Karlsruher Institut für Technologie

26. April 2023
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Henning Heister

Analysis für das Lehramt
Übungsblatt 01

Aufgabe 1 (Rechnen mit komplexen Zahlen)**.**

(a) Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:
   (i) $z_1 := \frac{3+5\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$,
   (ii) $z_2 := \frac{1}{(1+\mathrm{i})^2}$ und
   (iii) $z_3 := \left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{3n}$.

(b) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:
   (i) $D_1 := \left\{z \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\left(z^2\right) \le 1\right\}$,
   (ii) $D_2 := \{z \in \mathbb{C}:\ |z+2+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|\}$,
   (iii) $D_3 := \{z \in \mathbb{C}:\ 1 < \mathrm{Re}(\mathrm{i}z) < 2\}$ und
   (iv) $D_4 := \left\{z \in \mathbb{C}:\ |z+1-\mathrm{i}| < 2,\ \mathrm{Re}(z) \ge \frac{1}{2}\right\}$.

(c) Welche geometrische Form hat die Lösungsmenge der Gleichung $2z\bar{z} + \mathrm{i}z - \mathrm{i}\bar{z} - 1 = 0$?

(d) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche die gegebene Gleichung lösen: $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$.

Aufgabe 2 (Komplexe Differenzierbarkeit = Reelle Differenzierbarkeit + Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen)**.** Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f:\ D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Definieren wir $u := \mathrm{Re}\, f$ und $v := \mathrm{Im}\, f$, so können wir $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ für alle $z := x + \mathrm{i}y \in D$ schreiben (wobei wir den Definitionsbereich D von u und v als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ auffassen). Im Folgenden sei $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in D$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist komplex differenzierbar in z_0.

(b) u und v sind reell differenzierbar in (x_0, y_0) und es gelten $u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$, $u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$.

Nutzen Sie hierfür, dass f genau dann in z_0 komplex differenzierbar ist, wenn es ein $c \in \mathbb{C}$ gibt mit $\lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)-c(z-z_0)|}{|z-z_0|} = 0$, und bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $f(z) - f(z_0) - c(z-z_0)$.

Aufgabe 3 (Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie)**.**

(a) Zeigen Sie mithilfe der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen, dass die Funktion $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) := \bar{z}$ an keiner Stelle komplex differenzierbar ist.

(b) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetig und die Abbildung $z \mapsto f(z)^2$ sei holomorph auf $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann f holomorph auf $\mathbb{C}$ ist und berechnen Sie die Ableitung.

Aufgabe 4 (Komplexe Potenzreihen)**.**

(a) Berechnen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (2 + n\mathrm{i})^n z^n$,

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{i}n^2 + 2^n) z^{2n}$ und

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}n)^{n-1}}{n!} z^n$.

(b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für welche die gegebene Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)z^n}{n^2}$$

konvergent ist.