = x + a\langle a, x\rangle$$

Also hat es Eigenwerte $1 \times 1 + |a|^2$ *bzw.* $n - 1 \times 1$. *Daraus folgt* $(*)$.

$$\int_{Graph(\psi)} f\, dS^{n-1} = \int_{\varphi(V)} f\, dS^{n-1} = \int_V f(x, \psi(x)) \sqrt{1 + |\nabla\psi(x)|^2}\, \lambda^{n-1}(dx) \tag{15}$$

26 Grundlagen zu Untermannigfaltigkeiten

Definition 26.1 (Untermannigfaltigkeiten (U-Mfg.))**.** *$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale Untermannigfaltigkeit falls zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$ und ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\phi : W \to \mathbb{R}^n$ existiert, so dass*

$$\phi : (M \cap W) \to \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}\right) \cap \phi(W) \qquad \text{(„lokale Plättung“)}$$

Skizze

Satz 26.2 (U-Mannigfaltigkeitskriterium)**.** *Seien $1 \leq k < n$, $k, n \in \mathbb{N}$, $m \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1) *M ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit*
2) *Niveaumengenkriterium: Zu $p \in M$ $\exists$ offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$ und $h \in \mathcal{C}^1\left(W, \mathbb{R}^{n-k}\right)$ mit* $\operatorname{Rang} Dh = n-k$ *auf W, sodass $M \cap W = \{q \in W : h(q) = 0\} = h^{-1}(\{0\}), 0 \in \mathbb{R}^{n-k}$.*
3) *Graphenkriterium: Zu $p \in M$ gibt es nach Umnummerierung der Koordinaten offene Umgebung $U \times V \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, U \in \mathcal{C}^1(U, V)$, sodass $M \cap (U \times V) = \{(x, \varphi(x)) : x \in U\}$.*

Beispiel 5. *Sei* $S^{n-1} := \{q \in \mathbb{R}^n : |q| = 1\}$. *Definiere* $h(q) := |q|^2 - 1$ *und* $W = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. *Dann ist* $Dh(q) = \langle \nabla h(q), \cdot\rangle, \nabla h(q) = 2q$ *und* $S^{n-1} \cap W = \{q \in W : h(q) = 0\}$.

Satz 26.3 (σ-Kompaktheit von U-Mfg.)**.** *Jede k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen $K_j \subset M$ $M = \bigcup_{j=1}^\infty K_j$.*

Beweis. Skript $\square$

03.02.2020

Definition 26.4 (Karten & Atlas)**.** *Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$.*

Karte: Sei $k = 1, \dots, n$.
Das Paar (φ, U) heißt Karte (für M), falls $U \subset \mathbb{R}^k$ offen.
Sei nun $\varphi \in \mathcal{C}^1\left(U, \mathbb{R}^k\right)$ die Inversion mit $\varphi(U) \subset M$, $\varphi : U \to \varphi(U)$ Homöomorphismus. (auch lokale Parametrisierung)

Atlas: Eine Menge von $(\varphi_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in A}$ heißt Atlas (für M) falls $\bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$. Ein Atlas heißt endlich (abzählbar) falls die Indexmenge A endlich (abzählbar) ist.

Satz 26.5. *Für jede $\mathcal{C}^1$-U-Mfg $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es immer einen abzählbaren Atlas. Außerdem:*

$$\boxed{\text{Jedes } p \in M \text{ liegt nur in endlich vielen Mengen } \varphi_\alpha(U_\alpha)}$$

Beweis. Siehe Geometrie-Vorlesung (oder Skript). □

27 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Seien $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Abbildung und $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ eine Karte, wobei $U_\alpha \subset \mathbb{R}^k$.
<u>Annahme:</u> $f = 0$ in $M \setminus \varphi_\alpha(U_\alpha)$.
Wir definieren analog zu (25,12):

$$\int_M f \, dS^k = \int_M f \, dS_M = \int_M f \, dS_M^k := \int_{U_\alpha} f \circ \varphi_\alpha \left(\det D\varphi_\alpha^t D\varphi_\alpha\right)^{\frac{1}{2}} d\lambda^k$$

Wir haben dabei $U \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}}$.

Zusammenkleben Zerlegung der Eins:

$$\boxed{\begin{aligned} h_\alpha &: M \to \mathbb{R} \\ h_\alpha(p) &:= \frac{\mathbb{1}_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}(p)}{\sum_{\beta \in A} \mathbb{1}_{\varphi_\beta(U_\beta)}(p)}, \quad p \in M \end{aligned}} \tag{1}$$

Es gilt also $0 \leq h_\alpha \leq 1$ auf M und $\sum_{\alpha \in A} h_\alpha(p) = 1$ für alle $p \in M$. Dabei sei $(\varphi_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein abzählbarer Atlas unter den Bedingungen aus (27.1). Beachte insbesondere auch die Annahme, dass $h_\alpha = 0$ auf $M \setminus \varphi_\alpha(U_\alpha)$ gilt.

Definition 27.1. *Unter obigen Bedingungen setzen wir folgendes um.*

$$\zeta_k\left(M\right) := \zeta_k := \left\{\, E \subset M : \left(E\varphi_\alpha\left(U_\alpha\right)\right)^{-1} \text{ Borelmessbare Menge im } \mathbb{R}^k \,\right\} \tag{2}$$

$$S^k_M\left(E\right) := S^k\left(E\right) = \sum_{\alpha\in A}\int_{U_\alpha}\left(h_\alpha \mathbb{1}_E\right)\circ\varphi_\alpha\left(\det D\varphi^t_\alpha D\varphi_\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^k \tag{3}$$

Lemma 27.2.

a) *$\zeta_k\left(M\right)$ ist σ-Algebra.*

b) *$\zeta^k_M; \zeta_k\left(M\right)\to[0,\infty]$ ist Maß.*

c) *Wegen der Definition von $\zeta_k\left(M\right)$ und ζ^k_M ist dieses unabhängig von der Wahl des Atlas.*

Beweis.

a) Folgt direkt aus der Definition.

b) Die Endliche Additivität folgt direkt aus der Definition; die Abzählbare Additivität aus der monotonen Konvergenz.

c) Sei $\left(\varphi'_\beta, U'_\beta\right)_{\beta\in B}$ ein weiterer Atlas.

Analog zum Beweis von Lemma 25.5 c):

$$\begin{aligned}&\int_{U_\alpha}\left(h_\alpha h'_\beta \mathbb{1}_E\right)\circ\varphi_\alpha\left(\det D\varphi^t_\alpha D\varphi_\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^k \\ =&\int_{U_\beta}\left(h_\alpha h'_\beta \mathbb{1}_E\right)\circ\varphi'_\beta\left(\det\left(D\varphi'_\beta\right)^t D\varphi^t_\beta\right)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^k\end{aligned} \tag{4}$$

Wir erinnern uns dabei, dass $U_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} M, U_\beta \xrightarrow{\varphi'_\beta} M$ und setzen $\psi := \varphi_\alpha\circ\left({\varphi'_\beta}^{-1}\right)$.

$\boxed{\varphi_\alpha\left(U_\alpha\right)\cap\varphi'_\beta\left(U_\beta\right)\cap E}$. Das Summieren von (4) über das Maß und Monotone Konvergenz liefert die Behauptung.

$\square$

Mit der σ-Algebra $\zeta_k\left(M\right)$ und dem Maß S^k_m auf $\zeta_k\left(M\right)$ erhält man aus den üblichen Prozeduren auch Integrale über messbare numerische Funktionen $f : M \to [0,\infty]$ und damit integrierbare Funktionen:

$\Longrightarrow$ $f : M \to \overline{\mathbb{R}}\left(\mathbb{C}\right)$ ist integrierbar über M falls

$$\boxed{\int_M |f| \, dS^k_M < \infty}$$

Das Integral ist dann definiert als:

$$\int_M f \, dS^k_M := \sum_{\alpha\in A}\int_{U_\alpha} f\circ\varphi_\alpha\left(\det D^t_{\varphi_\alpha}\det D_{\varphi_\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^k$$

Lemma 27.3 (Ähnlichkeitssatz). *Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Ähnlichkeit der Form $T(p) = \lambda G p + a, a \in \mathbb{R}^n, G \in \mathcal{O}(n), \lambda > 0$. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltigkeit, so ist auch $N := T(M)$ eine Untermannigfaltigkeit und für die zugehörigen Maße gilt:*

a) Ist $A \subset M$ messbar ($A \in \zeta_k(M)$), so ist $T(A) \in \zeta_k(N)$ mit $S_n^k(T(A)) = \lambda^k S_m^k(A)$.

b) Für positve messbare oder integrierbare Funktionen $f : N \to \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathbb{C})$ gilt

$$\int_N f \, dS_N^k = \lambda^k \int_M f \circ T \, dS_M^k$$

Beweis. Zu $q \in N$ wähle lokale Plättung $\Phi : W \to \Phi(W)$ von M mit $T^{-1}(q) \in W$. Dann ist $\Phi \circ T^{-1} : T(W) \to \Phi(W)$ eine lokale Plättung von N mit $q \in T(W)$. Also ist N eine $\mathcal{C}^1$-U-Mfg.

Ist (φ, U) eine Karte von M, so ist $(T \circ \varphi, U)$ eine Karte von N (und umgekehrt). Außerdem ist $(T \circ \varphi)^{-1}(T(A)) = \varphi^{-1}(A)$ A-messbar.

a) O.B.d.A. sei $A \subset \varphi(U)$ für die Karte (φ, U) von M. Die Ableitung der Translation ist die Identität und damit $DT(x) = \lambda G$. Also ist

$$\begin{aligned} D(T \circ \varphi(x))^t D(T \circ \varphi(x)) &\overset{\text{Kettenregel}}{=} D\varphi(x)^t (DT(\varphi(x)))^t DT(\varphi(x)) D\varphi(x) \\ &= D\varphi(x)^t (\lambda G)^t \lambda G D\varphi(x) \\ &= D\varphi(x)^t \lambda^2 G^t G D\varphi(x) \\ &= D\varphi(x)^t \lambda^2 D\varphi(x) \\ &= \lambda^2 D\varphi(x)^t D\varphi(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} S_N(T(A)) &= \int_{(T\circ\varphi)^{-1}(T(A))} \left(\det (DT \circ \varphi)^t D(T \circ \varphi)\right)^{\frac{1}{2}} d\lambda^k \\ &= \int_{\varphi^{-1}(A)} \lambda^k \left(\det D\varphi^t D\varphi\right)^{\frac{1}{2}} d\lambda^k \\ &= \lambda^k \int_{\varphi^{-1}(A)} \left(\det D\varphi^t D\varphi\right)^{\frac{1}{2}} d\lambda^k \\ &= \lambda^k S_M^k(A) \end{aligned}$$

b) Folgt aus a) für Elementarfunktion, dann weiter wie üblich.

□

Satz 27.4 (Zwiebelformel)**.** *Sei* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.
Dann folgt: $f\big|_{\partial B_r} \in \mathcal{L}^1\left(S^{n-1}_{\partial B_r}\right)$, $B_r = B_r(0)$, $\partial B_r = \partial B_r(0)$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda &= \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r} f \, dS^{n-1}_{\partial B_r}\right) dr \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathcal{B}^{n-1}} f(rw) \ S^{n-1}_{\mathcal{B}^{n-1}}(dw) \, dr\end{aligned}$$

Beweis. Sei $\varphi : U \to V \subset \mathcal{B}^{n-1}$ eine lokale Parametrisierung. Definiere $C(V) =$ offene Kugel über V in $\mathbb{R}^n = \{ r\omega : \omega \in V, r > 0 \}$. Dann sei $\Phi : (0,\infty) \times U \to C(V)$ mit $\Phi(r,y) = r\varphi(y)$ wobei $y \in U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ gelten soll.

$$g_{i,j} := \langle \partial_i \varphi, \partial_j \varphi \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

$$D\Phi(r,y)^t \, D\Phi(r,y) =$$

$$D\Phi = \left(\partial_r \Phi, \underbrace{\partial_1 \Phi}_{=\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}}, \partial_2 \Phi, \dots, \partial_{n-1}\Phi \right)$$

$$= (\varphi, r\partial_1 \varphi, \dots, r\partial_{n-1}\varphi)$$

$$\implies D\Phi(r,y)^t \, D\Phi(r,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 g(y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\implies \left(\det D\Phi^t D\Phi\right)^{\frac{1}{2}} = r^{n-1}\sqrt{\det g}$$

$$E = \varphi(A), A \subset \mathcal{B}^{n-1}, \mathcal{C}(E) : \text{Kugel über } E$$

Also ist

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}(E)} f \, d\lambda^n &= \int_{(0,\infty)} f(r,\varphi(y)) \, r^{n-1} \left(\det g(x)\right)^{\frac{1}{2}} \, d\lambda^n(r,y) \\ &\overset{\text{Fubini-Tornelli}}{=} \int_0^\infty \int_A f(r,\varphi(y)) \sqrt{\det g(x)} \ \lambda^{n-1}(dy) \ \lambda^1(dr) \\ &= \int_0^\infty \int_{\{ rw \in E \}} f(rw) \ S^{n-1}_{\mathcal{B}^{n-1}}(dw) \, dr \\ &\overset{\text{Lemma 3}}{=} \int_0^\infty \int_{\{ rw \in E \}} f(p) \ S^{n-1}_{\partial B_r}(dp) \, dr\end{aligned}$$

Der allgemeine Fall folgt aus der Zerlegung der Eins! □

Definition 27.5. *Sei* $A \subset \mathbb{R}^n$ *offen. Der* reguläre Rand *von* A *ist die Menge* $\partial_r A$ *der Punkte* $x \in \partial A$ *für die es* $\varphi > 0$ *und* $G \in \mathcal{C}^1(B_p(x))$ *gibt sodass überall* $DG \neq 0$ *gilt sowie*

$$\boxed{A \cap B_\varphi(x) = G^{-1}((-\infty, 0))} \tag{5}$$

A heißt $\mathcal{C}^1$-berandet, falls $\partial A = \partial_r A$.

Bemerkung.

$$\forall\, x \in \partial_r A : \partial_r A \cap B_p\left(x\right) = G^{-1}\left(\left\{ 0 \right\}\right) \tag{6}$$

Beweis. $\left(\partial_r A \cap B_\varphi\left(x\right)\right) \subset G^{-1}\left(\left\{ 0 \right\}\right)$ ist klar, denn ist $G\left(p\right) < 0$ so gibt es eine offene Umgebung U von p mit $G < 0$ in U und es gilt $U \subset A$. Ist andererseits $G\left(p\right) > 0$ so gibt es eine offene Umgebung U von p mit $G > 0$ in U und somit $U \subset A^C$.

Umgekehrt: $G\left(x\right) = 0, a \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G\left(x + ta\right) &= DG\left(x + ta\right)\left[a\right] \\ &= \left\langle \nabla G\left(x + ta\right), a \right\rangle \end{aligned} \tag{7}$$

Dabei ist $\nabla G\left(x\right) \neq 0$ und $a = \nabla G\left(x\right)$. Also enthält jede (offene) Umgebung von x den Punkt y mit $G\left(y\right) > 0$ bzw. einen (anderen) Punkt y mit $G\left(y\right) < 0$. Also ist $x \in \partial_r A$. $\square$

Bemerkung. *Aus (6) und dem Untermannigfaltigkeitskriterium (Niveaumengen) folgt:*

$$\partial_r A \cap B_\varphi\left(x\right) \ \textit{ist eine Untermannigfaltigkeit.}$$

Tangentialraum: Wir nennen den folgenden $\left(n-1\right)$ -dimensionalen Raum Tangentialraum:

$$\begin{aligned} T_x \partial_r A &= \left\{ a \in \mathbb{R}^n : DG\left(x\right)\left[a\right] = 0 \right\} \\ &= \left\{ a \in \mathbb{R}^n : a \perp \nabla G\left(x\right) \right\} \end{aligned} \tag{8}$$

07.02.2020

Lemma 27.6. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gibt es für jedes $x \in \partial_r A$ einen Vektor $v\left(x\right) \in \mathbb{R}^n$ mit*

a) $\left|v\left(x\right)\right| = 1$

b) $v\left(x\right) \perp T_x\left(\partial_r A\right)^\perp, x \in \partial_r A$

c) $\forall\, x \in \partial_r A$ *gibt es* $\varphi > 0$*:*

$$\begin{aligned} &x + tv\left(x\right) \in A && \forall\, \varphi < t < 0 \\ &x + tv\left(x\right) \notin && \forall\, 0 < t < \varphi \end{aligned}$$

Außerdem ist $v \in \mathcal{C}\left(\partial_r A, \mathbb{R}^n\right)$ und v ein (äußerer) Normalenvektor.

Beweis. Aus a), b), c) folgt Eindeutigkeit.

Existenz: Nehme:

$$\nu(x) = \frac{\nabla \mathcal{G}(x)}{|\nabla \mathcal{G}(x)|}$$

macht es! ☺ $\square$

28 Satz von Gauß

Satz 28.1 (Satz von Gauß)**.** *Definiere $\nu(x) := \frac{\nabla G(x)}{|\nabla G(x)|}$ als die äußere Normale (lokal). Sei weiterhin $A \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $\partial_r A = \partial A$. Dann gilt für $F \in \varphi\left(\overline{A}, \mathbb{R}^n\right) \cap \varphi'(A, \mathbb{R}^n)$:*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F = \sum_{j=1}^{n} \partial_j F_j \in \mathcal{L}^1(A) \\ \implies \int_A \operatorname{div} F \, d\lambda^n = \int_{\partial A} F \cdot \nu \, dS^{n-1}_{\partial A} \end{aligned}$$

Lemma 28.2. *$W \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi \in \mathcal{C}^1_C(W)$. Die letztere Menge enthält stetig differenzierbare und kompakte Träger* $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$.

$$\boxed{\int_W \frac{\partial f}{\partial x_i} \, d\lambda^n = 0 \quad \forall\, i = k, n} \tag{2}$$

Beweis. Setze f fest auf $\mathbb{R}^n$. Definiere $\tilde{f} := \begin{cases} f(x) & , x \in W \\ 0 & , x \notin W \end{cases}$. Also ist $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Setze weiterhin $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n} \, d\lambda^n &\overset{\text{Fatou}}{=} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n} \left(x', x_n\right) \, dx_n \, dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 0 \, dx' \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\square$

Lemma 28.3 (Lokale Version von Gauß)**.** *Sei $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und beschränkt.*

$$\psi \in \mathcal{C}^1(V) \qquad A := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x' \in V, \; x_n \subset \psi\left(x'\right) \right\}$$

$F \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}\left(\bar{A}, \mathbb{R}^n\right)$, *sodass* $\operatorname{div} F \in \mathcal{L}^1(A)$ *und es gebe* $K \in V \times \mathbb{R}$ *kompakt mit* $F = 0$ *in* $A \setminus K$

$$\boxed{\implies \int_A \operatorname{div} F \, d\lambda^n = \int_{\partial A} F \cdot \nu \, dS^{n-1}} \tag{4}$$

Beweis.

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : F\left(x', x_n\right) = 0 \; \forall\, x_n \leq a$$

$$\implies \int_A \frac{\partial F_n}{s_n} \, d\lambda^n \underset{\text{Fubini}}{=} \int_V \int_a^{\Psi(x')} \frac{\partial F_n}{x_n} \left(x', x_n\right) dx_n \, dx'$$

$$= \int_V F\left(x', \Psi\left(x'\right)\right) - F\left(x', a\right) dx' = \int_V F\left(x', \Psi\left(x'\right)\right) dx' ☺ \tag{5}$$

<u>Behauptung:</u> Auch $j = 1, \ldots, n-1$ erfüllt

$$\boxed{\int_A \frac{\partial F_j}{x_j} \, d\lambda^n = -\int_V F_j\left(x', \Psi\left(x'\right)\right) \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \, dx'} \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt:

$$\int_A \operatorname{div} F \, d\lambda^n = \sum_{j=1}^{n} \int_A \frac{\partial F_j}{\partial x_j} \, d\lambda^n$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \left(- \int_V F_j\left(x', \psi\left(x'\right)\right) \frac{\partial \psi}{x_j} \, dx' \right) + \int_V F_n\left(x', \psi\left(x'\right)\right) dx'$$

$$= \int_V \underbrace{\left\langle F\left(x', \psi\left(x'\right)\right), \frac{1}{\sqrt{1 + \left|\nabla_{x'} \psi\left(x'\right)\right|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla_{x'} \psi\left(x'\right) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{= v(x', x_n)!} \underbrace{\sqrt{1 + \left|\nabla_{x'}\left(x'\right)\right|^2}}_{\text{Oberflächenmaß auf } \partial A = graph(\psi)} \qquad dx'$$

$$= (*)$$

Achtung: $A = \{\, (x', x_n) : G(x', x_n) := \underbrace{x_n - \psi\left(x'\right)}_{=: \mathcal{G}(x', x_n)} < 0 \,\}$

$$\implies \text{Normale: } \nu(x) = \frac{\nabla \mathcal{G}(x)}{\left|\nabla \mathcal{G}(x)\right|}$$

$$\implies (*) = \int_{\partial A} \langle F, \nu \rangle \, dS^{n-1}$$

mit $\partial A = graph(\psi)$ und $\nabla \mathcal{G} = \begin{pmatrix} -\nabla_{x'} \psi\left(x'\right) \\ 1 \end{pmatrix}$

Zu (6): Abschneidefunktion $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : \eta(z) = 1$ für $z \geq 1$ und $\eta(z) = 0$ für $z \leq \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\varphi_\varepsilon(x) := \eta\left(\frac{\Psi(x') - x_n}{\varepsilon}\right)} \tag{7}$$

Dann gilt $F\varphi_\varepsilon = 0$ außerhalb von $\{x \in K : x_n \leq \Psi(x') - \frac{\varepsilon}{2}\} \subset A$. Somit gilt $F\varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}^1_C(A)$ und nach Lemma 2 ist $0 = \int_A \operatorname{div}(F\varphi_\varepsilon)\, d\lambda^n = \underbrace{\int_A (\operatorname{div} F)\, \varphi_\varepsilon\, d\lambda^n}_{\xrightarrow{\epsilon\downarrow 0} \int_A \operatorname{div} F\, d\lambda^n \text{ nach Dom. Konv.}} + \int_A F \cdot \nabla\varphi_\varepsilon\, d\lambda^n$ (9).

$\operatorname{div} F \in \mathcal{L}(A), |\varphi_\varepsilon| \leq 1, \varphi_\varepsilon \to 1$ punktweise.

<u>Fubini:</u>

$$\int_A F \cdot \nabla\varphi_\varepsilon\, d\lambda^n = \int_V \int_{-\infty}^{\Psi(x')} F(x) \cdot \nabla\varphi_\varepsilon(x)\, dx_n\, dx' = (**) \tag{10}$$

Dabei ist $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix}\nabla_{x'}\Psi(x') \\ -1\end{pmatrix}\eta'\left(\frac{\Psi(x') - \varepsilon x_n}{\varepsilon}\right)$.

Umskalieren: $z \in V \times [0, \infty) \qquad g(z) := (z', \Psi(z') - \varepsilon z_n) \implies |\det Dg| = \varepsilon$

Substitution: $x = g(z) \implies (**) = \int_V \int_0^1 \underbrace{F\left(z', \Psi\left(z'\right) - \varepsilon z_n\right)\begin{pmatrix}\nabla\Psi(x') \\ -1\end{pmatrix}}_{\text{beschränkt auf } K \cap \overline{A}} \eta'(z_n)\, dz_n\, dz'$

Da F und $|\nabla\Psi|$ beschränkt auf $K \cap \overline{A}$ sind, folgt also mit Dom. Konv.:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\downarrow 0}(**) &= \int_V \int_0^1 \lim_{\epsilon\downarrow 0} F\left(z', \psi\left(z'\right) - \epsilon z_n\right)\begin{pmatrix}\nabla\psi(x') \\ 1\end{pmatrix}\eta'(z_n)\, dz_n\, dz' \\
&= \int_V \int_0^1 F\left(z', \psi\left(z'\right)\right)\begin{pmatrix}\nabla\psi(x') \\ 1\end{pmatrix}\eta'(z_n)\, dz_n\, dz' \\
&= \int_V F\left(z', \psi\left(z'\right)\right)\int_0^1 \eta'(z_n)\, dz_n\, dz' \\
&= \int_V F\left(z', \psi\left(z'\right)\right) dz'
\end{aligned}$$

Daraus folgt (6)!

□

Lemma 28.4 (Glatte Zerlegung der Eins). *Sei K kompakt und seien $U_0, \ldots, U_J$ endlich viele offene Mengen, die A überdecken, also $A \subset \bigcup_{j=0}^J U_j$. Dann gilt:*

$$\exists \textit{ Funktion } \Theta_j \in \mathcal{C}_0^\infty(U_j, [0,1]) \textit{ mit } \sum_{j=0}^J \Theta_j(x) = 1\ \forall x \in A \tag{11}$$

Beweis. Später (Skript) □

Beweis des Satzes von Gauß.

$$\int_A \operatorname{div} F \, d\lambda^n = \int_{\partial A} \langle F, \nu \rangle \, ds^{n-1}$$

Sei $x \in \partial A = \partial_r A$. $\varphi_x > 0$ und G wie in Definition von $\partial_r A$. Es gilt $DG(x) \neq 0$. Es existiert also ein $\sigma_x > 0$, sodass ∂A in einer Umgebung von x ein Graph ist. Genauer: $\forall x \in A$ gibt es, nach Permutation der Koordinaten und gegebenenfalls Inversen ($x_j \to -x_j$) offene Mengen $U_x = \underbrace{B^1_{r(x)}(y')}_{\subset \mathbb{R}^{n-1}} + I_x$, $r(x) > 0, \varphi_x > 0$, $I_x = (x_n - \varphi_x, x_n + \varphi_x)$ und eine $\mathcal{C}^1$-Funktion ψ mit $B^1_{r(x)}(y') \to I_x$ mit

$$A \cap U_x = \{ y \in U_x : y_n < \psi(y') \} \qquad \text{(Graphenkriterium für U-Mfg.)} \tag{12}$$

Entsprechend ist $G(x', x_n) = 0, G(x', \psi(x')) = c$. Da $\partial A \subset \bigcup_{x \in \partial A} U_x \ldots$, ist ∂A kompakt. Es erfüllt also das topologische Kriterium für kompakte Mengen. Es gibt also endlich viele $U_1, \ldots, U_J$, die ∂A überdecken! Nehme also $U_0 = A \implies \overline{A} = A \cup \partial A = \bigcup_{j=0}^J U_j$.
Wir verwenden die Linearität des Integrals:
Nehme θ_j aus Lemma 4: $\sum \theta_j(x) = 1, \ \forall x \in A$.

$$\implies \int_A \operatorname{div}(F) \, d\lambda^n = \int_A \operatorname{div}\left(F \sum_j \theta_j \right) d\lambda^n = \sum_j \int_{A \cap U_j} \operatorname{div}\left(\underbrace{F\theta_j}_{=H^j} \right) d\lambda^n$$

H^0 hat einen kompakten Träger in $A = U_C$. Aus Lemma 2 folgt also $\int_A \operatorname{div} H^0 \, d\lambda^n = 0$! Für $j = 1, \ldots, J$ gilt nach Lemma 3 $\int_A \operatorname{div} H^j \, d\lambda^n = \int_{\partial A \cap U_j} \langle H_j, \nu \rangle \, dS^{n-1}$. Für die obige Folgerung gilt also weiter:

$$\begin{aligned}\int_A \operatorname{div}(F) \, d\lambda^n &= \sum_{j=0}^J \int_{\partial A} \langle F \cdot \theta_j, \nu \rangle \, dS^{n-1} = \int_{\partial A} \left\langle F \sum_{j=0}^J \theta_j, \nu \right\rangle dS^{n-1} \\ &= \int_{\partial A} \langle F, \nu \rangle \, dS^{n-1}\end{aligned}$$

□

Angenommen wir seien auf $\mathbb{R}$ und wollen $f \in \mathcal{C}^\infty$ mit $f = 0$ auf $(-\infty, 0]$, $f > 0$ auf $(0, \infty)$ und $f \leq 1$. Eine glatte Funktion mit diesen Eigenschaften wäre

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x}} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

Es gilt tatsächlich $f \in \mathcal{C}^\infty$! Betrachtet man nämlich die Ableitung, so gilt

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty, f > 0$ auf $(a, b), f = 0, x \leq a, x \geq b$.

Literatur:
Königsberger, 5. Aufl. Ana II

Todo list

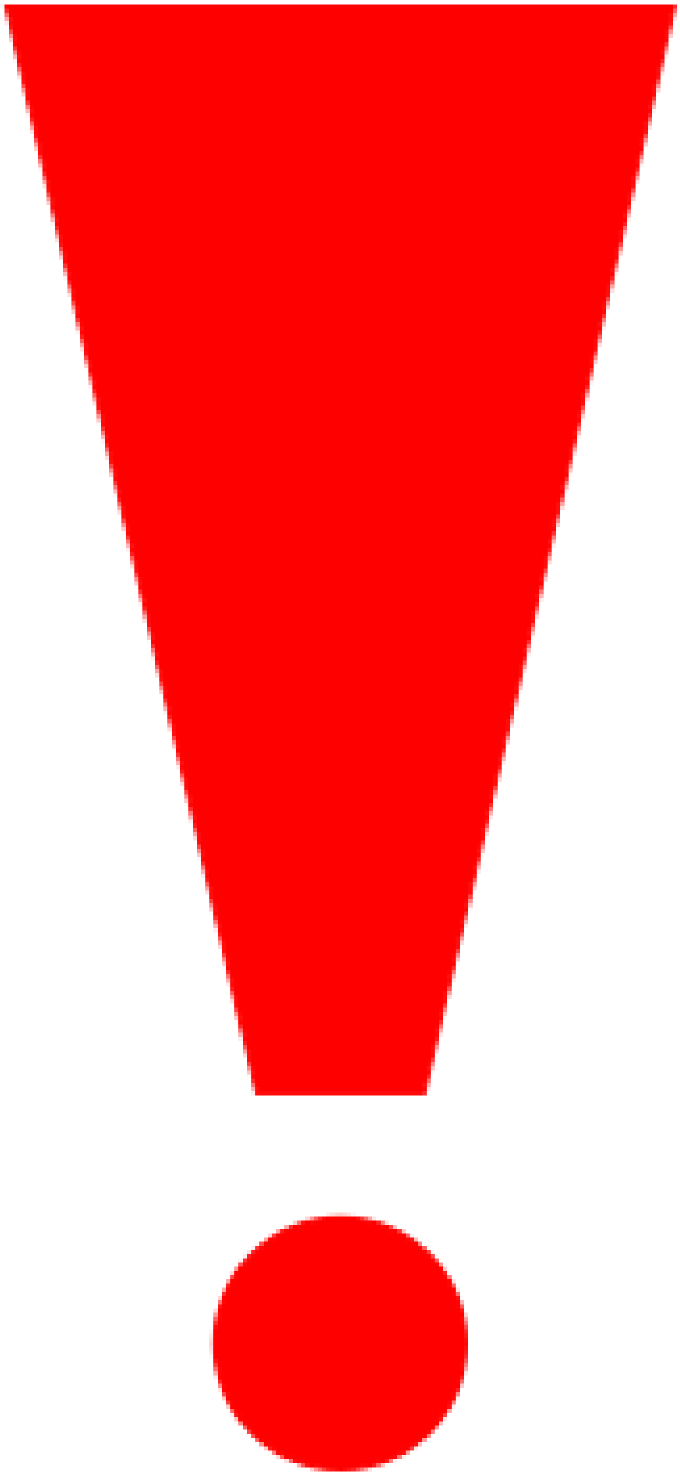

Abbildung 12: Verweis auf die Relevanz von Satz 1.3

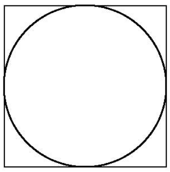

Abbildung 13: K für $d = 2$

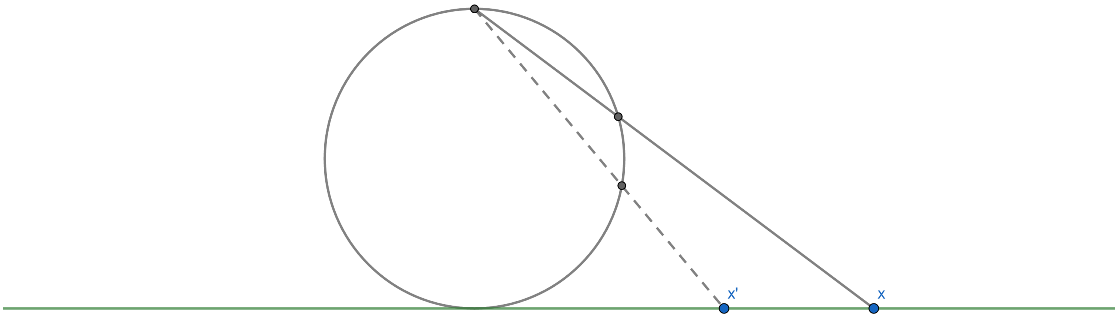

Abbildung 14: ???

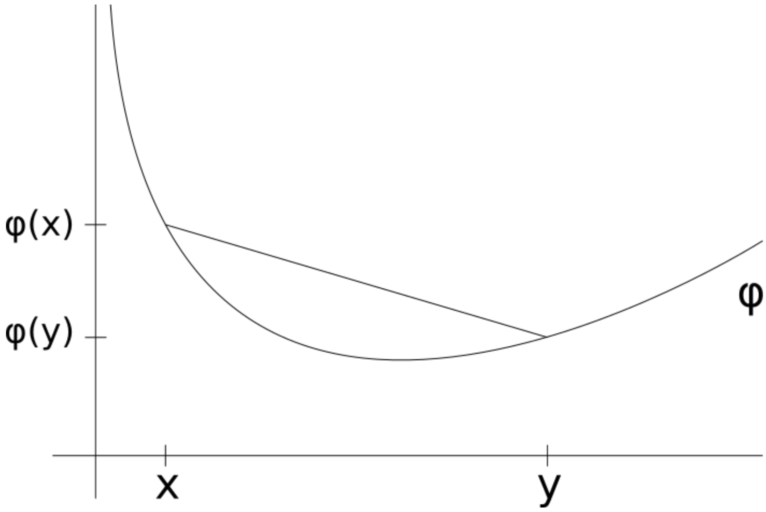

Abbildung 15: Beispielhafte konvexe Funktion φ und $\lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$

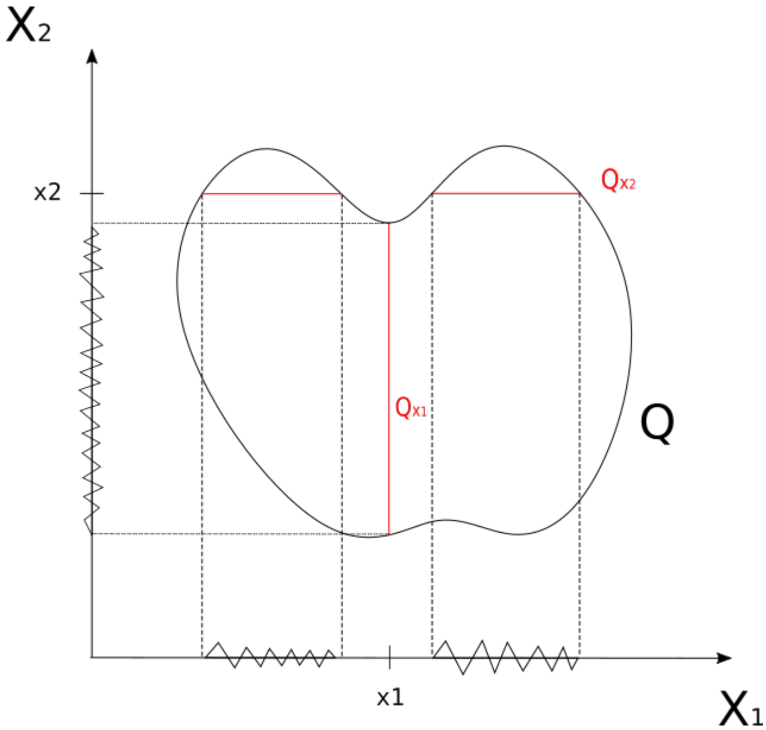

Abbildung 16: Beispiel für Q_{x_1} und Q_{x_2}

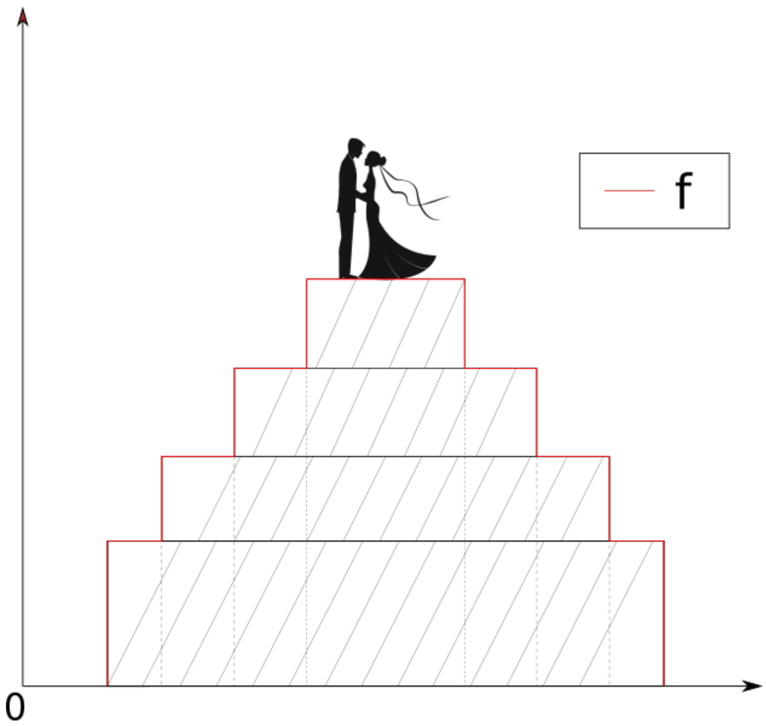

Abbildung 17: *Gestrichelte Linien:* erinnern daran, wie $\int f \, d\mu$ die Fläche berechnet.
Diagonale Linien: markieren die Fläche(n), die von $\int_0^\infty \mu(\{f \geq t\}) \, dt$ berechneten werden.
Rote Linie: Die zu integrierende Funktion f